# ملخص الرياضيات :

د حماد فريال

## الدوال الحدودية :

### كثيرات الحدود ( درجة 1 / 2 / 3 / مضاعفة الأصل ) :

كثير حدود من الدرجة 1 : $A \neq 0$

الشكل العام ← $Ax + B$

الجذور ← $x = -B/A$

إشارة ←

| $x$ | $-\infty$ | $-B/A$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $Ax+B$ | عكس إشارة $a$ | $0$ | إشارة $a$ |

كثير حدود من الدرجة 2 :

الشكل العام ← $A \neq 0$ / $Ax^2 + Bx + C$

الجذور ← حساب المميز $\Delta$ / $\Delta = B^2 - 4AC$

- $\Delta = 0$ ← يوجد حل مضاعف (الأصغر يعيد) $x_0$ في $(ax)$ حيث : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- $\Delta > 0$ ← يوجد حلان متمايزان $x_1 \neq x_2$ : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta < 0$ ← المعادلة لا تقبل حل

التحليل ←

- $\Delta = 0$ ← $a(x - x_0)^2$
- $\Delta > 0$ ← $a(x - x_1)(x - x_2)$
- $\Delta < 0$ ← لا تقبل تحليل

إشارة ←

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| | إشارة $a$ | $0$ | إشارة $a$ |
| / | | | |

← $\Delta = 0$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| | إشارة $a$ | $0$ | عكس إشارة $a$ | $0$ إشارة $a$ |
| / | | | | |

← $\Delta > 0$ ، $x_1 < x_2$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| | إشارة $a$ | |
| / | | |

← $\Delta < 0$

ملاحظة ← $Ax^2 + Bx + C = 0$ لما :

- $(B, C) \neq 0$ ← نجد الحلول إرفاقا من المميز $\Delta$
- $C = 0$ ← نجد الحلول إرفاقا من التحليل $x(Ax+B)$
- $B = 0$ إذا كان $A$ و $C$ من نفس الإشارة ← المعادلة لا تقبل حل

وإذا كان $A$ و $C$ من إشارتين مختلفتين نجد الحلول إرفاقا فارق المربعين

الفرق بين مربعين

كثير حدود من الدرجة 3 :

الشكل العام ← $A \neq 0$ $Ax^3 + Bx^2 + Cx + Z$

الجذور ← بالتحليل أو المطابقة حيث إذا كان الجدول غير معروف :

← مجموع المعاملات إذا كان معدوم فإن 1 جذر

وإذا كان غير معدوم نضع في مجال صغير من الحلول.

### كثيرات الحدود مضاعفة الأس :

الشكل العام ← $Ax^{2n} + Bx^n + C$

الجذور ← تبديل المتغير : $t = x^n$

$t^2 = x^{2n}$

$At^2 + Bt + C = 0$

مثال : $f(x) = x^4 + 13x^2 + 36$

تبديل المتغير : $t = x^2$

$t^2 = x^4$

$f(t) = t^2 + 13t + 36$ تصبح

حساب الجذور باستخدام المميز نجد :

$f(t) = (t-4)(t-9)$

$f(x) = (x^2-4)(x^2-9)$

$f(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$

الفرق بين مربعين

$f(x) = 0$

$S = \{-3, -2, 2, 3\}$

ملاحظات هامة عن كثيرات الحدود :

1 ـ لإيجاد حلول كثير الحدود نقوم دوما بحل المعادلة الصفرية

2- حضور دالة ما تمثل بيانيا نقاط تقاطع المنحنى
المثل لهذه الدالة مع حامل محور الفواصل

3- إشارة دالة ما تمثل بيانيا الوضع النسبي
لمنحناها البياني مع حامل محور التواصل :

- إشارة (+) المنحنى فوق (xx')
- إشارة (-) المنحنى تحت (xx')

4- لإيجاد الجذور ← التحليل جداء عاملين
القسمة الإقليدية

5- لمعرفة أحد الجذور يمكن معرفة الجذور الأخرى

## مجموعة تعريف (كثير حدود / دالة ناطقة / دالة صماء):

- دالة كثير الحدود : مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$
- دالة ناطقة : [كثير حدود / كثير حدود] المقام يجب أن يكون غير معدوم
- دالة صماء (دالة جذرية) : $\sqrt{g(x)}$ يجب أن يكون $g(x) \geq 0$ (متراجحة)
دراسة إشارة

## تذكير حول المتطابقات الشهيرة :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

## النهايات :

### ملاحظات :

- النهايات تحسب عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف
- فتحة نهاية عبارة حل صورة
نستنتج من النهايات المستعملات المقارنة وهي تفسيرات هندسية للنهايات

### قواعد :

نهاية دالة كثير حدود : نهاية كثير حدود عند $\infty$ تؤول إلى نهاية أكبر حد وتتحكم في نتيجة النهاية إشارة معامل أكبر حد + نهائية n (فردي/زوجي)

نهايات الدوال الناطقة :

A- عند $\infty$ : تؤول النهاية إلى نهاية أكبر حدي البسط على أكبر حدي المقام وإلا نختزل بسيط التعويض

B- عند حدد : دراسة إشارة المقام ثم التعويض.

نهاية دالة مركبة $f = v \circ u \Leftrightarrow f = v(u(x))$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \longrightarrow \lim\limits_{x \to a} u(x) = b$

$\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

النهايات بالمقارنة (الحصر والترتيب) :

بالحصر : (عدد أو $\infty$) :

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim g(x) = \lim h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$$

بالترتيب :

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim g(x) = \alpha \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = \alpha$$

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim g(x) = \alpha \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = \alpha$$

### قواعد عامة ونهايات شهيرة :

$\frac{a}{0} = \infty, a \neq 0$ / $\frac{a}{\infty} = 0$ / $\frac{0}{(a,\infty)} = 0$ / $\frac{\infty}{0,a} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$ / $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ / $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ / $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$

## حالات عدم التعيين :

$0.\infty$ / $\frac{\infty}{\infty}$ / $\frac{0}{0}$ / $+\infty - \infty$

إزالة = توجد 3 طرق وأكثر :

- التحليل والاختزال
- المرافق
- العدد المشتق
- تبديل المتغير

### الحالة $\frac{0}{0}$ = 01

← دالة ناطقة تؤول إلى حدد نستعمل التحليل

مثال: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+1)}$

$= \boxed{\infty}$

← دالة ناطقة تتضمن الجذر تؤول إلى عدد $x_0$

نضرب ونقسم في المرافق ثم نستخرج عامل مشترك التحليل ونختزل على $(x-x_0)$

مثال:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

← التحصل للكسر (دمج بين الحالتين السابقتين)

مثال: $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}+x^2+3x-10}{x^2-x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-x-2} + \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \boxed{+\infty}$$

← الحالة من الشكل $(ax+b)$ و $(cx+b)$ كثيرات الحدود

على الشكل $(\sqrt{ax+b})$ نستعمل العدد المشتق،

مثال: $$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$$

نضع $g(x) = \sqrt{2x-1}$ أي $g(5) = 3$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5} = g'(5) = \frac{1}{3}$$ وجدنا

### الحالة $\frac{\infty}{\infty}$ = 0

← دالة ناطقة تتوفر جذر نستعمل العامل المشترك

مثال: $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x-3}}{1-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2})}}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1-x} = \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(\frac{1}{x}-1)}$$

$$= \boxed{\sqrt{2}}$$

### الحالة $+\infty - \infty$ = 05

← $f(x) = \sqrt{ax+b} + \alpha x + \beta$ نضع x كعامل مشترك

← $f(x) = \sqrt{bx^2+bx+c} + \alpha x + \beta$

← $\sqrt{a} = |a|$ نستعمل طريقة المرافق

مثال: $$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-1}+x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}-x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{x[1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}]} = 0$$

← $\sqrt{a} \neq |a|$ نستعمل طريقة التحليل (العامل المشترك)

مثال: $$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-2x = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x$$

$$= x[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2] = -\infty$$

← $\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{\alpha x^2+\beta x+b}$

← $a = \alpha$ نستعمل طريقة المرافق

← $a \neq \alpha$ نستعمل طريقة التحليل (العامل المشترك)

## التفسير الهندسي للنهايات (المستقيمات المقاربة):

ملاحظة = التقارب يكون دوما عند أطراف المستقيم

- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ← المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب حمودي معادلته $x=a$ (لا تنسى)
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ← المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=b$ بجوار $\infty$ (يمكن $+\infty$ أو $-\infty$).
- $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ← المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $\infty$

ملاحظة =

لدينا دالة $f$ من الشكل $f(x)=ax+b+g(x)$

و $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ فالمستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل بجوار $\infty$.

## دراسة وضعية المنحنى والمستقيم المقارب:

ندرس إشارة الفرق ونميز:

- $f(x)-(ax+b)>0$ ← $(C_f)$ فوق $(\Delta)$
- $f(x)-(ax+b)<0$ ← $(C_f)$ تحت $(\Delta)$
- $f(x)-(ax+b)=0$ ← $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$

## الإشتقاق:

### مشتقات الدوال الحالية:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $K$ (عدد ثابت) | $0$ |
| $Ax$ | $A$ |
| $Ax^n$ $(n\geq 2)$ | $A.nx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $u\times v$ | $u'v+v'u$ |
| $ku$ ($k$ عدد ثابت) | $ku'$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ |
| $\frac{k}{v}$ ($k$ عدد ثابت) | $-\frac{kv'}{v^2}$ |
| $u^n$ | $nu'.u^{n-1}$ |
| $u(ax+b)$ | $au'(ax+b)$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\frac{1}{u^n}$ | $-\frac{nu'}{u^{n+1}}$ |
| $v\circ u$ | $u'\times(v'\circ u)$ أو $[v(u(x))]'=u'(x).v'(u(x))$ |

### العدد المشتق ودالة الإشتقاق والتفسير الهندسي:

العدد المشتق لدالة $f$ عند عدد $x_0$ :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

أو

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

- $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)=l$ ← $f$ قابلة للإشتقاق عند $x_0$ و $(C_g)$ يقبل عند النقطة $(x_0,f(x_0))$ مماس معامل توجيهه $f'(x_0)$
- $f'_d(x_0)[l_1]\neq f'_g(x_0)[l_2]$ ← $f$ غير قابلة للإشتقاق عند $x_0$ وقابلة للإشتقاق على يمين ويسار $x_0$ و $(C_g)$ يقبل عند النقطة $(x_0,f(x_0))$ نصفي مماسين والنقطة $(x_0,f(x_0))$ نقطة زاوية للمنحنى $(C_g)$
- $f'(x_0)=\infty$ ← $f$ غير قابلة للإشتقاق عند $x_0$ والمنحنى $(C_g)$ يقبل مماسا عند $(x_0,f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x=x_0$
- $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)=\pm\infty$ ← $f$ غير قابلة للإشتقاق عند $x_0$ وغير قابلة للإشتقاق على يمين ويسار $x_0$ والمنحنى $(C_g)$ يقبل مماسا عند $(x_0,f(x_0))$ موازيا لـ $(yy')$ معادلته $x=x_0$ وتسمى النقطة $(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى $(C_g)$

- $f'_g(x_0)[+\infty] + f'_g(x_0)[-\infty]$ غير قابلة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0$ وبيان $(C_f)$ يقبل عند $(x_0, f(x_0))$ نصف مماسين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما $x = x_0$ ونسمي النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة رجوع للمنحنى $(C_f)$
- $f'_g(x_0)[\alpha] \neq f'_d(x_0)[\beta]$ $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0$ وبيان $(C_f)$ يقبل عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ نصفي مماسين (عند النقطة الزاوية).

**المماس:** $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**كتابة معادلة مستقيم يمر بنقطتين:**

$A(x_0, y_0)$ و $B(x_1, y_1)$

$D: y = ax + b$

$a = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

نقطة تقاطع المنحنى مع $(y)$ $B$

يمكن ايجاد $B$ حسابيا بتعويض $A$ أو $B$ في معادلة المشتقة

**طرق ايجاد معادلة المماس:**

- أكتب معادلة المماس الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$ (طريقة كتابة معادلة مستقيم)
- أكتب معادلة المماس الذي ميله $a$: نحل المعادلة $f'(x_0) = a$، عند ايجاد $x_0$ نعوض في معادلة المماس
- أكتب معادلة المماس الذي يوازي المستقيم $d$ ذو المعادلة $y = ax + b$: $f'(x_0) = a$ نعوض $x_0$ في معادلة المماس
- أكتب معادلة المماس الذي يعامد المستقيم $d$ ذو المعادلة $y = ax + b$: نحل المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ عند ايجاد $x_0$ نعوضها في معادلة المماس
- أكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الترتيب $y_0$: نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ وعند تعيين $x_0$ نعوض في معادلة المماس
- أكتب معادلة المماس الذي يشمل النقطة $H(\alpha, \beta)$: نحل المعادلة: $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$ عند ايجاد قيمة $x_0$ نعوض في معادلة المماس.
- أكتب معادلة المماس الذي يقطع حامل محور التراتيب في $(0, \gamma)$

$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$x = 0$ $\quad y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$

$y = Ax + B$

بالمطابقة نجد $f(a) - af'(a) = \gamma$ نحل المعادلة ونجد قيمة $a = x_0$ ونعوض في معادلة المماس

**ملاحظة:** عدد الحلول يدل على عدد المماسات وإن لم تقبل المعادلة حل يعني لا يوجد مماس.

**تطبيقات الاشتقاقية:**

**اتجاه التغير:** دراسة إشارة المشتقة $f'(x)$ من أجل كل $x$ من $D_f$ يسمح بمعرفة اتجاه التغير حيث:

- $f'(x) > 0$ من أجل كل $x$ من $D_f$ الدالة متزايدة تماما
- $f'(x) < 0$ " " " الدالة متناقصة تماما
- $f'(x) = 0$ " " " الدالة ثابتة تماما

**القيمة الحدية:** إذا انعدمت $f'$ مغيرة إشارتها فإنه توجد قيمة حدية (صغرى / كبرى).

**نقطة إنعطاف:** المنحنى يقبل نقطة انعطاف إذا:

- $f(x)$ تنعدم ولا تغير إشارتها
- $f''(x)$ تنعدم عند $x_0$ وتغير إشارتها
- المماس $(T)$ يخترق $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$

**الاستمرارية:**

تكون الدالة $f$ مستمرة عند $x_0$ إذا وفقط إذا كان

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

وتكون الدالة $f$ مستمرة على مجال إذا وفقط إذا كانت

مستمرة عند كل قيمة من قيم هذا المجال

المبرهنة الحاسمة (التأطير): نقول عن دالة أنها مستمرة إذا استطعنا رسم منحناها بدون رفع القلم.

مبرهنة القيم المتوسطة: تستعمل نظرية القيم المتوسطة عند استحالة الوصول إلى حل المعادلة بالطرق الرياضية المألوفة، ولبيان أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل وحيد في المجال $]a,b[$ يجب أن يتوفر:

1- استمرارية الدالة $f$ على المجال $]a,b[$

2- رتابة الدالة (متزايدة أو متناقصة) على $]a,b[$

3- قيمتا $f(a)$ و $f(b)$ أو $f(a)<k<f(b)$ أو $f(a)>k>f(b)$

حالة خاصة: إذا كانت المعادلة $f(x)=0$ على المجال $]a,b[$ يكفي أن نبين أنها مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]a,b[$ و أن $f(a)\times f(b)<0$

أو $\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to b} f(x)<0$

ملاحظة: لبيان أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على المجال $]a,b[$ حلا وحيدا $\alpha$ يكفي أن نبين أن $f$ مستمرة على المجال $]a,b[$ و $f(a)<k<f(b)$

الأشكال المتوقعة:

- بين أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]A,B[$
- بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$

محور التناظر + الدالة الزوجية:

- المستقيم $x=a$ محور تناظر للمنحنى $(C_f)$

يعني: $f(2a-x)=f(x)$ أو $f(a-x)=f(a+x)$

- الدالة $f$ زوجية $(C_f)$ تقبل محور التراتيب كمحور تناظر) معناه: $f(-x)=f(x)$

مركز التناظر + الدالة الفردية:

- $\Omega(a,\beta)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

يعني: $f(2a-x)+f(x)=2\beta$ أو $f(a-x)+f(a+x)=2\beta$

- الدالة $f$ فردية $(C_f)$ تقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر) معناه: $f(-x)=-f(x)$

التقاطع مع محور الفواصل ومحور التراتيب:

- $(C_f)\cap(x'x)$ يعني حل المعادلة $f(x)=0$ (إذا كانت المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلول معناه $(C_f)$ لا يقطع محور الفواصل).
- $(C_f)\cap(yy')$ يعني حساب $f(0)$

استنتاج تمثيل بياني من آخر:

1- $h(x)=f(|x|)$: $h$ دالة زوجية $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$ ومنه الدالة $h$ زوجية $(C_h)$ تقبل $(yy')$ كمحور تناظر

ب) نزع القيمة المطلقة

$$h(x)=f(|x|)\begin{cases} f(x) & ; x\geq 0 \\ f(-x) & ; x\leq 0 \end{cases}$$

من أجل $x\geq 0$ لدينا $h(x)=f(x)$ ومنه $(C_h)$ منطبق على $(C_f)$

ولما أن الدالة $h$ زوجية فإن $(C_h)$ نظير $(C_f)$ المرسوم على المجال $]0,+\infty[$

2- $h(x)=f(-|x|)$:

$h$ دالة زوجية $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=h(x)$

الدالة $h$ زوجية و $(C_h)$ تقبل $(yy')$ كمحور تناظر

ب) نزع القيمة المطلقة

$$h(x)=f(-|x|)\begin{cases} f(-x) & ; x\geq 0 \\ f(-(-x)) & ; x\leq 0 \end{cases}$$

من أجل $x\leq 0$ لدينا $h(x)=f(x)$ ومنه $(C_h)$ منطبق على $(C_f)$ ولما أن الدالة $h$ زوجية فإن $(C_h)$ نظير $(C_f)$ المرسوم على المجال $]-\infty,0]$

3- $h(x)=|f(x)|$:

أحد شيء هو معرفة إشارة $f(x)$ + نزع القيمة المطلقة

$$h(x)=|f(x)|\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ; f(x)\leq 0 \end{cases}$$

- لما يكون $(C_f)$ فوق محور الفواصل فإن $(C_h)$ منطبقة على $(C_f)$ ومنه $h(x)=f(x)$
- ولما يكون $(C_f)$ تحت محور الفواصل فإن $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لـ $(x'x)$ ومنه $h(x)=-f(x)$
4- $h(x)=f(x+a)+b$ : $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a,b)$
5- $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لـ $(x'x)$ : $h(x)=-f(x)$
6- $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لـ $(y'y)$ : $h(x)=f(-x)$
7- $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالتناظر المركزي $O$ : $h(x)=-f(-x)$

## الدوال الأصلية :

تعريف : $F$ دالة أصلية لـ $f$ حيث : $F'(x)=f(x)$
كل دالة $f$ مستمرة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ تقبل عدد غير منته من الدوال الأصلية على هذا المجال من الشكل :
$F(x)+c$ ، $c\in\mathbb{R}$ حيث $F$ هي إحدى الدوال الأصلية لـ $f$

الدوال الأصلية : $c$ عدد ثابت

$f'f^n \to \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)}+c$ ; $n\neq 0$ ; $n\neq -1$

- $A\neq 0 \to Ax+c$
- $Ax^n \to \frac{A}{n+1}x^{n+1}+c$
- $(x+a)^n \to \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}+c$

$\frac{f'}{f^n} \to \frac{-1}{(n-1)f^{(n-1)}}+c$ ; $n\geq 2$

- $\frac{f'}{f} \to \ln|f|+c$
- $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}+c$
- $\frac{1}{x} \to \ln x+c$

$f'e^f \to e^f+c$

- $e^{ax+b} \to \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$
- $e^x \to e^x+c$

$\frac{f'}{\sqrt{f}} \to 2\sqrt{f}+c$

- $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 2\sqrt{x}+c$

- $\ln x \to x\ln x - x+c$
- $\ln(x+a) \to (x+a)\ln(x+a) - x+c$

- $\cos(ax+b) \to \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ / $\cos x \to \sin x+c$
- $\sin(ax+b) \to -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ / $\sin x \to -\cos x+c$

طريقة لتعيين دالة أصلية لدالة : يمكننا :
ملاحظة : إذا كانت $f$ تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد مجموعة $u(x)$
نحسب $u'(x)$ ثم نجد عددا حقيقيا $k$ بحيث
$f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$
نطبق قواعد الدوال الأصلية

## الحساب التكاملي :

تعريف التكامل : $f$ مستمرة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $F$ دالة أصلية لها على $I$ و $a$ و $b$ عددان حقيقيان ، العدد الحقيقي $(F(b)-F(a))$ يسمى التكامل العدد لـ $f$ من $a$ إلى $b$ ونرمز إليه $\int_a^b f(x)dx$ نقرأ : التكامل من $a$ إلى $b$ لـ $f$ تفاضل $x$ ونكتب :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

خواص التكامل :

1- علاقة شال : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

2- الخطية : $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3- $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

4- إذا كان $a<b$ و $f$ موجبة على $[a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5- " " " و $f$ سالبة " " فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

6- إذا كان $a<b$ ومن أجل كل $x$ من $[a,b]$ $f(x)\leq g(x)$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

التكامل بالتجزئة : $u$ و $v$ دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $u'$ و $v'$ مشتقتيهما مستمرتين على $I$ فإنه من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ من $I$ لدينا :

$$\int_a^b u\times v'\,dx = [u\times v]_a^b - \int_a^b v\,u'\,dx$$

ملاحظة: 1- يمكن دائما وضع $u(x)=u(x)\times v'(x)$ حيث $v'(x)=1$

2- لاستعمال التكامل بالتجزئة نكتب $f$ على الشكل $uv'$ حيث تكون $u$ و $v'$ دوال قابلة للاشتقاق أو:

- الدالة $e^x$
- الدالة $\sin$ أو $\cos$
- الدالة الجذرية
- الدالة كثير الحدود
- الدالة $\ln$

3- يمكن استعمال الجدول لتسهيل الحساب

| $u$ | $u'$ |
|---|---|
| $v$ | $v'$ |

الدالة الأصلية التي تنعدم عند عدد حقيقي:

$f$ مستمرة على $I$ و $a$ عدد حقيقي من $I$، الدالة الأصلية الوحيدة للدالة $f$ على $I$ والتي تنعدم عند $a$ هي الدالة $\int_a^x f(t)\,dt$.

مساحة حيز (التفسير الهندسي للتكامل):

يمكن أن تكون المساحة بين مستقيمين و منحنيين أو منحنى ومستقيم وتحدد بالعلاقة:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(y_2-y_1)\,dx \quad ; S>0$$

حيث $x_1 < x_2$ حدود التكامل

و $y_1 < y_2$ (يجب أخذ بعين الاعتبار الوضع النسبي)

← نوع المعلم ووحدته معلوم حيث تضرب المساحة $S$ في $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ وإذا لم تحدد تضرب المساحة في $ua$.

ملاحظة: $f$ مستمرة تماما على $[-a,a]$ مع $a\neq 0$

إذا كانت $f$ زوجية: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

وإذا كانت $f$ فردية: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

القيمة المتوسطة لدالة على $[a,b]$:

$m$ عدد حقيقي $\quad m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

تفسيرها الهندسي: مساحة المستطيل الذي بعديه $(b-a)$ و $m$ تساوي مساحة الحيز المحدد بـ $(C_f)$ و $(x'x)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=a$ و $x=b$

حساب الحجوم:

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

## المعادلات التفاضلية:

| المعادلة التفاضلية | حلول المعادلة |
|---|---|
| $y'=f(x)$ | $y=F(x)+c$ حيث $F$ دالة أصلية لـ $f$ و $c$ ثابت حقيقي |
| $y''=f(x)$ | $y=c_1(x)+c_1x+c_2$ حيث $c_1$ دالة أصلية لـ $f$ و $F$ دالة أصلية لـ $f$ مع $c_1$ و $c_2$ ثوابت |
| $y'=ay+b$ | $y=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث $c$ ثابت حقيقي |

## الدالة الأسية :

### دراسة وخواص : $f(x)=e^x$

الدالة الأسية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق $f'(x)=f(x)$

متزايدة وموجبة تماما $e^x>0$ وتحقق $e^0=1$

حيث $e$ عدد حقيقي قيمته التقريبية $e\simeq 2,71$

تقبل مستقيم مقارب أفقي $(x'x)$ عند $(-\infty)$

- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $e^x>x$ ; $x>0$
- $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ / $e^x\times e^y=e^{x+y}$
- $e^x\times e^{-x}=1$ / $(e^x)^n=e^{nx}$
- $e^x=\frac{1}{e^{-x}}$ / $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

### الإشتقاق :

$$f(x)=e^{u(x)}$$

إذا كانت $u$ قابلة للإشتقاق على مجال، فإن :

$$f'(x)=(e^{u(x)})'=u'(x).e^{u(x)}$$

التقريب التآلفي هو كتابة بديلة لدالة بجوار عدد وهي من الدرجة الأولى وتمثل معادلة المماس عند ذلك النقطة

$e^x\approx x+1$ هو تقريب تآلفي للدالة $e^x$ في جوار $0$.

### النهايات الشهيرة :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad (e^{+\infty}=+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \quad (e^{-\infty}=0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad \left(\lim_{g\to+\infty}\frac{e^{g(x)}}{[g(x)]^n}=+\infty\right)$$

نهاية مستذرجة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0 \quad \begin{cases}0^+ \text{ (من اليمين)}\\ 0^- \text{ (من اليسار)}\end{cases} \quad \left(\lim_{g\to-\infty}[g(x)]^n e^{g(x)}=0\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\frac{e^x-1}{x}=f'(0)=1$$

$$\left(\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a \Big/ \lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1\right)$$

## حل ومناقشة المعادلات والمتراجحات :

### الشكل : $Ae^{ax+\beta}+B$

قواعد عامة :

$e^x=e^y$ تكافئ $x=y$

$e^x<e^y$ تكافئ $x<y$ / $e^x>e^y$ تكافئ $x>y$

$e^x=a$ تكافئ $x=\ln a$ $(a>0)$

← المعادلة من الشكل $Ae^{ax+\beta}+B$ تقبل حل

إذا كان $A$ و $B$ من إشارتين مختلفتين ولا تقبل حل إذا كانا من نفس الإشارة

الإشارة : $A,B$ موجبان ← $ae^{ax+\beta}+B>0$

$A,B$ سالبان ← $ae^{ax+\beta}+B<0$

$A,B$ مختلفين في الإشارة :

| $x$ | الحل | |
|---|---|---|
| إشارة $a$ | عكس إشارة $a$ | حسب إشارة $a$ |

الشكل : $A(e^{nx})^2+B(e^x)^n+C$ : لا يمكن قبول الحلول السالبة

← نقوم بحل العبارة باستخدام تبديل المتغير بعد التحليل واستنتاج الإشارة، مثال

$e^{4x}-5e^{2x}+6=0$

$(e^{2x})^2-5e^{2x}+6=0$

نضع : $t=e^{2x}$ $\quad t^2-5t+6=0$

$t_2=3$ / $t_1=2$ أي $e^{2x}=2$ ; $x=\ln 2/2$

$e^{2x}=3$ ; $x=\ln 3/2$

$e^{4x}+5e^{2x}+6=(e^{2x}-2)(e^{2x}-3)$

| | $-\infty$ | $\ln 2/2$ | $\ln 3/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $e^{2x}-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $e^{2x}-3$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الجداء | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

أمثلة أخرى حول تبديل المتغير وتبسيط العبارة

1- $e^x+15e^{-x}-2=0$

نضرب : $e^x(e^x+15e^{-x}-2)=e^{2x}-2e^x+15=0$

2) $e^{3x} - 4e^{2x} + e^x + 6 = 0$

نضع $(e^x)^3 - 4(e^x)^2 + e^x + 6 = 0$

3) $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x-2}} - 2e^3 = 0$

$(e^{2x-1} - e^{x+1} - 2e^3)e^1$

نضع: $(e^x)^2 - e^2 e^x - 2e^4 = 0$

## الدالة اللوغاريتمية :

خواصها ومميزاتها : $f(x) = \ln x$

الدالة اللوغاريتمية معرفة على $]0, +\infty[$ وتحقق : $\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$ ، متزايدة تماما وتقبل $x > 0$ كمستقيم مقارب عمودي ، و

$x > 0 ; \quad x > \ln x$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln(a^n) = n \ln a$

$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a \quad / \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

إشارة الدالة $\ln x$ :

| | | |
|---|---|---|
| $\ln x < 0$ | وتكون | $0 < x < 1$ |
| $\ln x > 0$ | وتكون | $x > 1$ |
| $\ln x = 0$ | وتكون | $x = 1$ |

الإشتقاق : قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ و :

$[\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)}$ ؛ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x > 0$ ، $f'(x) = \frac{1}{x}$ ومنه $f'(x) > 0$

ملاحظة : يجب تطبيق الخواص على العبارة ثم الإشتقاق.

النهايات الشهيرة :

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ ( $\ln 0^+ = -\infty$ )

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ ، $\lim_{g \to +\infty} \frac{\ln g(x)}{[g(x)]^n} = 0^+$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ مستنتجة

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0^-$ ، $\lim_{g \to 0} [g(x)]^n \ln g(x) = 0^-$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = f'(1) = 1$

$\lim_{g \to 1} \frac{\ln g(x)}{g(x) - 1} = 1$ تبقى نفس النتيجة بالنسبة للمقلوب

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ، $\lim_{g \to 0} \frac{\ln(1+g(x))}{g(x)} = 1$

حل ومناقشة المعادلات والمتراجحات :

قواعد عامة : $\ln u = \ln v$ فإن $u = v$

$\ln u < \ln v$ فإن $u < v$ / $\ln u > 0$ فإن $u > 1$

$\ln u < 0$ فإن $0 < u < 1$

الشكل $A \ln(ax) + B$ : لحل المعادلة يجب تعيين مجموعة التعريف + الخواص

لحل المعادلة باستخدام القواعد ثم جدول الإشارة

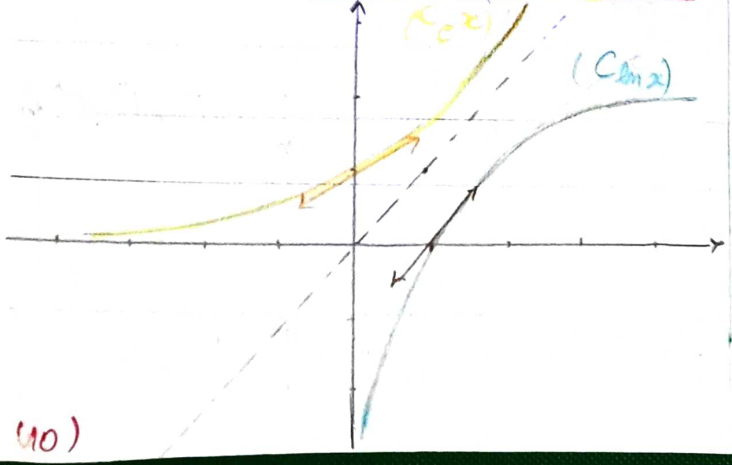
| $x$ | الحل | |
|---|---|---|
| الإشارة | عكس إشارة $aA$ | إشارة $aA$ |

الشكل $A[\ln g(x)]^{2n} + B[\ln g(x)]^n + C$ : نقوم بحل العبارة باستخدام تبديل المتغير ثم التحليل واستنتاج الإشارة (نفس طريقة المثلثية)

إشارة $\ln U(x)$ حيث $U(x) > 0$ من إشارة $U(x) - 1$.

يمكن حل المتراجحة باستنتاج الإشارة

## المنحنيات البيانية لـ $e^x$ و $\ln x$ :



## المناقشة البيانية :

← السؤال المطروح نناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول وإشارة المعادلة

← الإجابة الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=$ هي فواصل نقط تقاطع أو تماس المنحنى مع المستقيم الذي معادلته $y=$

أنواع المناقشة :

← مناقشة أخرى $f(x)=m$ ، أشكالها :

$f(x)=m+a$ / $f(x)=am$ / $f(x)=-m$ / $f(x)=m$ / $f(x)=m^2$

$f(x)=\ln m$ / $f(x)=e^m$ / $f(x)=|m|$ / $f(x)=\sqrt{m}$ / $f(x)=\frac{1}{m}$

/ $f(x)=10^m$ / $f(x)=\log m$ / $f(x)=a^m$

$f(m)$ : لا يمكننا أن نناقش في مجال غير مجموعة التعريف لأن $m \in D_f$ ، $m=x$ +

عدد الحلول هو الذي يعطي قيم $m$ + نقط التقاطع المستقيم الذي معادلته $x=$ مع المنحنى نسقط على محور الفواصل لنجد قيم $m$ + هذا النوع من المناقشة يقبل على الأقل حل واحد + المناقشة $f(x)=f(m)+a$ : $f(x)-a=f(m)$

نسحب $(\mathcal{C}_f)$ بشعاع $\vec{v}(\beta\ ; \alpha)$ ونناقش كما سبق

← مناقشة مماثلة $f(x)=ax+m$ ، تتعلق بالوضعية ، مستقيم مقارب مائل ...

← مناقشة دوالية $f(x)=mx+b$ ، أشكالها :

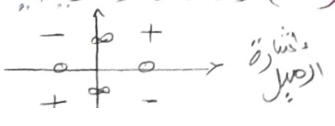
/ ، $y=mx+mB$ / $y=mx+B$

$y=mx+m+B$

لإيجاد النقطة الصامدة (الثابتة) : $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ ← $(x_0\ ; y_0)$

← في المناقشة الدوالية القيمة المطلقة تتعلق بعامل التوجيه وليس بنقط التقاطع

ملاحظات : حل وحيد معناه المستقيم يقطع المنحنى مرة واحدة ومن أجل كل قيمة $m$ نجد حل مختلف ونقول حل مضاعف (حل واحد) إذا كان المستقيم يمس المنحنى في نقطة




الحلول لا تتغير ، قيم $m$ ومجالاتها هي التي تتغير + يجب مراعاة المجالات إذا كانت مفتوحة أو مغلقة

## الدالة اللوغاريتم العشري log : معرفة على المجال $]0;+\infty[$

بـ $\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$

الخواص $\log(a.b)=\log a+\log b$ | $\log(\frac{1}{a})=-\log a$

$\log(\frac{a}{b})=\log a-\log b$ | $\log a^n=n\log a$

$\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a$ | $\log 10^n=n$ | $\log 10=1$

$\log a=\log b \Leftrightarrow a=b$ | $\log 1=0$ | $a<b \Leftrightarrow \log a<\log b$

الدالة المشتقة : الدالة log قابلة للإشتقاق :

$(\log x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot \ln 10}{\ln(10)^2}=\boxed{\frac{1}{x\ln 10}}$

لدينا $x>0$ ، $\ln 10>0$ أي $(\log x)'>0$ منه الدالة log متزايدة على $]0;+\infty[$

ملاحظة : بما أن الدالة log متزايدة :

$10^n<x<10^{n+1}$

منه $n<\log x<n+1$

التمثيل البياني يشبه تمثيل الدالة ln .

النهايات :

$\lim\limits_{x\to 0} \log x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln 10}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln 10}=+\infty$

## الدالة الجذر النوني :

الجذر النوني لعدد حقيقي في المجال $[0;+\infty[$ :

المعادلة $x^n=a$ تقبل حل وحيد $b$ في المجال $[0;+\infty[$ $n\geq 2$ ، $a>0$

يسمى الحل الجذر النوني للعدد $a$ ونرمز له بـ : $b=\sqrt[n]{a}$

الدالة جذر النوني : معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt[n]{x}$

خواصها : $(\sqrt[n]{a})^n=a$ / $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ / $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

← لدراسة الدالة الجذر النوني $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln x}$

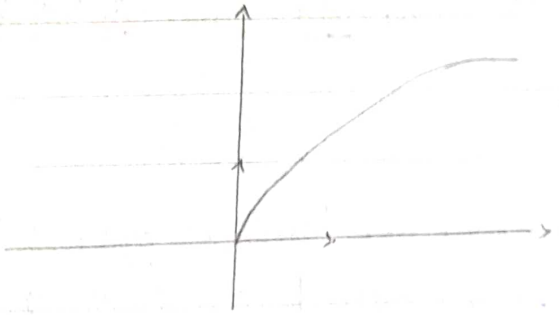
المشتق : الدالة $\sqrt[n]{x}$ قابلة للإشتقاق : $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$f'(x) > 0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

النهايات: $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{n}\ln x} = 0$ / $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x} = +\infty$

التمثيل:



الدالة الأسية ذات الأساس $a$: الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = a^x$ حيث $a > 0$ ولدينا:

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a} = x \ln a$$

الخواص:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad / \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^n = a^{x \cdot n} \quad / \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad / \quad \ln a^x = x \ln a$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

دراسة الدالة $a^x$ $(a > 0)$: $f'(x) = \ln a \, e^{x \ln a}$

$e^{x \ln a} > 0$ ، وإشارة $\ln a$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln a$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

الحالة 1: $0 < a < 1$ $(\ln a < 0)$

النهايات: $\lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$ / $\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = 0$

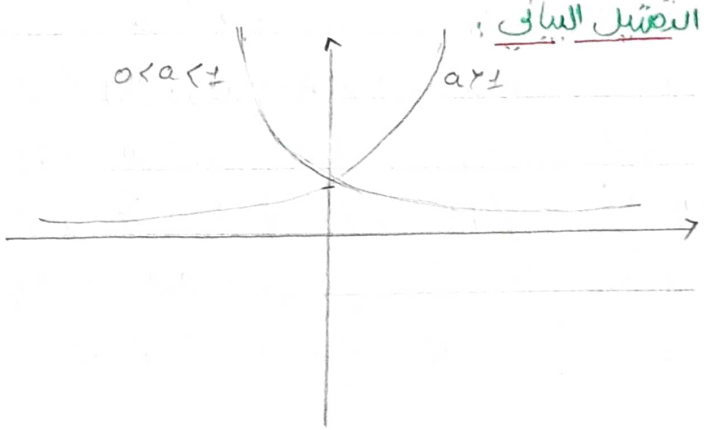
$f'(x) < 0$ لأن $\ln a < 0$ ومنه $f$ متناقصة تماما

الحالة 2: $a > 1$

النهايات: $\lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$ / $\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$

$f'(x) > 0$ لأن $\ln a > 0$ ومنه $f$ متزايدة تماما

التمثيل البياني:



## تركيب الدوال :

### اشتقاق تغيرات دالة مركبة :

$g(x) = f(u(x))$

$u(x)$ دالة مرجعية : $\sqrt{x}$ / $\frac{1}{x}$ / $x^2$ / $ax+b$ ...

$f(x)$ دالة درسنا من قبل (كلهم جدول تغيراتها)

$g(x)$ دالة جديدة مركبة

**الحالة 01** : الدالة المقلوب $u(x) = \frac{1}{x}$ :

$g(x) = f(\frac{1}{x})$

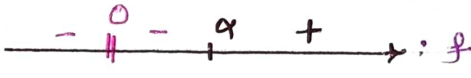
إشارة $g'(x)$ :

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(\frac{1}{x})$ فقط لأن $-\frac{1}{x^2} < 0$

يجب مراعاة الشرط $x \neq 0$

إشارة $f'(a)$ :




$f'(x) < 0$ ؛ $0 < x < a$ ، $0 < x < a$

منه $f'(\frac{1}{x}) < 0$ ؛ $\begin{cases} 0 < x \to \frac{1}{x} > 0 \\ x < a \to \frac{1}{x} > a \end{cases}$

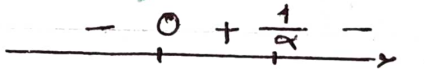
$x > \frac{1}{a}$

$f'(x) > 0$ ؛ $x > 0$

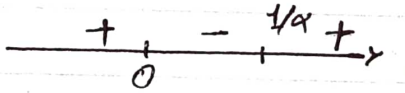
منه $f'(\frac{1}{x}) > 0$ ؛ $\begin{cases} x > 0 \to \frac{1}{x} > 0 \\ x < a \to \frac{1}{x} > a \end{cases}$

$0 < x < \frac{1}{a}$

إشارة $f'(\frac{1}{x})$




إشارة $g'(x)$



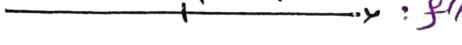

**الحالة 02** : الدالة مربع $u(x) = x^2$ :

$g(x) = f(x^2)$

إشارة $g'(x)$ :

$g'(x) = 2x f'(x^2)$

إشارة $f(x)$ :




$f'(x) > 0$ ؛ $x > a$

منه $f'(x^2) > 0$ ؛ $x^2 > a$

$|x| > \sqrt{a}$

$x > \sqrt{a}$ ، $-x > \sqrt{a} \to x < -\sqrt{a}$

---

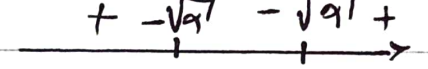
$f(x) > 0$ ؛ $x > a$

منه : $f'(x^2) > 0$ ، $x^2 > 0$

$|x| > \sqrt{a}$

$x > \sqrt{a}$ ، $-x > \sqrt{a} \to x < -\sqrt{a}$

إشارة $f(x^2)$




إشارة $g'(x)$ :

| | $-\sqrt{a}$ | | $0$ | | $\sqrt{a}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | − | | + | | |
| $f'(x^2)$ | + | | − | − | | + |
| $g'(x)$ | − | + | 0 | − | | + |

# المتتاليات :

تعريف : نسمي متتالية $(U_n)$ كل دالة معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ بحيث $U_n$ هو العدد الذي دليله $n$ (العدد العام) ، ونرمز أولى من المتتاليات ؛ متتالية معرفة بالعدد العام (متتالية صريحة) $U_n = f(n)$ و متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$

ملاحظة : يمكن أن تُعرَّف المتتالية بدالة معرفة، بحيث اتجاه تغير الدالة المعرفة ليس بالضرورة هو اتجاه تغير المتتالية

البرهان (الاستدلال) بالتراجع : يستخدم لإثبات خاصية تتعلق بالأعداد الطبيعية ، خطواته :

- التهيئة : نرمز بـ $P(n)$ الخاصية المراد البرهان عليها (فرضية التراجع)
- بيان أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل العدد الأول $p$
- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

وعند حساب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة

اتجاه التغير : حسب الطرق التالية :

- حساب الفرق $U_{n+1} - U_n$ :
  - $U_{n+1} - U_n > 0$ ؛ $(U_n)$ متزايدة تماما
  - $U_{n+1} - U_n < 0$ ؛ $(U_n)$ متناقصة تماما
  - $U_{n+1} - U_n = 0$ ؛ $(U_n)$ ثابتة
- يجب أن تكون حدود المتتالية $(U_n)$ موجبة وتحسب النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ :
  - $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ ؛ $(U_n)$ متزايدة تماما
  - $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ؛ $(U_n)$ متناقصة تماما
  - $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ؛ $(U_n)$ ثابتة

- الدالة المرفقة بالمتتالية $(U_n)$ متزايدة وتحسب الفرق :
  - $U_1 - U_0 > 0$ ؛ $(U_n)$ متزايدة تماما
  - $U_1 - U_0 < 0$ ؛ $(U_n)$ متناقصة تماما — $U_{n+1} \neq U_n$
  - $U_1 - U_0 = 0$ ؛ $(U_n)$ ثابتة

محدودية المتتالية :

- $U_n \geq A$ ؛ $(U_n)$ محدودة من الأسفل، من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$
- $U_n \leq B$ ؛ $(U_n)$ محدودة من الأعلى، من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$
- $A \leq U_n \leq B$ ؛ $(U_n)$ محدودة من الأعلى والأسفل

تقارب وتباعد متتاليات :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$ فإن $(U_n)$ متقاربة
- إذا كانت $(U_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فإن $(U_n)$ متقاربة وإذا كانت $(U_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن $(U_n)$ متقاربة
- إذا كانت $\lim U_n = +\infty$ أو $\lim U_n = -\infty$ أو $\lim U_n$ غير موجودة فإن $(U_n)$ متباعدة.

- هندسيا، تقارب المتتالية المعرفة بعلاقة تراجعية هي فاصلة نقطة تقاطع المنحنى الممثل للدالة المرفقة مع المنصف الأول.

حساب نهاية متتالية :

- $U_n = f(n)$ ؛ نحسب النهاية باستخدام القواعد المعروفة
- $U_{n+1} = f(U_n)$ إذا كانت $(U_n)$ متقاربة نحو $\ell$ فإننا نحل المعادلة $f(\ell) = \ell$ أحيانا المعادلة $f(\ell) = \ell$ تقبل أكثر من حل وبالتالي يجب رفض كل الحلول ماعدا حل واحد فقط ويكون سبب الرفض إما المجال الذي تنتمي إليه حدود المتتالية أو اتجاه تغيرها

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 1 ; -1 < q \leq 1 \\ +\infty ; q > 1 \\ \text{غير موجودة} ; q \leq -1 \end{cases}$$

تمثيل حدود متتالية على محور الفواصل : مراحل الرسم :

1- كتابة الدالة المرفقة بالمتتالية المعرفة بالعلاقة

التراجعية و دراسة تغيراتها إذا كانت تتجاذب لدراسة
ـ رسم منحنى الدالة العرفقة ومنصف المنصف ($y=x$)
كيفية تمثيل الحدود: إسقاط عموديا من قيمة
الحد الأول ($U_0$ على محور الفواصل) إلى منحنى الدالة
العرفقة ثم أفقيا إلى المنصف الأول فإسقاط على
محور الفواصل للتحصل على الحد الثاني وهكذا ...

المتاليتان المتجاورتين: نقول عن المتاليتان $(U_n)$
و $(V_n)$ متجاورتين إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى
متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$، المتاليتان
المتجاورتين متقاربتان و $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n$

المتالية الحسابية: المتالية $(U_n)$ حسابية
أساسها $r$ يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$:
$U_{n+1} = U_n + r$ (علاقة تراجعية)
$U_n = U_p + (n-p)r$ (عبارة الحد العام)
الوسط الحسابي: $a, b, c$ ثلاث حدود متتابعة
$2b = a + c$
مجموع حدود متتابعة:
$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = \frac{n-p+1}{2}(U_p + U_n)$
$U_p$ الحد الأول
اتجاه التغير:
$r = 0$ فإن $(U_n)$ ثابتة
$r > 0$ فإن $(U_n)$ متزايدة تماما
$r < 0$ فإن $(U_n)$ متناقصة تماما

المتالية الهندسية: المتالية $(U_n)$ هندسية أساسها
$q$ يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$:
$U_{n+1} = U_n \times q$ (علاقة تراجعية)
$U_n = U_p \times q^{n-p}$ (عبارة الحد العام)
الوسط الهندسي: هو بين استعمالاته حل معادلتين،
$a, b, c$ ثلاث حدود متتابعة: $b^2 = a \times c$
مجموع حدود متتابعة:
$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1-q}$

اتجاه التغير: $q = 1$ فإن $(U_n)$ ثابتة
$q < 0$ فإن $(U_n)$ ليست رتيبة
$q > 0$ و $q \neq 1$:
$U_0 \times (q-1) > 0$ المتالية متزايدة تماما
$U_0 \times (q-1) < 0$ المتالية متناقصة تماما
ملاحظة: رتبة الحد = دليل الحد إذا كان الحد الأول $U_1$
رتبة الحد = دليل الحد + 1 إذا كان الحد الأول $U_0$
عدد الحدود = $n - p + 1$ : الدليل الأخير - (الدليل الأول + 1)
خواص ونتائج:
إذا كانت $(U_n)$ هندسية أحدودية تماما أساسها $q$ فإن
$\ln(U_n)$ متالية حسابية أساسها $\ln q = r$.
إذا كانت $(U_n)$ حسابية أساسها $r$ فإن $e^{U_n}$ متالية
هندسية أساسها $q = e^r$
$a + a + \dots + a = a(n+1)$ حيث $a$ مكررة $n+1$ مرة
$a \times a \times a = a^{n+1}$ حيث $a$ مكررة $n+1$ مرة
$a^0 \times a^1 \times a^2 \times \dots \times a^n = a^{0+1+\dots+n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$
$(U_n)$ و $(V_n)$ متاليتان هندسيتان أساسهما $q_1$ و $q_2$
على الترتيب وحدهما $U_0$ و $V_0$ $(V_n \neq 0)$
$\left(\frac{1}{V_n}\right)$ متالية هندسية أساسها $\frac{1}{q_2}$ وحدها الأول $\frac{1}{V_0}$
$\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ متالية هندسية أساسها $\frac{q_1}{q_2}$ وحدها $\frac{U_0}{V_0}$
$(U_n \cdot V_n)$ متالية هندسية أساسها $q_1 q_2$ وحدها $U_0 V_0$

# الإحتمالات :

## لغة الإحتمالات :

- نقول عن تجربة أنها عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة جميع إمكانياتها
- نرمز لمجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية بـ $\Omega$ ونسميها مجموعة الإمكانيات (الممكنات) أو المجموعة الشاملة
- كل عنصر من $\Omega$ يسمى إمكانية وكل جزء منها يسمى حادثة (حدث)
- إذا كان $A$ و $B$ حادثتان و $\omega$ إمكانية من $\Omega$

1. $A=\Omega$ معناه $A$ هي الحادثة اليقينية
2. $A=\emptyset$ ؛ $A$ هي الحادثة المستحيلة
3. $A=\omega$ ؛ $A$ حادثة أولية
4. $C=A\cap B$ ؛ $C$ هي تقاطع الحادثتين $A$ و $B$ (الحادثة $A$ و $B$ ، $\cap$ ← و ، $X$)
5. $C=A\cup B$ ؛ $C$ هي اتحاد الحادثتين $A$ أو $B$ (الحادثة $A$ أو $B$ ، $\cup$ ← أو ، $+$)
6. $B=\bar{A}$ $(B=\Omega-A)$ ؛ $B$ هي الحادثة العكسية لـ $A$
7. $A\cap B=\emptyset$ ؛ الحادثتين $A$ و $B$ غير ممكنتين (لا يتحققان في آن واحد)

## قانون الإحتمال :

$\Omega=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، $P$ دالة ترفق كل عنصر $x_i$ من $\Omega$ ، عددا حقيقيا موجبا $p_i$ ، نقول $P$ قانون إحتمال إذا كان : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- عندما يكون لجميع الحوادث الأولية لتجربة عشوائية نفس الإحتمال نقول التجربة أنها متساوية الإحتمال و $P$ قانون إحتمال متساوي التوزيع

ويكون احتمال حادثة : $P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

- عبارات تدل على تساوي الإحتمال: قطعة (نقد أو نرد) غير مزيفة ، تسحب عشوائيا ، كريات لا نفرق بينها باللمس ، نقود متوازنة ...

خواص : $(\Omega, P)$ فضاء إحتمالي ، $A$ و $B$ حادثتان :

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset)=0$ ، $P(\Omega)=1$
- $P(A)+P(\bar{A})=1$ أي $P(\bar{A})=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- $A\subset B$ فإن : $P(A)\leq P(B)$
- $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ / $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

## المتغير العشوائي :

لتكن $\Omega$ المجموعة الشاملة ، نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة عددية معرفة على $\Omega$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$

## قانون احتمال متغير عشوائي :

هو الدالة المعرفة على $I$ (مجموعة قيم $X$) والتي ترفق بكل قيمة $x_i$ من $I$ العدد $P(X=x_i)$

| $x_i$ | | | المجموع |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | | | 1 |

## الأمل الرياضياتي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

إذا كان $E(X)=0$ نقول عن اللعبة عادلة

## التباين :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$
$$= E(X^2)-(E(X))^2$$

## الإنحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

## طرق العد :

القائمة : عدد القوائم ذات $p$ عنصرا من مجموعة ذات $n$ عنصر $n^p$ ، يمكن ملاحظة أن $p$ يمكن أن يكون أكبر من $n$ وهذا يدل على جواز التكرار

العاملي : $n!=n\times(n-1)\times\dots\times2\times1$

مثلا : $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ ؛ $0!=1$ / $1!=1$

الترتيبة : ويرمز لعدد الترتيبات ذات $p$ عنصرا من مجموعة ذات $n$ عنصرا بالرمز $A_n^p$ حيث :

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

هندسة متمايزة مثنى مثنى = عدم جواز التكرار أي $P \leq n$

ملاحظة: $A_i^1 = 1$ و $A_i^0 = 1$

التوفيقة: تدعى عدد التوفيقات ذات $p$ عنصر من مجموعة ذات $n$ عنصرا بالرمز $C_n^p$ حيث $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $p \leq n$

ملاحظة: $C_n^1 = n$ / $C_n^n = C_n^0 = 1$ / $C_{n-1}^{n-1} = n$

التبديلة: عدد التبديلات هو $A_n^n = n!$

عدد التبديلات مع التكرار = معامل الترتيب

معامل الترتيب: نستعمل معامل الترتيب في حالات السحب على التوالي (قائمة وترتيب) وحالة كون الكرات مختلفة في اللون أو مختلفة الأعداد.

نقوم بسحب $p$ عنصر على التوالي، نرمز لتكرار كل عنصر $X_n$ حيث يكون معامل الترتيب: $\alpha = \frac{p!}{X_1! \cdot X_2! \cdots X_n!}$

طرق العد:

| | تشكيل أعداد | تشكيل لجان | يوجد من كليهما | محصورات |
|---|---|---|---|---|
| قائمة | الأرقام يمكن أن تتكرر وترتيب مهم | // | على التوالي مع الإرجاع | // |
| ترتيبة | الأرقام لا تتكرر وترتيب مهم | المهام محدودة | على التوالي دون إرجاع | // |
| توفيقة | لا يوجد تكرار وترتيب غير مهم | المهام غير محدودة | في آن واحد | أجزاء مجموعة |

كيفية استعمال الآلة الحاسبة:

- زر ! X مقصود به التعاملي نصل إليه بواسطة Shift
- لحساب $C_5^2$ مثلا: نضغط على 5 ثم nCr ثم 2
- لحساب $A_5^2$ نضغط على 5 ثم Shift ثم nPr ثم 2
- الكتابة كسر غير قابل للاختزال بالآلة الحاسبة نضغط على abc

قانون الاحتمالات الكلية: لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث احتمالها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة $E$ لدينا من أجل كل حادثة $B$:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$

مع $P(A_1 \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B)$.

الحوادث المستقلة: $A$ و $B$ حادثتان مستقلتان إذا كان تحقق أحدهما لا يغير من احتمال تحقق الآخر، حيث:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ / $P_B(A) = P(A)$ / $P_A(B) = P(B)$

الاحتمال الشرطي: نسمي احتمال $B$ علما أن $A$ محققة وحيد تساوي الاحتمال العدد $P_A(B)$ حيث:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(\frac{B}{A}) = \frac{\text{عدد عناصر المجموعة } A \cap B}{\text{عدد عناصر المجموعة } A}$

دستور ذات الحدين: $n \geq 1$ و $p \in \mathbb{N}$

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

ملاحظات:

$P(A \cap B) = P(A \cup B) - [P(A) + P(B)]$

$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(B)$

- زوجي + زوجي = زوجي | فردي × فردي = فردي
- فردي + زوجي = فردي | فردي × زوجي = زوجي
- زوجي + زوجي = زوجي | زوجي × زوجي = زوجي

العدد الأولي هو العدد الذي يقبل القسمة على نفسه وعلى 1 فقط (0 و 1 غير أوليان و 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي)

الأعداد الأولية: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23.

لمعرفة إذا كان العدد $n$ أولي نحسب $\sqrt{n}$ إذا كان $n$ مربع تام فإن $n$ غير أولي، إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم $n$ على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب. إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقول أن $n$ أولي.

## العدد المركب

**تعاريف:** نسمي عددا مركبا $z$ كل عدد يكتب من الشكل $z=x+iy$ حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان، و $i$ تخيلي يحقق $i^2=-1$. نسمي $x$ الجزء الحقيقي لـ $z$ ونرمز $x=Re(z)$ ويسمى $y$ الجزء التخيلي لـ $z$ ونرمز $y=Im(z)$، الشكل $z=x+iy$ يسمى الشكل الجبري للعدد المركب $z$.

- إذا كان $y=0$ يصبح $z=x$ ونقول أن $z$ حقيقي
- إذا كان $x=0$ يصبح $z=iy$ ونقول أن $z$ تخيلي صرف
- العدد 0 يعتبر حقيقيا وتخيليا صرفا في آن واحد.
- إذا كانت $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ أعداد حقيقية، لدينا:

$\alpha+i\beta=0$ معناه $(\alpha=0$ و $\beta=0)$ ✓

$\alpha+i\beta=\alpha'+i\beta'$ معناه $(\alpha=\alpha'$ و $\beta=\beta')$ ✓

- يمثل العدد المركب في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ بالنقطة $M(x,y)$ و بالشعاع $\overrightarrow{OM}(x,y)$ ؛ يسمى كل من $M$ و $\overrightarrow{OM}$ صورة العدد المركب $z$، ونسمي $z$ لاحقة كل من النقطة $M$ و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- مرافق العدد المركب $z=x+iy$ هو العدد المركب $\bar{z}=x-iy$
- طويلة العدد المركب $z=x+iy$ هي المقدار الموجب الذي نرمز إليه $|z|$ وتمثل البعد بين المبدأ وصورة العدد المركب وتعرف بـ: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
- المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ و $z$ عدد مركب غير معدوم صورته $M$، نسمي عمدة للعدد المركب $z$ كل قيس $\theta$ بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ ونكتب: $\arg(z)=\theta+2k\pi$ ; $k\in\mathbb{Z}$ ; $\begin{cases}\cos\theta=x/r\\ \sin\theta=y/r\end{cases}$
- خواص المرافق، الطويلة والعمدة:

| الخاصة | الطويلة | العمدة |
|---|---|---|
| $\overline{\bar{z}}=z$ | $\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$ | $\arg(-z)=\pi+\arg(z)$ |
| $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$ | $\lvert-z\rvert=\lvert z\rvert$ | $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ |
| $\overline{z_1-z_2}=\bar{z_1}-\bar{z_2}$ | $\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\cdot\lvert z'\rvert$ | $\arg(1/z)=-\arg(z)$ |
| $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$ | $\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$ | $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$ |
| $\overline{z_1/z_2}=\bar{z_1}/\bar{z_2}$ | $\lvert z/z'\rvert=\lvert z\rvert/\lvert z'\rvert$ | $\arg(z_1/z_2)=\arg z_1-\arg z_2$ |
| $\overline{k\cdot z}=k\cdot\bar{z}$ | $\lvert 1/z\rvert=1/\lvert z\rvert$ | $\arg(z^n)=n\arg z+2k\pi$ |
| $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ | $z\cdot\bar{z}=\lvert z\rvert^2$ | |
| $z+\bar{z}=2x$ | $\lvert z+z'\rvert\neq\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$ | |
| $z-\bar{z}=2iy$ | | |

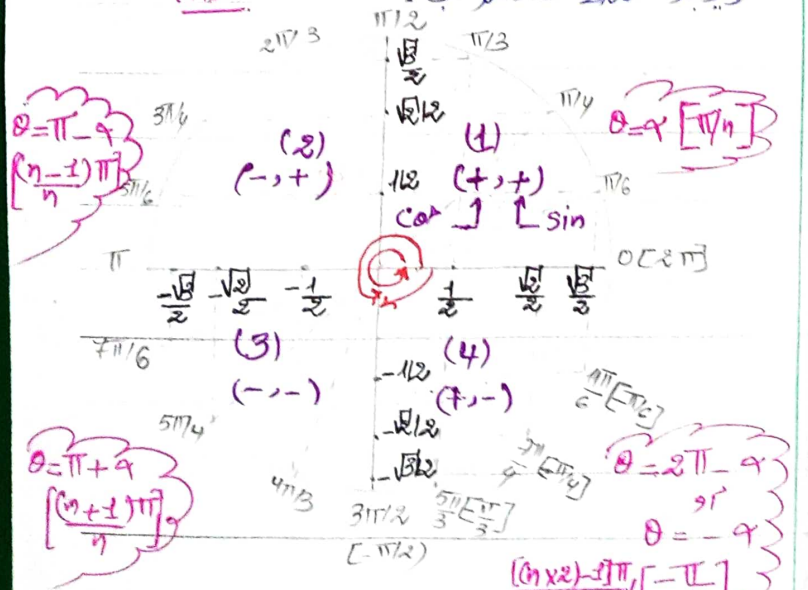
**ملاحظة:**

✓ $z$ حقيقي معناه: طويلته هي القيمة المطلقة له.

$z>0$ يعني $\arg(z)=0$ / $z<0$ معناه $\arg(z)=\pi$ مع $z=\bar{z}$

✓ $z$ تخيلي صرف معناه: طويلته هي القيمة المطلقة لجزئه التخيلي و $\arg(z)=\pi/2$ إذا كان جزؤه التخيلي موجب تماما و $\arg(z)=-\pi/2$ إذا كان جزؤه التخيلي سالب تماما و $\bar{z}=-z$

✓ لإيجاد عمدة عدد مركب:




✓ الشعاع المعدوم ليس له عمدة

← الشكل المثلثي لعدد مركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

← الشكل الأسي لعدد مركب $z = re^{i\theta}$

← للتحويل من الشكل الأسي إلى الشكل الجبري :

| الشكل الأسي | الشكل الجبري |
|---|---|
| $ke^{2\pi i}$ | $k$ |
| $ke^{-\pi i}$ | $-k$ |
| $ke^{\pi/2\, i}$ | $ki$ |
| $ke^{-\pi/2\, i} = ke^{\frac{3\pi}{2} i}$ | $-ki$ |

← للتحويل إلى الشكل المثلثي (علاقات مهمة) :

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ / $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$-\sin\alpha = \sin(\pi + \alpha)$ / $-\cos\alpha = \cos(\pi + \alpha)$

$-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$ / $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ / $-\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

← خواص الشكل الأسي (دستور أولر) :

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ / $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

← دستور موافر

$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{n\theta i} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

تعيين الأعداد الطبيعية $n$ بحيث $z^n$ عدد مركب خاص :

$z^n$ حقيقي معناه $n\theta = k\pi$

$z^n$ حقيقي موجب معناه $n\theta = (2k)\pi$

$z^n$ حقيقي سالب معناه $n\theta = (2k+1)\pi$

$z^n$ تخيلي صرف معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$z^n$ تخيلي صرف موجب معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$z^n$ تخيلي صرف سالب معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

**العمليات في الأعداد المركبة** : ليكن العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ حيث $z_1 = \alpha + i\beta$ و $z_2 = \alpha' + i\beta'$ لدينا :

$z_1 + z_2 = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta')$

$z_1 \times z_2 = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \alpha'\beta)$

$z_1 \div z_2 = \frac{(\alpha + i\beta)(\alpha' - i\beta')}{(\alpha' + i\beta')(\alpha' - i\beta')} = \frac{(\alpha+i\beta)(\alpha'-i\beta')}{2(\alpha'+\beta')}$

## حل معادلات في $\mathbb{C}$ :

← المعادلات $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a, b, c$ أعداد حقيقية و $a \neq 0$ عدد حقيقي ، تقبل حلين مترافقين ($z_2 = \overline{z_1}$)

← إذا كتبت المعادلة من الشكل $z = x + yi$ و $z^2$ و $z$ عدد مركب فهي تقبل حلين متناظرين ($z_2 = -z_1$) حيث $z$ معلوم

نفرض أن $w$ هي جذر لـ $z$ حيث $w = \alpha + i\beta$

$$w^2 = z$$

$$w^2 = (\alpha + i\beta)^2 = (\alpha + i\beta)(\alpha + i\beta) = (\alpha^2 - \beta^2) + i(\alpha\beta + \alpha\beta)$$

↳ $x + iy = \alpha^2 - \beta^2 + i\,2\alpha\beta$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x = Re(z) \\ 2\alpha\beta = y = Im(z) \end{cases}$

$\begin{cases} |w|^2 = |z| / |w|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = |z| \end{cases}$

منه :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \quad \dots (1) \\ 2\alpha\beta = y \quad \dots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = |z| \quad \dots (3) \end{cases}$$

نقوم بجمع (1) و (3) طرف لطرف نتحصل على قيمة $\alpha$ ونعوضها في المعادلة (2) نجد قيمة $\beta$

← المعادلات الآتية من الدرجة الثانية حلها يعود لشكل المعادلة وصياغة الزمرين .

**الأعداد المركبة في الهندسة** : في المستوى المركب $(O, \vec{u}, \vec{v})$ :

← لاحقة الشعاع $\vec{OA}$ هي $z_A$

← لاحقة الشعاع $\vec{OB}$ هي $z_B$

← لاحقة الشعاع $\vec{AB}$ هي $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

التفسير الهندسي للأطوال :

← $|z_A| = OA$ ؛ $|z_B| = OB$ ؛ $|z_B - z_A| = AB$

← $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{OA}{OB}$ حيث $B \neq O$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ حيث $A \neq B$

## التأويل الهندسي للعمدة :

- $z_A \neq 0$ حيث $\arg(z_A) = (\vec{u}, \vec{OA})$
- $A \neq B$ حيث $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \vec{AB})$
- $A \neq O$ و $B \neq O$ حيث $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\vec{OA}, \vec{OB})$
- $A \neq B$ و $A \neq C$ حيث $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})$

## تأويل النقط :

- إذا كان $r > 0$ تكون $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $O$ و نصف القطر $r$
- إذا كان $r > 0$ تكون $|z_B - z_W| = |z_C - z_W| = |z_D - z_W| = |z_A - z_W| = r$ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $W$ و نصف القطر $r$

## استقامية ثلاث نقط و توازي مستقيمين :

- إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ و $A \neq B$ تكون النقط $A$ ، $B$ ، $C$ على استقامة
لأن : $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ و $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$

## تعامد مستقيمين :

- إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy$ حيث $A \neq C$ و $B \neq D$
نستنتج أن $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ لأن : $\arg(iy) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
أي : $(\vec{AC}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

## ملاحظات هندسية :

- لاحقة $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي :
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$
- لاحقة النقطة $H$ مركز ثقل المثلث $ABC$ :
$$z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$
- لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad ; \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

- الدائرة المحيطة بالمثلث القائم يكون الوتر قطرا لهذه الدائرة ومنه مركزها هو منتصف الوتر ونصف قطرها هو طول الوتر على 2

- الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع ، مركز ثقل المثلث هو مركز الدائرة ونصف قطرها هو البعد بين المركز و أحد رؤوس المثلث

## طبيعة المثلث : (باستعمال التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)

- $ABC$ مثلث قائم في $A$ : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm\frac{\pi}{2}\right]$
- $ABC$ مثلث متساوي الساقين ، رأسه $A$ : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1, 0]$
- $ABC$ مثلث قائم في $A$ ومتساوي الساقين : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\frac{\pi}{2}\right]$
- $ABC$ مثلث متقايس الأضلاع : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\frac{\pi}{3}\right]$

## طبيعة الرباعي :

- يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا تحقق :
1- شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان أي : $\vec{AB} = \vec{DC}$ أي $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$ أي $z_B - z_A = z_C - z_D$
2- القطران متناصفان أي : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

- يكون الرباعي $ABCD$ مستطيل إذا تحقق :
1- شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان وضلعان متتابعان متعامدان أي : $\vec{AB} = \vec{DC}$ ، $\vec{AB} \perp \vec{AD}$
2- القطران متناصفان ومتقايسان أي : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ و $AC = BD$ أي $|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

- يكون الرباعي $ABCD$ معين إذا تحقق :
1- شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان وضلعان متتابعان متساويان أي : $\vec{AB} = \vec{DC}$ ، $AB = AD$
2- القطران متناصفان ومتعامدان : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ و $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

- يكون الرباعي $ABCD$ مربع إذا تحقق :

1- شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان و ضلعان متتابعان متساويان ومتعامدان إذن

$\vec{AB}=\vec{AD}$ ، $\vec{AB}\perp\vec{AD}$ ، $\vec{AB}=\vec{DC}$

ب- القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان إذن

$\vec{AC}=\vec{BD}$ ، $\vec{AC}\perp\vec{BD}$ ، $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$

ملاحظة :

تثبت التعامد باستعمال الجداء السلمي أو الأعداد المركبة

## التحويلات النقطية :

الكتابة المركبة للتحويلات النقطية في المستوى :

الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}}$ :

$z'=z+z_{\vec{u}}$

التحاكي الذي مركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega$ ونسبته $k$ :

$z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$ (حالة $k=-1$ فإن $z_\Omega=\frac{z'+z}{2}$ حالة خاصة)

الدوران الذي مركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega$ وزاويته $\theta$ :

$z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$

التشابه الذي مركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega$ وزاويته $\theta$

ونسبته $k$ : $z'-z_\Omega=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)$

صيغة التحويل انطلاقا من العبارة المركبة :

تشترك كل التحويلات النقطية في العبارة المركبة التالية $z'=az+b$ بحيث $F$ تحويل نقطي من المستوى يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث إذا كان :

- $a=1$ فالتحويل هو انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}}=b$
- $a\neq1$ ، $a\in\mathbb{R}^*$ فإن $F$ هو تحاكي نسبته $a$ ومركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$
- $a\neq1$ ، $a\in\mathbb{C}^*$ ، $|a|=1$ فإن $F$ دوران زاويته $\arg(a)$ ومركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$
- $a\neq1$ ، $a\in\mathbb{C}^*$ ، $|a|\neq1$ فإن $F$ تشابه مباشر نسبته $k=|a|$ وزاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ ($\Omega$ نقطة صامدة)

## مركب التحويلات :

- مركب انسحابات هو انسحاب شعاعه مجموع أشعتها
- مركب تحاكيات لها نفس المركز هو تحاك له نفس المركز ونسبته جداء النسب
- مركب دورانات لها نفس المركز هو دوران له نفس المركز وزاويته مجموع الزوايا
- مركب تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر له نفس المركز وزاويته مجموع الزوايا ونسبته جداء النسب
- مركب تحاكي مع دوران هو تشابه مباشر

## التقايسيات :

- الانسحاب والدوران تقايسيان وصورة شكل هندسي بتقايس هو شكل هندسي يقايسه طولا ومساحة
- التحاكي والتشابه المباشر ليسا تقايسيان :

✓ صورة دائرة بتحاك مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $r$ هي دائرة مركزها $\Omega'$ ونصف قطرها $r'$ حيث $r'=|k|.r$ و $\Omega'=h(\Omega)$

✓ صورة دائرة بتشابه مباشر مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $r$ هي دائرة مركزها $\Omega'$ ونصف قطرها $r'$ حيث $r'=k.r$ و $\Omega'=s(\Omega)$

✓ صورة مربع طول ضلعه $a$ بتشابه مباشر أو تحاك هو مربع طول ضلعه $k\times a$ أو $|k|\times a$ على الترتيب

✓ لتكن $S$ مساحة شكل هندسي و $S'$ مساحة صورته بتشابه مباشر أو تحاك، إذن لدينا $S'=k^2\times S$ .

إيجاد التحويل $F$ الذي يحول $A$ إلى $B$ و $C$ إلى $D$ :

نحل الجملة $\begin{cases}z_B=az_A+b\ (1)\\ z_D=az_C+b\ (2)\end{cases}$ بضرب (2) في $(-1)$ ونجمع نجد $a=\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}$

نعوض $a$ في 1 أو 2 نجد $b$.

إيجاد التحويل $F$ الذي يحول $A$ إلى $B$ ومركزه $C$ :

نحل الجملة : $\begin{cases}z_B=az_A+b\ (1)\\ z_C=az_C+b\ (2)\end{cases}$ بطرح طرف لطرف نجد : $a=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$

نعوض قيمة $a$ في 1 أو 2 لنجد $b$.

استنتاج من خلاله أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل :

إذا كان $a=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ فإن $z_B-z_A=a(z_C-z_A)$ أي $B$ صورة $C$ بالتحويل الذي مركزه $A$ (4)

## مجموعات النقط :

A ، B و M ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ و $z$ حيث $M \neq A$ و $M \neq B$

### مجموعات نقط تحقق خاصية :

**التفسير الهندسي للعمدة :**

$\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ (θ معلومة) ؛ مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A باستثناء A ، نكتب $(E) = [AB) - \{A\}$

$\arg = (z - z_A) = \theta + k\pi$ ؛ مجموعة النقط M هي مستقيم باستثناء A ، ميله $\tan\theta$ .

**الجداء السلمي (التذكير) :**

تذكرة : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\theta$

$\cos\theta = 0$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنه $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$A\vec{M}.\vec{K} = 0$ ؛ مجموعة النقط M هو المستقيم الذي يشمل A و الشعاع $\vec{K}$ ناظم له

**الارتباط الخطي :**

تذكرة : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = q\vec{v}$ ؛ $q \neq 0$

أي أنهما متوازيان ، باستعمال المميز نجد :

$A\vec{M} = qK$ ؛ مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل A حاملا $\vec{K}$ و $\vec{K}$ شعاع توجيه له .

**نسبة الأعداد المركبة :** $L = \frac{z_B - z}{z_A - z}$

L عدد حقيقي ، معناه $\arg L = (\vec{MA}, \vec{MB}) = k\pi$ ؛ مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) ماعدا النقطة A و B باستثناء $(AB) - \{A, B\}$

L حقيقي موجب ، معناه $\arg L = (\vec{MA}, \vec{MB}) = 2k\pi$ ؛ مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$ $(AB) - ]AB[$

L حقيقي سالب ، معناه $\arg L = (\vec{MA}, \vec{MB}) = \pi + 2k\pi$ ؛ مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

**المعادلة الوسطية لقطعة مستقيم :**

$z = z_A + ke^{i\theta}$ حيث k ينتمي (يمسح) في $\mathbb{R}$ و θ معلوم.

لدينا : $z = z_A + ke^{i\theta}$ ، $z - z_A = ke^{i\theta}$ ومنه $\vec{AM} = ke^{i\theta}$ أي $(\vec{u}, \vec{AM}) = \theta$ ؛ مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$

$z = z_A + ke^{i\theta}$ ، θ معلوم و k ينتمي في $\mathbb{R}^+$ ؛ مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$

**حالات أخرى :**

التفسير الهندسي للطويلة : $|z - z_A| = |z - z_B|$ ؛ مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

$|z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow MA = MB$ ، حيث

**مجموعات النقط التي تحقق دوائر :**

**الجداء السلمي :**

$A\vec{N}.B\vec{M} = 0$ ، معناه $A\vec{M} \perp B\vec{M}$ ؛ مجموعة النقط M هو محيط الدائرة التي قطرها $[AB]$

**نسبة الأعداد المركبة :** $L = \frac{z_B - z}{z_A - z}$

L عدد تخيلي صرف ، معناه $\arg L = (\vec{MA}, \vec{MB}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

حيث $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$ ؛ مجموعة النقط هي محيط الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

L تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب ، معناه : $\arg L = (\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ؛ مجموعة النقط M هي نصف محيط الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A و B في الأذرع الموجب للزوايا .

L تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب ، معناه : $\arg L = (\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ؛ مجموعة النقط M هي نصف محيط الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A و B في الإذعان السالب للزوايا .

التفسير الهندسي للطويلة:

$AM=K$ ، إذا كان $K=0$ مجموعة النقط هي $A$ ، إذا كان $K<0$ لا توجد مجموعة النقط ، إذا كان $K>0$ ، مجموعة النقط هي محيط الدائرة التي مركزها $A$ ونصف قطرها $K$

$AM \neq K$ ، إذا كان $AM>K$ ، مجموعة النقط $M$ هي كل المستوي ماعدا القرص المفتوح ذو المركز $A$ ونصف القطر $K$.

إذا كان $AM<K$ ، مجموعة النقط $M$ هي القرص المفتوح ذو المركز $A$ ونصف القطر $K$.

المعادلة الوسيطية لنصف مستقيم:

$z=z_A+ke^{i\theta}$ ، حيث $k$ عدد حقيقي موجب تماما ومعلوم و $\theta$ يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}$

لدينا: $z=z_A+ke^{i\theta}$ أي $|z-z_A|=|ke^{i\theta}|$ ومنه $AM=K$

مجموعة النقط $M$ هي الدائرة التي مركزها $A$ ونصف قطرها $K$.

استعمال المدرج لتحقيق إحدى العلاقات السابقة:

لدينا: $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\delta\overrightarrow{CM}$

علما أن $\alpha+\beta+\delta\neq 0$ يكون:

بإدخال نقطة المدرج $G$ نجد:

$$\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\delta\overrightarrow{CM}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}$$

التعميم: المدرج $XM$ مجموع المعاملات

إذا كان $\alpha+\beta+\delta=0$ فلا يوجد مدرج للنقط $A$ ، $B$ ، $C$ ويكون الشعاع $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\delta\overrightarrow{CM}$ شعاع ثابت مستقل عن $M$ ونبدأ تحويل وتبسيط العلاقة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال

لدينا: $\alpha MA^2+\beta MB^2+\delta MC^2$

بإدخال نقطة المدرج $G$ نجد:

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\delta MC^2=(\alpha+\beta+\delta)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\delta GC^2$$

التعميم: جعل مكان $M$ نقطة المدرج $+$ [المدرج $M$]$^2$ $\times$ مجموع المعاملات

حالات أخرى في مجموعات النقط:

حالة 1: لدينا $Re(z^2)=0$ حيث $(k\in\mathbb{R})$

معناه: $x^2-y^2=0$ أي $x^2=y^2$ ويكون: $y=x$ أو $y=-x$ ، مجموعة النقط $M$ هي اتحاد المستقيمين $y=x$ و $y=-x$

حالة 2: لدينا $Im(z^2)=0$ حيث $(k\in\mathbb{R})$

معناه $2xy=0$ يكافئ $xy=0$ أي $x=0$ أو $y=0$؛ مجموعة النقط هي اتحاد حاملي محور الفواصل والتراتيب

حالة 3: لدينا $Re(z)+Im(z)=k$ حيث $(k\in\mathbb{R})$ معناه: $x+y=k$ يكافئ $y=-x+k$ ، مجموعة النقط هي جميع المستقيمات التي ميلها $(-1)$ وتقاطع النقطة ذات الإحداثيات $(0;k)$.

أما إذا كان $k$ يمسح كل $\mathbb{R}$ فالمجموعة هي جميع نقط المستوي

## مرة في الرياضيات أعداد مركبة

### كيفية ايجاد قيس زاوية:

$$\frac{1111\pi}{4}$$

$1111 \mid 4$

$277,75$

$0,75 \times 4 = 3$

$1111 = 4(277) + 3$

$$\frac{1111\pi}{4} = \left[4(277)+3\right]\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4.277\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$$

$$= 277\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$277$ فردي

$$= 276\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}$$

$276$ زوجي

$$= \frac{7\pi}{4}$$

$$-\frac{1111\pi}{4}$$

$-0,75 \times 4 = -3$

$-1111 = 4(-277) - 3$

$$-\frac{1111\pi}{4} = \left[4(-277)-3\right]\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4(-277).\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$$

$$= -277\pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$= -276\pi - \pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$= -\pi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

## إنشاء النقط:

### إنشاء عدد مركب بطريقتين مختلفتين:

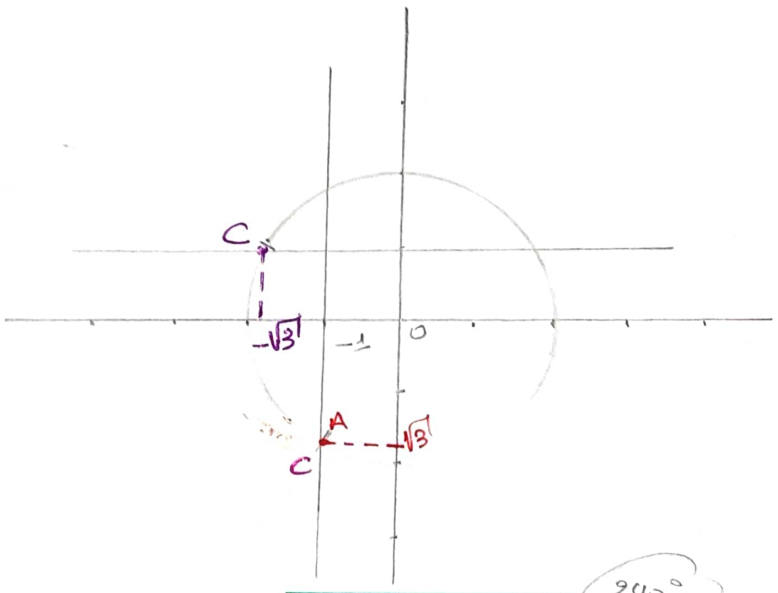
$$z_A = -1 - i\sqrt{3}$$

1) حساب طويلة $z$: $|z| = 2$

2) نرسم دائرة مبدؤها $O$ ونصف قطرها $r = |z|$.

3) نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\text{العدد الحقيقي}}{z}$.

4) نقطة تقاطع الدائرة مع المستقيم في الأذنب $A$ المناسب هي العدد المركب $z$




$$z_B = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

240°

$r = 2$

$$z_B = z_A + 2e^{-\frac{4\pi}{3}}$$

$A(0,0)$, $r = 2$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$

$$z_C = -\sqrt{3} + i$$

1) طويلة $z$: $|z| = 2$

2) دائرة مبدؤها $O$ ونصف قطرها $2$

3) رسم مستقيم ذو المعادلة $y = \frac{\text{عدد}}{\text{تخيلي}}$

$y = 1$

4) نقطة تقاطع الدائرة والمستقيم في الأذنب المناسب هي $-\overline{B}$

يمكن إنشاء عدد مركب مكتوب على الشكل الجبري أو الأسي بهذه الطريقة

## طرق وقواعد في الرياضيات :

قواعد القيمة المطلقة :

- لأن $x \in ]0,+\infty[$ ؛ $(\sqrt{x})^2 = x$
- لأن $x \in \mathbb{R}$ ؛ $\sqrt{x^2} = |x| \begin{cases} -x \\ +x \end{cases}$
- $|x^2| = x^2$ / $|\sqrt{x}| = \sqrt{x}$
- إذا كان $a>0$ ، $b>0$ ، $|x|<b$ يكون : $x \in ]-b,-a[\cup]a,b[$
- إذا كان $|x|>a$ يكون $x \in ]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$
- إذا كان $|x|<a$ يكون $x \in ]-a,a[$

طريقة احساب النهايات :

نزيل حالات عدم التعيين باستخدام النهايات المشهورة ، للوصول لـ الشكل العام للنهاية المشهورة نستخدم طرق منها : تبديل المتغير / استخراج عامل مشترك / تفكيك الكسر ، النشر / توحيد المقام / خواص مركز ومحور التناظر / مقلوب المقلوب / استعمال الخواص الجبرية

- لإزالة ح ع ت في الدالة الكسرية نختار شكل النهاية المشهورة بالنظر فوق c لـ ماذا يؤول.

استعمالات الخواص الجبرية : ← إزالة ح ع ت ← حل المعادلات ← الإشتقاق

- لا يجب تطبيق الخواص الجبرية لإيجاد مجموعة التعريف

ملاحظات وطرق :

$\sqrt{a}-b$ المرافق $\sqrt{a}+b$

$\sqrt{a}$ المرافق $\sqrt{a}$

$\begin{array}{c|c} A & B \\ D & C \end{array}$ القسمة الإقليدية $\longrightarrow \frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$

$\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$

- لا نشطب معرفة إشارة المجموع
- لا يمكن إختزال المقام في المتراجحات
- لما يكون أحد أطراف المتباينة العدد 0 لا نعكس الإشارة في المقلوب
- للتحليل يمكن : القسمة الإقليدية / النشر والمطابقة / خوارزمية هورنر
- المماس عند نقطة الإنطلاق لا يرسم
- لتعيين النهايات من البيان يجب الإستطراد محور التراتيب أو محور التراتيب = محور النهايات.
- لنزع القيمة المطلقة في الدالة : ندرس إشارة الدالة ونختار المجالات التي تكون فيها سالبة وموجبة ثم نعيد كتابة الدالة وفق كتابيف مع مراعاة مجال التعريف.
- عند دراسة إشارة عبارة لوغاريتمية أو أسية ونرجع في الأخير لـ عبارة أخرى وليس قيمة ثابتة نقوم بدراسة إشارة العبارة الجديدة في المجال المعطى أو المتراجحة.
- يجب الإنتباه لوحدة طول المستوي المعلم
- لرسم بيان دالة : نرسم المستقيمات المقاربة + نرسم نقط تقاطع المنحنى مع المحاور والقيم الحدية + نرسم المماسات للمنحنى إن وجدت ونرسم المماسات عند القيم الحدية + نشمل محورا ومركز التناظر إن وجد.
- مخطط في الاحتمالات والهندسة :
- متتالية معرفة بالحد العام (صريحة) : جارك الحد العام / الوسيط / المجاميع
- متتالية معرفة بعلاقة تراجعية : البرهان بالتراجع / اتجاه التغير + المحدودية / التقارب + والتباعد / تمثيل الحدود هندسيا / التجاور
- لحل جملة معادلتين ، نكتب أحد المجاهيل بدلالة الآخر :

$$\begin{cases} A \times B = \lambda \quad ...(1) \\ A + B = \tau \quad ...(2) \end{cases}$$

من (2) : $A = \tau - B$ ونعوض A في (1).