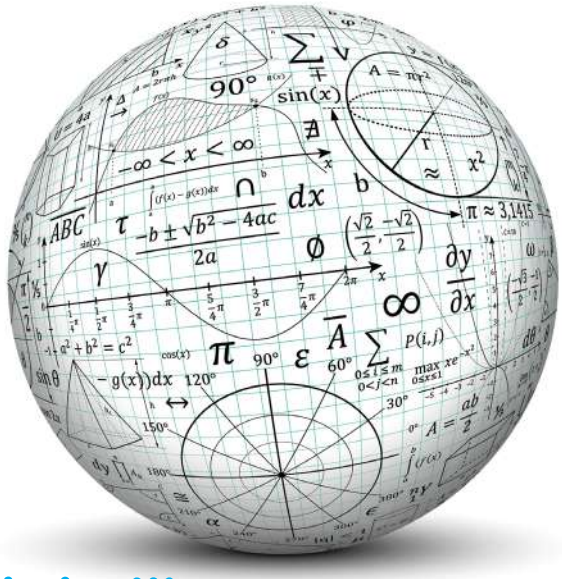


مجلة سوايسية في الإحتمالات

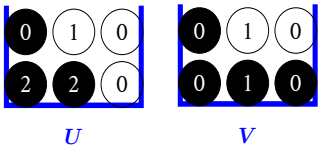
بكالوريا الشعب العلمية

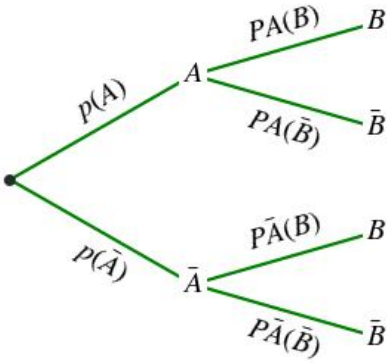
1. ملخص شامل للدرس
2. مسائل نموذجية مرفقة بالحل المفصل
3. حلول تمارين البكالوريا من 2018 الى 2024

شعبة علوم تجريبية + تقني + رياضيات









الأستاذ سوايسية هشام

بكالوريا 2025

الأستاذ سوايسية هشام للرياضيات

الأستاذ سوايسية هشام للرياضيات

prof_hicham_math

ملخص الإحتمالات





◄ تعريف التجربة العشوائية

هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة

◄ مجموعة الإمكانيات Ω

هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل الحادثة الأكيدة، مجموعة المخارج.

◄ الحادثة

✍ هي جزء من المجموعة Ω

- الحادثة الأولية (البسيطة) : تحتوي على عنصر وحيد .
- الحادثة الأكيدة : هي الحادثة التي تحتوي على جميع عناصر Ω
- الحادثة المستحيلة $\emptyset$: هي المجموعة الخالية.
- الحادثة العكسية $\overline{A}$: هي الحادثة التي تحوي جميع عناصر Ω ما عدا عناصر المجموعة A

◄ تقاطع وإتحاد حادثتين

✍ لتكن A و B حادثتين من Ω لدينا :

- $A \cup B$: هي العناصر المشتركة و الغير المشتركة بين A و B
- $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين A و B (بدون تكرار)
- A و B غير متلائمتين معناه $A \cap B = \varnothing$

◄ تساوي الإحتمال

- تجربة متساوية الإحتمال : هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث لها نفس الإحتمال
- مصطلحات تساوي الإحتمال : " زهرة نرد غير مزيفة "، " قطعة نقود غير مزيفة "، " كريات لا نفرق بينهما عند اللمس".

◄ إحتمال حادثة

إذا كانت A حادثة فإن $P(A)$ يرمز إلى إحتمال الحادثة A حيث :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

- $card(A)$ هو عدد عناصر المجموعة A .
- $card(\Omega)$ هو عدد عناصر المجموعة Ω

ملاحظة مهمة: حرف "و" في الإحتمالات معناه التقاطع $\cap$ و حرف "أو" معناه الإتحاد $\cup$.

◄ خواص الإحتمال

- من أجل كل حادثة A فإن $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- إحتمال الحادثة الأكيدة هو 1 أي $P(\Omega) = 1$
- إحتمال الحادثة المستحيلة هو 0 أي $P(\varnothing) = 0$
- إذا كانت $\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A فإن $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- إذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كان $A \subset B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

◄المتغير العشوائي X

هو دالة معرفة على $I = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ حيث والتي ترفق بكل قيمة x_i العدد الحقيقي الموجب $P(X = x_i)$ ، ونعرفه بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	...	P_n

- الأمل الرياضياتي $E(x)$: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

ملاحظة مهمة

✍ اذا كان $E(X)$ يمثل الربح المتوسط الذي يأمله

اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة فإن:

- ◄ $E(X) = 0$ اللعبة عادلة.
- ◄ $E(X) > 0$ اللعبة مربحة
- ◄ $E(X) < 0$ اللعبة ليست في صالح اللاعب

- التباين $V(x)$: $V(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - E(X))^2$ أو $V(x = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 P_i - (E(x))^2$

- الإنحراف المعياري $\sigma(x)$: $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

خواص : a و b عددان حقيقيان ، لدينا :

◄ $E(aX + b) = aE(X) + b$ ◄ $V(aX + b) = a^2 V(X)$ ◄ $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

◄ تمرين01 : يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء و 4 حمراء و 10 كريات سوداء لانفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح الساحب دينارا واحدا إذا كانت الكرية سوداء ويربح 3 دنانير إذا كانت حمراء و 10 دنانير إذا كانت الكرية بيضاء.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتملة في اللعبة.

1ـ عين القيم الممكنة للمتغير X .

2ـ عرف قانون الإحتمال للمتغير X .

3ـ أحسب الأمل والإنحراف المعياري.

الحل:

1ـ قيم X الممكنة هي $X = \{1, 3, 10\}$ حيث : $10D_A \to B$ ، $3D_A \to R$ ، $1D_A \to N$

2ـ قانون الإحتمال للمتغير X .

$$P(X = 10) = \frac{3}{17} \quad و \quad P(X = 3) = \frac{4}{17} \quad و \quad P(X = 1) = \frac{10}{17}$$

3ـحساب الأمل والإنحراف المعياري :

X_i	1	3	10
$P(X = X_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{17}}$

$$E(X) \sum_{i=1}^{n} X_i P_i = 1\left(\frac{10}{17}\right) + 3\left(\frac{4}{17}\right) + 10\left(\frac{3}{17}\right) = 3.06$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P_i = (1 - 3.06)^2 \times \frac{10}{17} + (3 - 3.06)^2 \times \frac{4}{17} + (10 - 3.06)^2 \times \frac{3}{17} = \frac{3178}{289}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{3178}{289}} = 3.32$$

◄ تمرين 02 :

الجدول التالي يعرف قانون إحتمال تجربة عشوائية

X_i	-2	-1	α	3
$P(X = X_i)$	0.12	0.5	β	**0.3**

1ـ عين قيمة α و β حتى يكون الأمل الرياضي يساوي $E(x) = 0.32$.

2ـ أحسب الإنحراف المعياري.

الحل:

1ـ تعيين قيمة β : نعلم أن : $0.12+0.5+\beta+0.3=1$ $\beta=0.08$

تعيين قيمة α : لدينا من جهة $E(x)=0.32$

ومن جهة أخرى $E(x)=-2(0.12)-1(0.5)+0.08(\alpha)+0.3(3)=0.32$

$=-0.24-0.5+0.08\,\alpha+0.9=0.32$

$0.08\,\alpha=0.16 \quad \Rightarrow \quad \alpha=2$

حساب التباين: $V(x)=0.64+0.87+0.02+2.15=3.69$

2ـ الإنحراف المعياري $\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{3.69}=1.92$

المبدأ الأساسي للعد

حدثين مختلفين الأول يتحقق بـ n طريقة مختلفة والثاني يتحقق بـ m طريقة مختلفة

مبدأ الجمع: الحدث الأول **أو** الثاني يتحقق بـ $n+m$ طريقة.

مبدأ الضرب: الحدث الأول **و** الثاني يتحقق بـ $n\times m$ طريقة.

العاملي : نعرف العدد الطبيعي $n!$ (يقرأ n عاملي) كمايلي : $0!=1$ و $1!=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n>1$

$$n!=n(n-1)(n-2)\times.....\times3\times2\times1$$

القوائم : E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n\geq1)$ و p عدد طبيعي $(p\geq1)$

نسمي قائمة ذات p عنصرا من E كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر E

و من أجل كل عدد طبيعي p $(p\geq1)$ عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي n^p

أمثلة

- عدد الطرق لتشكيل رقم سري يحتوي على 3 خانات من العناصر التالية: $\{2;3;5;9\}$ هو: $4^3=64$
- عدد الطرائق الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي مع الإرجاع من كيس به 8 كريات هو: $8^4=4096$

الترتيبات : نسمي القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى ترتيبة و يرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا

من بين n عنصرا بالرمز A_n^p و نكتب : $A_n^p=n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$

ملاحظة :

ـ يمكن كتابة العدد A_n^p بالشكل : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

أمثلة

1ـ عدد الأعداد ذات 5 أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام $1;2;3;4;5;6;7;8$: هو عدد الترتيبات ذات 5 عناصر من مجموعة ذات 8 عناصر أي : عددا $A_8^5 = 8\times7\times6\times5\times4 = \boxed{6720}$

2 ـ عدد الطرق لإختيار رئيس قسم و نائب له من قسم لـ20 تلميذ هو عدد الترتيبات ذات 2 عناصر من مجموعة ذات 22عنصر ، أي : $A_{20}^2 = 20\times19 = \boxed{380}$ طريقة .

3ـ عدد الطرق لجلوس 3 أشخاص داخل حافلة تحوي على 30 مقعدا هو : $A_{30}^3 = 30\times29\times28 = \boxed{24360}$

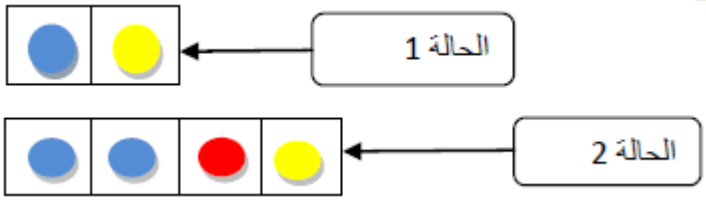
حالة خاصة : في حالة $n = p$، فان ترتيبة ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى **تبديلة** ذات n عنصرا .عدد التبديلات إذن هو $n(n-1)(n-2)\times....\times2\times1$ ويرمز له بالرمز $n!$

نتيجة

معامل الترتيب : يستعمل في أي حالة يكون فيها الترتيب مهم (قائمة أو ترتيبة) مثل سحب كرات على التوالي بالارجاع أو بدون ارجاع , تشكيل لجان مع تحديد المهام , تشكيل أرقام مختلفة أو ليست مختلفة.

حيث يحسب بالعلاقة : $\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times....\times n_p!}$

مثال : بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب الكرات في كل حالة



الحالة 1 : يوجد طريقتين هما



الحالة 2 : هنا تظهر أهمية معامل الترتيب يمكن حسابه مباشرة بتطبيق العلاقة لدينا



ومنه : $\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times....\times n_p!} = \dfrac{4!}{2!\times1!\times1!} = 12$ لدينا $4!$ لأن توجد أربع كرات . $2!$ لأن توجد كرتان من نفس اللون أي زرقاوين . $1!$ لأن توجد كرة حمراء فقط. $1!$ لأن توجد كرة صفراء فقط.

التوفيقات : E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي حيث $(n \geq P \geq 0)$

نسمي **توفيقة** ذات p عنصرا من عناصر E كل **جزء** من E ذي p عنصرا من عناصر E

ـ نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p

خواص :

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1 \; , C_n^1 = n$$

مبرهنة : من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

ملاحظات :

ـ بما أن : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ، فإن : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

أمثلة

1ـ أحسب الأعداد : C_5^2 ، C_7^3 .

2ـ عدد اللجان ذات 7 تلاميذ يمكن تشكيلها من قسم يحوي 20 تلميذ في تمثيلهم في منافسة بين الاقسام هو : $C_{20}^7 = \frac{20!}{7! \times 13!} = 77520$

3ـ عدد الطرق لسحب 3 كرات من كيس يحوي على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء هو : $C_9^3 = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84$

خواص : 1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$ لدينا : $C_n^p = C_n^{n-p}$

2) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n-1 \geq P \geq 1)$ لدينا : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

ملخص طرق العد :

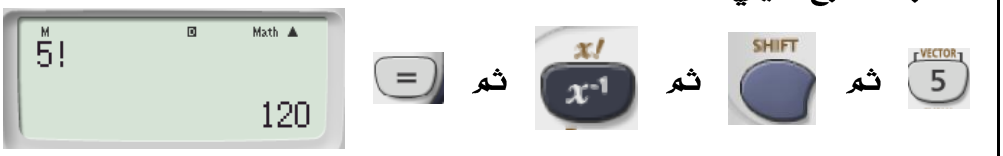
الطريقة/ المطلوب	تشكيل أعداد	تشكيل لجان	سحب من كيس	مجموعات
قائمة : n^p ترتيب العناصر مهم و التكرار ممكن	الأرقام يمكن أن تتكرر		على التوالي مع الإعادة	
ترتيبة: $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ترتيب العناصر مهم والتكرار غير ممكن	الأرقام لا تتكرر	المهام محددة	على التوالي دون إعادة	
توفيقة : $C_n^P = \frac{n!}{p!(n-p)!}$		المهام غير محددة	في آن واحد	أجزاء مجموعة

استعمال الحاسبة Casio والحاسبات المشابهة لها.

العاملي $n!$ يوجد رمز $x!$ نصل إليه بالضغط على  ثم 

◄ **مثال**

لحساب $5!$ نتبع ما يلي:



التوفيقة C_n^p يوجد رمز nCr نصل إليه بالضغط على  ثم 

◄ **مثال**

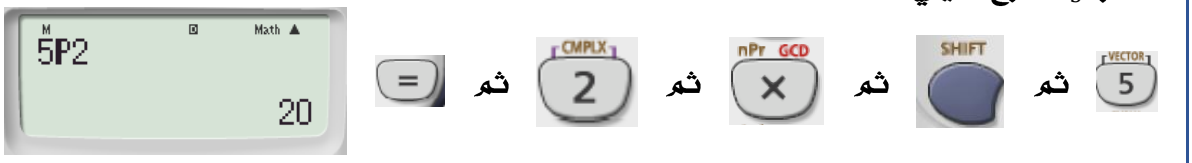
لحساب C_5^2 نتبع ما يلي:



الترتيبة A_n^p يوجد رمز nPr نصل إليه بالضغط على  ثم 

◄ **مثال**

لحساب A_5^2 نتبع ما يلي:



دستور ثنائي الحد

مبرهنة: من أجل كل عددين حقيقين a و b من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

مثال

$$\begin{aligned} Q(x) = (x-1)^4 &= \sum_{p=0}^{4} C_4^p (x)^{4-p} (1)^p \\ &= C_4^0 (x)^4 (-1)^0 + C_4^1 (x)^3 (-1)^1 + C_4^2 (x)^2 (-1)^2 + C_4^3 (x)^1 (-1)^3 + C_4^4 (x)^0 (-1)^4 \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

الاحتمال الشرطي :

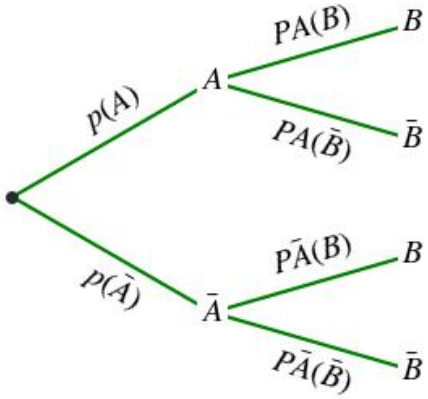
$P_A(B)$ تقرأ " احتمال B علما أن A محققة " وتعطى العبارة بـــ: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

اذا كانت الحادثتين A و B مستقلتان فإن: $P_A(B) = P(A)$ و $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

يجب قراءة نص السؤال جيدا وعدم الخلط بين $P(A \cap B)$ و $P_A(B)$

نستعين بالعبارات " علما أن " ، " اذا كان " في الاحتمال الشرطي

شجرة الاحتمالات



◄ تمرين 03 :

يحتوي صندوق على 6 كريات حمراء و3 خضراء لا نفرق بينها باللمس نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع.
لتكن الحادثة A " الكرة المسحوبة الأولى حمراء". والحادثة B " الكرة المسحوبة الثانية خضراء ".
أحسب $p(A)$ و $p_A(B)$ ثم $P(A \cap B)$.

الحل: نرمز بـ R كرة حمراء و V كرة خضراء.

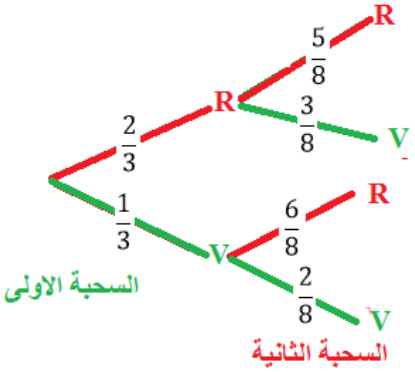
حساب $p(A)$: $p(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

حساب $p_A(B)$: $P_A(B) = P_R(V) = \frac{3}{8}$

إستنتاج $P(A \cap B)$: لدينا : $p_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

ومنه $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

$= \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



◄ تمرين 04 :

✍ في إحدى الدراسات الخاصة بتلاميذ ثانوية معينة وجدنا 30% يملكون هواتف نقالة من بينهم 18% يملكون آلات حاسبة علمية و 25% من التلاميذ لا يملكون آلات حاسبة علمية .

نختار عشوائيا تلميذ و نسمي الحوادث :

A : " الحادثة التلميذ يملك آلة حاسبة علمية "

B : " الحادثة التلميذ يملك هاتف نقال "

1 باستعمال شجرة الاحتمالات احسب : $P(\overline{A})$ و $P_B(A)$

2 احسب احتمال الحوادث التالية :

a التلميذ يملك هاتف نقال و آلة حاسبة علمية .

b التلميذ يملك هاتف نقال و لا يملك آلة حاسبة علمية .

c التلميذ يملك هاتف نقال علما أنه لا يملك آلة حاسبة علمية .

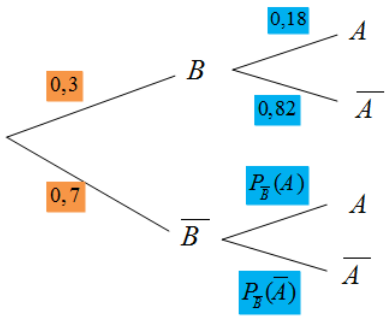
3 نختار ثلاثة تلاميذ :

a ما احتمال أن يكون التلاميذ الثلاثة يملكون هواتف نقالة ؟

b ما احتمال أن يكون تلميذ على الأقل يملك هاتف نقال ؟

الحل:

1 شجرة الاحتمالات :



لدينا : $P(\overline{A}) = 0.25$ و $P_B(A) = 0.18$

2

a احتمال التلميذ يملك هاتف نقال و آلة حاسبة علمية أي : $p(A \cap B)$

$$p(A \cap B) = P_B(A) \times p(B) = 0.18 \times 0.3 = 0.054$$

b احتمال التلميذ يملك هاتف نقال و لا يملك آلة حاسبة علمية أي : $p(\overline{A} \cap B)$

$$p(\overline{A} \cap B) = 0.3 \times 0.82 = 0.246$$

c احتمال التلميذ يملك هاتف نقال علما أنه لا يملك آلة حاسبة علمية أي : $p_{\overline{A}}(B)$

$$p_{\overline{A}}(B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(\overline{A})} = \frac{0.246}{0.25} = 0.984$$

3 نختار ثلاثة تلاميذ : اختيار الأول مستقل عن اختيار الثاني و الثالث

a نرمز بـ C : التلاميذ الثلاثة يملكون هواتف نقالة

إذن : $p(C) = p(B) \times p(B) \times p(B) = (0.3)^3 = 0.027$

b نرمز بـ D : تلميذ على الأقل يملك هاتف نقال

نستعمل الحادثة العكسية $\overline{D}$: التلاميذ الثلاثة لا يملكون هواتف نقالة

$$p(\overline{D}) = p(\overline{B}) \times p(\overline{B}) \times p(\overline{B}) = (0.7)^3 0.343$$

و عليه : $p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 0.657$

◄ تمرين 05 :

✍ يحتوي كيس U_1 على 4 قريصات بيضاء و 3 سوداء و يحتوي كيس U_2 على 17 قريصة بيضاء و 18 قريصة سوداء .

نرمي زهرة نرد متجانسة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 .

إذا ظهر الرقم 6 نسحب قريصة من الكيس U_1 و إلا فنسحب قريصة من الكيس U_2 .

1 احسب احتمال سحب قريصة بيضاء .

2 إذا سحبنا قريصة بيضاء ، فما احتمال أن تكون من الكيس U_1

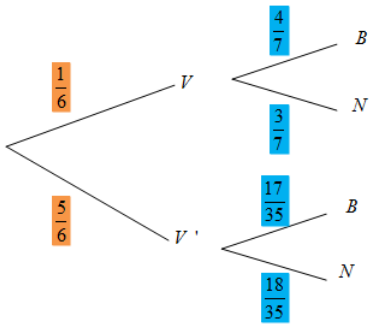
الحل:

نعتبر الحوادث :

V : ظهور الرقم 6 ، V' : ظهور الأرقام $1, 2, 3, 4, 5$

B : سحب قريصة بيضاء ، N : سحب قريصة سوداء

ـ شجرة الاحتمالات :



1 احتمال سحب قريصة بيضاء هو :

$$p(B) = p(B \cap V) + p(B \cap V') = \frac{1}{6} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{6} \times \frac{17}{35} = \frac{21}{42} = 0.5$$

2 إذا سحبنا قريصة بيضاء ، احتمال أن تكون من الكيس U_1 :

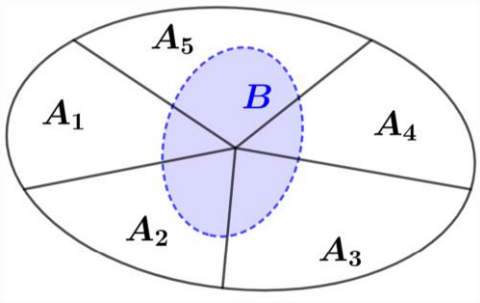
$$p_B(V) = \frac{p(B \cap V)}{p(B)} = \frac{4}{21}$$

ليكن A_1، A_2، ... ، A_n **أحداث غير خالية وغير متلائمة مثنى مثنى حيث:** $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

وليكن B **حدث كيفي من** Ω **، لدينا:**

$$p(B) = p(A_3 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

مع $p(A_k \cap B) = p(A_k) \cdot p_{A_k}(B)$ **من أجل كل** k **حيث:** $1 \leq k \leq n$





سلسلة تمارين مرفقة بالحل



تمرين01 :

كيس يحوي 10 كريات لا نفرق بينهم باللمس منها **ثلاث** كريات بيضاء، **ستة** كريات حمراء و**واحدة** خضراء

I) نسحب من الكيس على التوالي كرتين دون ارجاع ونعتبر الحادثتين :

A :"الحصول على كرية بيضاء في السحب الثاني" C :"الحصول على كرية حمراء في السحب الأول"

1) احسب: $P(A)$ ، $P(A\cap C)$ و $P_A(C)$

2) احسب $P(C)$.هل الحادثتين A و C مستقلتين؟ برر اجابتك

II) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة

1) عرف قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

2) احسب $P(X^2-4X=0)$

الحل:

1) **حساب** $P(A)$ ، $P(A\cap C)$ و $P_A(C)$

$$P(A)=\frac{A_3^2+A_7^1\times A_3^1}{A_{10}^2}=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}$$

$$P(A\cap C)=\frac{A_6^1\times A_3^1}{90}=\frac{18}{90}=\frac{2}{10}$$

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$$

- حساب $P(C)$

$$P(C)=\frac{A_6^1\times A_9^1}{90}=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$$

$$P(C)=\frac{A_6^1\times A_9^1}{90}=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$$

- هل الحادثتين A و C مستقلتين؟ برر اجابتك

لدينا: $P(A)\times P(C)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{50}$ ولدينا: $P(A\cap C)=\frac{2}{10}$ ومنه: $P(A\cap C)\neq P(A)\times P(C)$

إذا: الحادثتان A و C غير مستقلتان

II) 1) قانون احتمال X

$P(X=0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}$ ، $P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{3}{45}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{21}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{3}{45}$

حساب أمله الرياضياتي $E(X)$

$$E(X)=0\times\frac{21}{45}+1\times\frac{21}{45}+2\times\frac{3}{45}=\frac{27}{45}$$

2) احسب $P(X^2-4X=0)$

$$P(X^2-4X=0)=P(X=0)=\frac{21}{45}$$

◄ تمرين02 :

I) يحتوي كيس على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 2 ، 1 ، 1 ، 1 و ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1.

كل الكرات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس. نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا في آن واحد.

نعتبر الحوادث التالية:

الحادثة A: " توجد كرة بيضاء واحدة في السحب ". الحادثة B: "الكرات المسحوبة من نفس اللون ".

الحادثة C: "سحب ثلاث كرات جداء أرقامها عدد زوجي ".

1) ا) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ إحتمال الحوادث A ، B و C على الترتيب.

ب) بين أن: $P(B\cap C)=\frac{5}{28}$.

2) أحسب $P_B(C)$ إحتمال سحب 3 كريات جداء أرقامها عدد زوجي علما أنها من نفس اللون.

II) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها n كرة سوداء حيث $(n\geq 3)$. ثم نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع.

نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة وسحب كرة سوداء يساوي 5 نقاط .

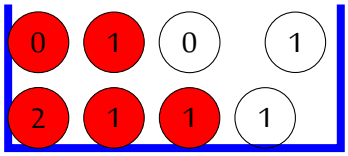
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.

1) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات) ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

2) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة

الحل:

I)



ا) حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{3 \times \frac{5!}{2!(5-2)!}}{\frac{8!}{3!(8-3)!}} = \frac{3 \times 10}{56} = \frac{30}{56}$$

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{11}{56}$$

$$P(C) = \frac{C_2^1 \times C_6^2 + C_2^2 \times C_6^1 + C_1^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{46}{56}$$

ب) بيان أن: $P(B \cap C) = \frac{5}{28}$:

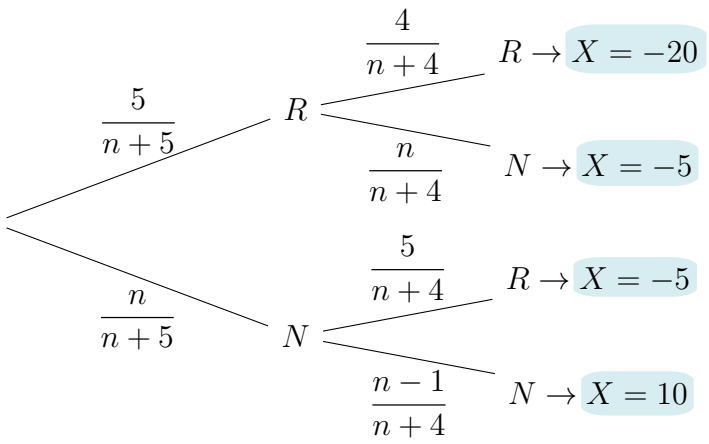
$$P(B \cap C) = \frac{C_1^1 \times C_4^2 + C_1^1 \times C_3^2 + C_1^1 \times C_2^2}{C_8^3}$$

$$= \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

حساب $P_B(C)$ إحتمال سحب 3 كريات جداء أرقامها عدد زوجي علما أنها من نفس اللون:

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{56}}{\frac{11}{56}} = \frac{10}{11}$$

II) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X:



تعيين قيم المتغير العشوائي X : $X(\Omega) = \{-20; -5, 10\}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X:

$$P(X=-20) = \frac{5}{n+5}\times\frac{4}{n+4} = \frac{20}{(n+5)(n+5)}$$

$$P(X=-5) = \frac{10n}{(n+5)(n+5)}$$

$$P(X=10) = \frac{n}{n+5}\times\frac{n-1}{n+4} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+5)}$$

x_i	-20	-5	10
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+5)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+5)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+5)}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} P_i x_i = -20\times\frac{20}{(n+5)(n+5)} - 5\times\frac{10n}{(n+5)(n+5)} + 10\times\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+5)}$$

$$E(x) = \frac{10n^2-10n-50n-400}{(n+5)(n+5)}$$

III) تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة: اللعبة عادلة معناه: $E(x)=0$ معناه:

$\frac{10n^2-10n-50n-400}{(n+5)(n+5)}$ معناه $10n^2-10n-50n-400=0$

$n^2-6n-40=0$ وبما أن: $\sqrt{196}=14$ فإن:

مرفوض $\begin{cases} n_1 = \frac{6-14}{2} = -4 \\ n_2 = \frac{6+14}{2} = 10 \end{cases}$ ومنه قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة هي: $n=10$.

◄ تمرين03 :

كيس به ثلاث كريّات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 و 2 ، وثلاث كريّات بيضاء تحمل الأرقام : 1 ، 2 و 2 ، وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام: 1 ، 1 ، 1 و 2 ، الكريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس.

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات في آن واحد، ونعتبر الحدثين الآتيين

- الحدث A: " الحصول على ثلاث كريّات من نفس اللّون ".
- الحدث B: " الحصول على ثلاث كريّات مجموع أرقامها عدد فردي ".

1. أحسب كُلّا من $P(A)$ و $P(B)$

2. أ. بيّن أنّ $P(A\cap B)=\frac{1}{60}$

ب. استنتج احتمال الحصول على ثلاث كريّات مجموع أرقامها عدد فردي علما أنّها من نفس اللون.

3. نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريّات مجموع الأرقام المحصّل عليها.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{3;4;5;6\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

4. نسحب عشوائيا من الكيس السابق ثلاث كريّات على التوالي دون إرجاع، أحسب احتمال سحب كريّة حمراء على الأقل.

الحل:

1. حساب احتمال كلّا من الحدثين A و B

أ. A: " الحصول على ثلاث كريّات من نفس اللّون ".

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{6}{120} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

ب. B: " الحصول على 3 كريّات مجموع أرقامها فردي ".

$$P(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{C_4^2 \times C_6^1 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

2. أ. تبيين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{60}$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{C_2^2 \times C_1^1 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{2}{120} = \boxed{\frac{1}{60}}$$

ب. استنتاج احتمال الحصول على ثلاث كريّات مجموع أرقامها عدد فردي علما أنّها من نفس اللّون

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3. أ. تبرير أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{3; 4; 5; 6\}$

$$\begin{cases} 1+1+1=3 \\ 1+1+2=4 \\ 1+2+2=5 \\ 2+2+2=6 \end{cases}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ حساب أمله الرياضياتي $E(X)$

- في حالة $X = 3$

$$P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

- في حالة $X=4$ $P(X=4)=\dfrac{C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$

- في حالة $X=5$ $P(X=5)=\dfrac{C_6^1\times C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

- في حالة $X=6$ $P(X=6)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$

وينتج عن ذلك ما يلي

x_i	3	4	5	6	المجموع
$P(X=x_i)$	$\dfrac{20}{120}$	$\dfrac{60}{120}$	$\dfrac{36}{120}$	$\dfrac{4}{120}$	1

عندئذ لدينا $E(X)=3\times\dfrac{20}{120}+4\times\dfrac{60}{120}+5\times\dfrac{36}{120}+6\times\dfrac{4}{120}=\dfrac{21}{5}$

4.حساب احتمال سحب كريّة حمراء على الأقل

نسمّي الحدث C: " سحب كريّة حمراء على الأقل " ، عندئذ لدينا

$$P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-\frac{\text{عدد عناصر } \overline{C}}{\text{عدد الإمكانيات}}=1-\frac{A_7^3}{A_{10}^3}=1-\frac{210}{720}=\frac{510}{720}=\frac{17}{24}$$

تمرين04 :

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 وكريتان خضراوان تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكريات لانفرق بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .

1. أحسب احتمالات الأحداث التالية :

A: " الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني الجزائري " .

C: " الحصول على الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها 4 "

D: " الحصول على كرية حمراء على الأقل من بين الكريات الثلاث المسحوبة "

2. بين أن : $P(A\cap C)=\dfrac{1}{12}$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة .

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

◄ الحل:

عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $C_9^3 = 84$

1. حساب إحتمال الأحداث : A ، C و D

$$A : BVR \Rightarrow P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{84} = \frac{2}{7}$$

$$C : 112 \text{ أو } 013 \text{ أو } 022 \Rightarrow P(C) = \frac{C_4^2 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^2 + C_2^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{84} = \frac{11}{42}$$

$$P(D) = 1 - \frac{C_5^3}{84} = \frac{37}{42}$$

2. تبيان أن : $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$

$$A \cap C : B_0R_3V_1, V_0R_3B_1; B_1R_2V_1 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{84} = \frac{1}{12}$$

3. قانون احتمال المتغير العشوائي X

قيم المتغير العشوائي : $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{14}{84}$	$\frac{21}{84}$	$\frac{22}{84}$	$\frac{14}{84}$	$\frac{8}{84}$	$\frac{1}{84}$

الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X : $E(X) = \frac{11}{3}$

◄ تمرين05 :

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 2 وكريتين لونهما أسود تحملان الرقم 1، 2. كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا وبدون إرجاع كريتن من الصندوق.

1)- نعتبر الحادثتين A و B حيث:

A: " الكريتان المسحوبتان تحملان الرقم 1 "

B: " سحب كرية بيضاء في السحبة الأولى "

ا)- بين أن: $P(A) = \frac{1}{10}$.

ب)- أحسب إحتمال الحادثة B ثم بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

ج)- هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ علل.

2)- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين للكريتين المسحوبتين.

ا)- عين قيم المتغير العشوائي X، ثم عرف قانون إحتماله.

ب)- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

◄الحل:

التجربة: "السحب على التوالي وبدون إرجاع لكريتين من الصندوق"

ليكن Ω مجموعة إمكانيات هذه التجربة، معناه: $\text{card}(\Omega) = A_5^2 = 20$

(ا) بيان أن: $P(A) = \frac{1}{10}$:

لدينا: A: " الكريتان المسحوبتان تحملان الرقم 1 " معناه: $\text{card}\, A = A_2^2 = 2$ ومنه

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

(ب) حساب إحتمال الحادثة B:

لدينا: B: " سحب كرية بيضاء في السحبة الأولى " معناه: $\text{card}B = A_3^1 \times A_4^1 = 3 \times 4 = 12$

$$P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}(\Omega)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \text{ومنه}$$

بيان أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$:

$A \cap B$: " الكريتان المسحوبتان رقمهما 1 والكرية المسحوبة في السحبة الأولى بيضاء "

معناه: $\text{card}A \cap B = A_1^1 \times A_1^1 = 1$ ومنه $P(A \cap B) = \frac{\text{card}A \cap B}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{20}$

(ج) لدينا: $P(A \cap B) = \frac{\text{card}A \cap B}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{20}$ و $P(A) \times P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50}$ وبما أن:

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن الحادثتين A و B غير مستقلتين.

تعيين قيم المتغير العشوائي X:

$$\left\{\overbrace{(2,2)}^{X=4}\right\} \quad \left\{\overbrace{(1,2)}^{X=2}, \overbrace{(2,1)}^{X=2}\right\} \quad \left\{\overbrace{(1,1)}^{X=1}\right\} \quad \left\{\overbrace{(0,\bar{0})}^{X=0}, \overbrace{(\bar{0},0)}^{X=0},\right\}$$

ومنه قيم المتغير العشوائي X هي: $X = \{0, 1\,2, 4\}$

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X:

$$P(X=0) = \frac{(A_1^1 \times A_4^1) \times 2}{20} = \frac{2 \times 1 \times 3}{20} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{(A_2^1 \times A_2^1) \times 2}{20} = \frac{2 \times 2 \times 2}{20} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=1) = \frac{A_2^1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=4) = \frac{A_2^1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

نقوم بتلخيصه في الجدول التالي:

$X = x_i$	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

حساب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X:

$$E(X) = 0 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 2 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{13}{10}$$

ومنه:

$$E(X) = \frac{13}{10}$$

تمرين06 :

I) قسم 3 تقني رياضي به 25 تلميذ منهم 14 ذكر و 11 أنثى .

يراد تشكيل لجنة بثلاث أعضاء تضم رئيسا - نائبا - أمينا .

1. ماهو عدد اللجان التي يمكت تشكيلها .
2. أحسب إحتمالات الحوادث التالية :

A: "اللجنة مشكلة من الذكور فقط ".

B: "اللجنة مشكلة من نفس الجنس ".

C: " أعضاء اللجنة مشكلة من جنسين مختلفين ".

D: "الرئيس ذكر ".

E: "الرئيس ذكر و الأمين تلميذة ".

F: "الرئيس ذكر أو الأمين تلميذة ".

G : "اللجنة تضم ذكرا على الاقل ".

3. أحسب إحتمال أن يكون الرئيس ذكرا علما أن أعضاء اللجنة من جنسيين مختلفين .

II) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الإناث فيها .

1. عين قيم X .

2. عين قانون إحتمال X .

3. أحسب $E(X)$ و $V(X)$.

4. أحسب الإحتمال : $p(X^2 - X = 0)$.

◄ الحل:

I) 1. عدد اللجان الممكن تشكيلها هو : $A_{25}^3 = 13800$.

2. حساب الإحتمالات :

$$P(A) = \frac{A_{14}^3}{A_{25}^3} = \frac{91}{575}.$$

$$P(B) = \frac{A_{14}^3 + A_{11}^3}{A_{25}^3} = \frac{23}{100}.$$

بما أن C الحادثة العكسية لـ B فإن $P(C) = 1 - P(B) = \frac{77}{100}$.

$$P(D) = \frac{A_{14}^1 \times A_{24}^2}{A_{25}^3} = \frac{14}{25}.$$

$$P(E) = \frac{A_{14}^1 \times A_{11}^1 \times A_{23}^1}{A_{25}^3} = \frac{77}{300}.$$

$$P(F) = P(D \cup F_1) = P(D) + \underbrace{P(F_1)}_{\text{التلميذة امينة}} - \underbrace{P(D \cap F_1)}_{\text{P(E)}} = \frac{A_{14}^1 \times A_{24}^2}{A_{25}^3} + \frac{A_{11}^1 \times A_{24}^2}{A_{25}^3} - \frac{A_{14}^1 \times A_{11}^1 \times A_{23}^1}{A_{25}^3} = \frac{223}{300}$$

.

$$P(G) = \frac{\left(\underbrace{3}_{\text{معامل ترتيب}} \times A_{14}^1 \times A_{11}^2\right) + \left(3 \times A_{14}^2 \times A_{11}^1\right) + A_{14}^3}{A_{25}^3} = \frac{427}{460}.$$

يمكن حساب $P(G)$ بطريقة ثانية بإستعمال الحادثة العكسية لـ G وهذا أسهل حيث: $\overline{G}$ "باللجنة ثلاث إناث ".

وعليه $P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - \frac{A_{11}^3}{A_{25}^3} = \frac{427}{460}$.

3. حساب إحتمال أن يكون الرئيس ذكرا علما أن أعضاء اللجنة من جنسين مختلفين أي $P_C(D)$:

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{A_{14}^1 \times A_{11}^2 + \left(A_{14}^1 \times \left(2 \times A_{13}^1 \times A_{11}^1\right)\right)}{A_{25}^3} = \frac{231}{575}.$$

II) 1. تعيين قيم X : $\{0, 1, 2, 3\}$.

2. تعيين قانون إحتمال X :

$$P(X=0)=\frac{A_{14}^3}{A_{25}^3}=\frac{91}{575}.$$

$$P(X=1)=\frac{3\times A_{11}^1\times A_{14}^2}{A_{25}^3}=\frac{1001}{2300}.$$

$$P(X=2)=\frac{3\times A_{11}^2\times A_{14}^1}{A_{25}^3}=\frac{77}{230}.$$

$$P(X=3)=\frac{A_{11}^3}{A_{25}^3}=\frac{33}{460}.$$

3. حساب $E(X)$ و $V(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}p_ix_i=0\times\frac{91}{575}+1\times\frac{1001}{2300}+2\times\frac{77}{230}+3\times\frac{33}{460}=\frac{33}{25}=1{,}32.$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i(x_i)^2-E^2(X)=0^2\times\frac{91}{575}+1^2\times\frac{1001}{2300}+2^2\times\frac{77}{230}+3^2\times\frac{33}{460}=2{,}42.$$

4. حساب $P(X^2-X=0)$:

لدينا $X^2-X=0$ يكافىء $X=1$ أو $X=0$ ومنه

$$P(X^2-X=0)=P(X=1)+P(X=0)=\frac{91}{575}+\frac{1001}{2300}=\frac{273}{460}$$

◄ تمرين 07 :

I) يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ، 1 ، 1 وثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 وكرتين سوداويين تحملان الرقمين : 0 ، 2 . الكرات كلها متماثلة ولا نفرق بينها باللمس . نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A: الكرات المسحوبة من نفس اللون ، B: ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث ،

C: ظهور ثلاث أرقام مجموعها عدد فردي ، D: الكرة المسحوبة ثانيا حمراء .

2. بين أن : $p(B\cap D)=\frac{17}{84}$ ثم إستنتج $P(A\cup B)$

3. علما أن الرقم 1 ظهر مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث ، أحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا حمراء .

4. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق .

- عين قيم المتغير العشوائي X واكتب قانون احتماله .
- احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

◄ الحل:

I) 1. حساب الإحتمالات :

عدد الحالات الممكنة هو $A_8^3 = 336$

$$P(A) = \frac{A_3^3 + A_3^3}{A_8^3} = \frac{1}{28}.$$

$$P(B) = \frac{3 \times A_3^1 \times A_5^2}{A_8^3} = \frac{15}{28}.$$

$$P(C) = \frac{3 \times A_3^1 \times A_5^2 + A_3^3}{A_8^3} = \frac{31}{56}$$

$$P(D) = \frac{A_3^3 + 2 \times A_3^2 A_5^1 + A_5^2 A_3^1}{A_8^3} = \frac{3}{8}.$$

2. إثبات أن : $P(B \cap D) = \frac{17}{84}$:

$$P(B \cap D) = \frac{A_1^1 \times A_5^2 + \left(A_2^1 \times \left(2 \times A_3^1 A_4^1\right)\right)}{A_8^3} = \frac{17}{84}.$$

إستنتاج $P(B \cup D)$ و $P_B(D)$:

لدينا : $P(B \cup D) = P(A) + P(B) - P(B \cap D) = \frac{1}{28} + \frac{15}{28} - \frac{17}{84} = \frac{31}{84}$.

حساب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا حمراء علما أن الرقم 1 ظهر مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث :

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{\frac{17}{84}}{\frac{15}{28}} = \frac{17}{45}.$$

3. تعيين قيم X : $X \in \{0, 1, 2\}$.

تعيين قانون إحتمال X :

$$P(X = 0) = \frac{3 \times A_2^2 \times A_6^1}{A_8^3} = \frac{3}{28}.$$

$$P(X = 1) = \frac{3 \times A_2^1 \times A_6^2}{A_8^3} = \frac{15}{28}.$$

$$P(X = 2) = \frac{A_6^3}{A_8^3} = \frac{10}{28}.$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = 0 \times \frac{3}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{10}{28} = \frac{5}{4}.$$

◄ تمرين08 :

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها خمسة كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4
وثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : 0 ; 3 ; 5 وكريتين خضراوتين مرقمتين بـ : 0 ; 2.

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس ونعتبر الحوادث التالية :

A : الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون . **B** : مجموع أرقام الكريات الثلاث المسحوبة يساوي 8.

D : الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني .

1. أحسب كلا من $p(A)$ و $p(D)$ ثم بين أن : $p(B)=\frac{1}{8}$
2. بين أن : $p(A\cap B)=\frac{1}{40}$ ثم استنتج قيمة $p(A\cup B)$.
3. علما أن الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون ، ما إحتمال أن يكون مجموع أرقامها يساوي 8 ؟
4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس بعد نهاية السحب .

أ) عين قيم X الممكنة ثم عرف قانون إحتماله .

بـ) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

II) نعيد الكيس إلى وضعيته الأولى ونسحب منه ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع ، أحسب $p(R)$ إحتمال أن يكون جداء الأرقام التي تحملها الكريات الثلاث المسحوبة معدوما .

◄ الحل:

1.حساب إحتمالات الحوادث :

A حادثة سحب ثلاث كريات من نفس اللون معناه : ثلاث كريات حمراء أو ثلاث كريات بيضاء وبالتالي

$$p(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{10+1}{120}=\frac{11}{120}$$

D حادثة الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني معناه : كرية حمراء و كرية خضراء و كرية بيضاء وبالتالي :

$$p(D)=\frac{C_5^1C_2^1C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{5\times2\times3}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

B حادثة الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها 8 معناه : ثلاث كريات تحمل الأرقام 0;5;3 أو ثلاث

كريات تحمل الأرقام 2;2;4 أو ثلاث كريات تحمل الأرقام 1;3;4 أو ثلاث كريات تحمل الأرقام 1;5;2

أو ثلاث كريات تحمل الأرقام 2;3;3 وبالتالي :

$$p(B)=\frac{C_2^1C_1^1C_2^1+C_3^2C_1^1+C_1^1C_1^1C_2^1+C_3^1C_1^1C_1+C_2^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{4+3+2+3+3}{120}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$$

2.تبيان صحة $p(A\cap B)$ واستنتاج قيمة $p(A\cup B)$:

$A\cap B$ حادثة الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون و تحمل أرقام مجموعها يساوي 8 في آن واحد معناه ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام $3;4;1$ أو ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام $4;2;2$ أو ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام $3;5;0$ وبالتالي :

$$p(A\cap B)=\frac{C_1^1C_1^1C_1^1+C_2^2C_1^1+C_1^1C_1^1C_1^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{40}$$

ولدينا : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ ومنه : $p(A\cup B)=\frac{11}{120}+\frac{1}{8}-\frac{1}{40}=\frac{23}{120}$

3.حساب الإحتمال الشرطي :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{11}{120}}=\frac{3}{11}$$

4.أ) تعيين القيم الممكنة لـ X وتعريف قانون إحتماله :

نرمز بـ V كرية خضراء وبـ $\overline{V}$ كرية غير خضراء وبالتالي :

ω_i	$3\overline{V}$	$V2\overline{V}$	$\overline{V}2V$
x_i	2	1	0

أي : $X(w_i)\in\{0;1;2\}$

ولدينا : $p(x_i=0)=\frac{C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

و : $p(x_i=1)=\frac{C_2^1\times C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$

و : $p(x_i=2)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$

فيكون :

x_i	0	1	2
$p_i(x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

4.ب) حساب الأمل الرياضي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\times p_i(x_i)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{7}{15}=\frac{7}{5}$$

II)حساب $p(R)$:

R حادثة سحب ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع حيث جداء أرقامها معدوم معناه : كرية تحمل الرقم 0 و كريتين أخريتين أو كريتين تحملان الرقم 0 و كرية أخرى وبالتالي :

$$p(R)=\frac{3\times A_2^1A_8^2+3\times A_2^2A_8^1}{A_{10}^3}=\frac{8}{15}$$

◄ تمرين09 :

يحتوي الصندوق U على ثلاث كريات بيضاء مرقمة 0، 0، 1 وثلاث كريات سوداء مرقمة 0، 2، 2. ويحتوي الصندوق V على كريتين بيضاويين مرقمة بـ 0، 1 أربع كريات سوداء مرقمة 0، 0، 0، 1. كل الكريات مشتابهة لا نفرق بينها باللمس.

نرمي نردا غير مزيف مرقم بـ: 1، 1، 2، 2، 2، 2.

نعتبر التجربة التالية:

إذا ظهر الرقم 1 نسحب كريتين وفي آن واحد من الصندوق U.

إذا ظهر الرقم 2 نسحب على التوالي وبدون إرجاع ثلاث كريات من الصندوق V.

نعتبر الأحداث التالية:

A: " من بين الكريات المسحوبة، كرية سوداء رقمها 1 "

B: " الكريات المسحوبة سوداء "

1)- أحسب إحتمال الحادثة B، ثم بين أن $P(A)=\frac{1}{3}$

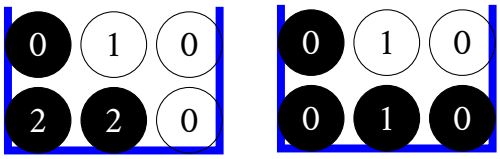
2)- أحسب إحتمال السحب من الصندوق U علما أن الكرية المسحوبة سوداء.

3)- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين الظاهرين على الكرية.

ا)- عين قيم المتغير العشوائي X، ثم عرف قانون إحتماله.

ب)- أحسب $\sigma(X)$ الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

◄ الحل:



U V

نعتبر الحادثة A_1 " رمي زهر النرد و الحصول على رقم 1 " $P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

1. حساب إحتمال الحادثة B:

لدينا حسب دستور الإحتمالات الكلية مايلي:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\cap A_1)+P(B\cap \overline{A_1}) \\ &= P(A_1)\,\dot{P}\,(B|A_1)+P(\overline{A_1})\,\dot{P}\,(B|\overline{A_1}) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{3}\times\frac{A_4^3}{A_6^3} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

بيان أن $P(A)=\frac{1}{3}$:

$$P(A) = P(A\cap A_1)+P(A\cap \overline{A_1}) = P(A_1)\,\dot{P}\,(A|A_1)+P(\overline{A_1})\,\dot{P}\,(A|\overline{A_1})$$

الحادثة: $(A|A_1)$ حادثة مستحيلة لأنه لا توجد كرية سوداء ورقمها 1 في الصندوق U. ومنه:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)\,\dot{P}\,(\phi)+P(\overline{A_1})\,\dot{P}\,(A|\overline{A_1}) \\ &= \frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\frac{(A_1^1\times A_5^2)\times 3}{A_6^3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

حساب إحتمال السحب من الصندوق U علما أن الكرية المسحوبة سوداء:

لدينا: $P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}$ معناه: $P(A_1|B) = \frac{P(A_1\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}$

(ا) تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X: قيم X هي: $X(\Omega)=\{0,\,1,\,2,\,3,\,4\}$

$$P(X=0) = \frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{3}\times\frac{A_4^3}{A_6^3} = \frac{9}{45}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3}\times\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_6^2}+\frac{2}{3}\times\frac{(A_4^1\times A_2^2)\times 3}{A_6^3} = \frac{12}{45}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3}\times\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_6^2}+\frac{2}{3}\times\frac{(A_4^2\times A_2^1)\times 3}{A_6^3} = \frac{21}{45}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3}\times\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_6^2}+\frac{2}{3}\times 0 = \frac{2}{45}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{2}{3}\times 0 = \frac{1}{45}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{9}{45}$

(ب) حساب $\sigma(X)$ الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X:

$X=x_i$	0	1	2	3	4	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{9}{45}$	1
x_ip_i	0	$\frac{21}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{4}{45}$	$E(X)=\frac{55}{45}$
$x_i^2p_i$	0	$\frac{21}{45}$	$\frac{48}{45}$	$\frac{18}{45}$	$\frac{16}{45}$	$E(X^2)=\frac{103}{45}$

معناه:

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2} = \sqrt{\frac{103}{45}-\left(\frac{11}{9}\right)^2} = 0,89$$

التمرين 01 بكالوريا 2024// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

يحتوي كيس على 11 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي : كريتان بيضاوان مرقمتان بـ : 1، 3 و أربع كريات حمراء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 1 ، 3 و خمس كريات خضراء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 1 ، 3 ، 4 .

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الكيس و نعتبر الأحداث الآتية :

A "الحصول على 3 كريات من نفس اللون" ، B "الحصول على 3 كريات جداء أرقامها عدد فردي"

C "الحصول على كريات جداء أرقامها عدد زوجي"

1) أ ـ أحسب $P(A)$ إحتمال الحادثة A و بيّن أن : $P(B)=\frac{56}{165}$ ثم استنتج $P(C)$.

بـ ـ أحسب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$.

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات ، عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا .

أ ـ عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

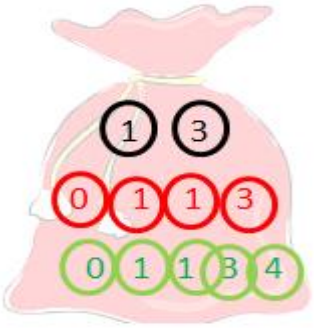
بـ ـ أحسب إحتمال الحادثة $(X>1)$.

II) نسحب الآن من الكيس عشوائيا 3 كريات على التوالي و بدون إرجاع .

أحسب إحتمال الحادثة D : "الحصول على 3 كريات جداء أرقامها معدوم"

الحل

I) كل سحب عبارة عن توفيقة ذات 3 عناصر من مجموعة ذات 11 عنصرا . وبالتالي : عدد الحلات الممكنة هو $C_{11}^3=165$.



1-) – أ) ◄حساب $P(A)$ احتمال الحادثة A

عدد عناصر A

للحصول على 3 كريات من نفس اللون يجب

سحب 3 كريات حمراء من بين 4 بـ C_4^3 طريقة . أو سحب

3 كريات خضراء من بين 5 بـ C_5^3 إمكانية

عدد عناصر A هو : $C_4^3+C_5^3=4+10=14$. وعليه : $P(A)=\frac{14}{165}$.

◄نبين أنّ $P(B)=\frac{56}{165}$

للحصول على 3 كريات جداء أرقامها عدد فردي يجب سحبها من بين الكريات التي تحمل أرقاما فردية .

بما أن عدد الكريات التي تحمل أرقاما فردية هو 8 فإن عدد عناصر B هو : $C_8^3=56$.

إذا : $P(C)=\frac{56}{165}$.

◄ استنتاج $P(C)$

لاحظ أن C هو الحادث العكسي للحادث B وبالتالي :

$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B) \quad \text{أي} \quad P(C)=1-\frac{56}{165}=\frac{109}{165}$$

- ب) حساب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$

نعلم أنّ : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ حيث :

$A\cap B$:"الحصول على 3 كريات من نفس اللون وجداء ارقامها فردي "

يجب :

سحب 3 كريات حمراء من بين 3 تحمل أرقاما فردية أو سحب 3 كرات خضراء تحمل أرقاما فردية من بين 3

عدد عناصر $A\cap B$ هو إذا : $C_3^3+C_3^3=2$

$$P_A(B)=\frac{\frac{2}{165}}{\frac{14}{165}}=\frac{1}{7}$$

2 -) – أ) قانون احتمال المتغير العشوائي X

توجد 3 كريات تحمل كل واحدة منها رقما زوجيا: 0، 0، 4 وبالتالي قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0,1,2,3\}$

فمثلا $P(X=0)$ هو احتمال الحادث : " لا نحصل علي أي كرية تحمل رقما زوجيا "

لدينا إذا :

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{165}=\frac{56}{165} \qquad P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_8^1}{165}=\frac{24}{165}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_8^2}{165}=\frac{84}{165} \qquad P(X=3)=\frac{C_3^3}{165}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X ملخص في الجدول أدناه :

القيم x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{24}{165}$	$\frac{1}{165}$	1

* حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3}x_i.P(X=x_i)=0\left(\frac{56}{165}\right)+1\left(\frac{84}{165}\right)+2\left(\frac{24}{165}\right)+3\left(\frac{1}{165}\right)$$

$$E(X)=\frac{135}{165}$$

- ب) حساب احتمال الحادثة $(X>1)$

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{24}{165}+\frac{1}{165}$$

$$P(X>1)=\frac{25}{165}=\frac{5}{33}$$ أي

II) حساب احتمال الحادثة D.

في هذه الحالة كل سحب عبارة عن ترتيبة3 عناصر مأخوذة من بين 11 عنصرا

عدد الحالات الكلية للسحب هو إذا : $A_{11}^{3}=990$.

يمكن اتباع الطريقة الآتية :

$\overline{D}$: "الحصول على3 كريات جداء أرقامها غير معدوم "

في هذه الحالة يجب سحب 3 كريات من بين 9

عدد الحالات الممكنة هو : $A_{9}^{3}=504$

إذا : $P(\overline{D})=\frac{504}{990}$. ينتج عن هذا : $P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{504}{990}$

$$P(D)=\frac{486}{990}=\frac{27}{55}$$ أي

التمرين 02 بكالوريا 2024// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

يحتوي كيس على 5 قطع كهربائية غير متمايزة و لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 قطع سليمة و قطعتان غير سليمتين .

نرمز إلى القطعة السليمة بالرمز S و إلى القطعة غير السليمة بالرمز $\overline{S}$.

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قطع على التوالي مع الإرجاع ، و نعتبر الحوادث :

A "القطعة الأولى المسحوبة سليمة " ، B "سحب قطعة واحدة فقط سليمة "

C "القطعة الثالثة المسحوبة سليمة "

1) شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه التجربة .

2) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B ثم بيّن أن : $P(C)=\frac{3}{5}$.

3) أحسب الإحتمال الشرطي $P_C(A)$. هل الحادثتان A و C مستقلتان ؟

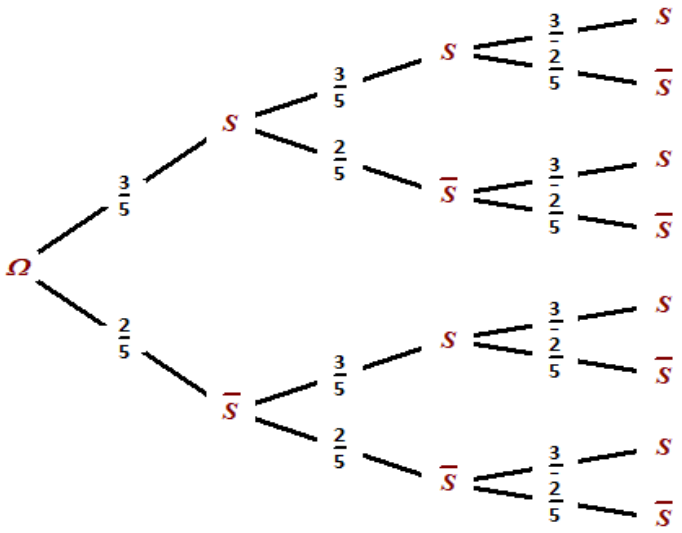
4) نرفق بكل قطعة سليمة العدد 10 و بكل قطعة غير سليمة العدد -10 ، و نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب من الكيس لثلاث قطع مجموع الأعداد المرفقة بها .

أ ـ برر أن قيم المتغيّر العشوائي X ، هي : -30 ، -10 ، 10 ، 30.

بـ ـ عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الحل

1 -) نشكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة .



2 -) ◄ حساب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثين A و B .

من خلال شجرة الاحتمالات يكون لدينا :

■ $P(A)=\frac{3}{5}$

■ نتبع المسارات التي يظهر فيها S مرة واحدة :

$$P(B)=\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\right)=3\left(\frac{12}{125}\right)=\frac{36}{125}$$

◄ نبيّن أنّ $P(C)=\frac{3}{5}$.

نتبع المسارات التي يظهر فيها S في الأخير (4 مسارات)

$$P(C)=\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{27+18+18+12}{125}=\frac{75}{125}$$

3 -)◄حساب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$

نعلم أنّ $P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ حيث : $A\cap C$: القطعة الأولى سليمة والثالثة سليمة.

حسب شجرة الاحتمالات يوجد مسارات لهذا الحادث :

$$P(A\cap C)=\left(\frac{3}{5}\right)^3+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{45}{125}$$

في هذه الحالة :

$$P_C(A)=\frac{9}{25}\times\frac{5}{3}=\frac{3}{5}$$

◄ ننظر إن كان الحادثان A و C مستقلان

لدينا : $\begin{cases}P(A)\times P(C)=\frac{9}{25}\\ P(A\cap C)=\frac{9}{25}\end{cases}$ أي : $P(A)\times P(C)=P(A\cap C)$

ومنه : الحادثان A و C مستقلان.

4 -) –أ) نبرر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي : -30 ، -10 ، 10 و 30.

لدينا الحالات الآتية بعد كل عملية سحب لثلاث قطع :

إما لا نحصل على أي قطعة سليمة : $3(-10)=-30$

وإما 1سليمة و2 غير سليمة : $(10+2(-10))=-10$

وإمّا 2 سليمة و1 غير سليمة : $(2\times10-10)=10$

وإمّا نحصل على 3 قطع سليمة : $3\times10=30$

وبالتالي : قيم المتغير العشوائي X هي قيم المجموعة $\{-30,-10,10,30\}$

- ب) ◄ نعيّن قانون احتمال العشوائي X .

$$P(X=-30)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$

$$P(X=-10)=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$$

$$P(X=10)=\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$$

$$P(X=30)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{27}{125}$$

القيم x_i	-30	-10	10	30
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

◄حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i.P(X=x_i)=-\frac{240-360+540+810}{125}=6$$

التمرين 03 بكالوريا 2024// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، منها : 4 بيضاء و 3 حمراء و 2 خضراوان .

I) نسحب عشوائيا من الصندوق 3 كريات في آن واحد.

1) أحسب إحتمال كلا من الحوادث الآتية :

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" ، B "الحصول على الألوان الثلاثة"

C "الحصول على كرية بيضاء على الأقل"

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات ، عدد الألوان المتحصل عليها .

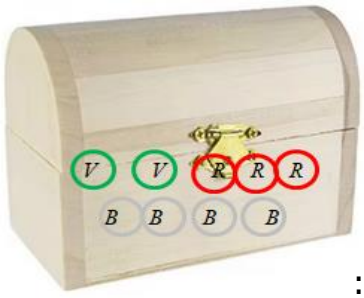
أ ـ عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

بـ ـ أحسب $E(84X+1837)$.

II) نضيف الآن إلى الصندوق كرية واحدة سوداء ثم نسحب منه عشوائيا 4 كريات على التوالي دون إرجاع .

بيّن أن إحتمال الحادثة D : "الحصول على الألوان الأربعة" هو $\frac{4}{35}$.

الحل



I) كل سحب عبارة عن توفيقة ذات 3 عناصر من مجموعة ذات 9 عناصر

عدد السحبات او عدد كل الإمكانيات هو : $C_9^3=84$.

◄1°) حساب احتمال كلّ من الحوادث الآتية

■ $P(A)$

الحادث A للحصول على 3 كريات من نفس اللون يجب: $\{R,R,R\}$ أو $\{B,B,B\}$

سحب3 كريات حمراء من بين3 بـ C_3^3 إمكانية أو سحب3 كريات بيضاء من بين 4 بـ C_4^3 إمكانية

ومنه : عدد عناصر A هو : $C_4^3+C_3^3=4+1=5$ إذا : $P(A)=\frac{5}{84}$

■ $P(B)$

للحصول على 3 ألوان مختلفة ، يجب سحب1بيضاء و1 حمراء و1 خضراء

عدد عناصر B هو إذا : $C_4^1\times C_3^1\times C_2^1=24$ ومنه : $P(B)=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$

■ $P(C)$

لكن $\overline{C}$ الحادث العكسي للحادث $\overline{C}$

$\overline{C}$: " لا نحصل على أي كرة بيضاء "

في هذه الحالة يجب سحب 3 كريات من بين 5 بـ C_5^3 طريقة

$P(\overline{C})=\frac{C_5^3}{84}=\frac{10}{84}$. ومنه : $P(C)=1-\frac{10}{84}=\frac{74}{84}$ أي $P(C)=\frac{27}{42}$.

2) –أ)◄ قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

■ في هذه الحالة و عند كل عملية سحب نحصل : إمّا على لون واحد وإمّا على لونين وإمّا على الألوان الثلاثة.

وبالتالي قيم X هي قيم المجموعة $\{1,2,3\}$

ومنه : $P(X=1)=P(A)=\frac{5}{84}$

■ فيما يخص $P(X=2)$ لدينا الحوادث الآتية :

$\{B,B,R\};\{B,B,V\}$

$\{R,R,B\};\{R,R,V\}$ والممكن تلخيصه كما يلي :

$\{V,V,B\};\{V,V,R\}$

سحب كرتين بيضاوين و1 ليست بيضاء : $C_4^2\times C_5^1$

أو

سحب كرتين حمراوين و1 ليست حمراء : $C_3^2\times C_6^1$

أو

سحب كرتين خضراوين و1 ليست خضراء : $C_2^1\times C_7^1$

يكون عدد عناصر الحادث $(X=2)$ هو : $C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^1\times C_7^1=55$

أي $P(X=2)=\dfrac{5}{84}$

من السهل قبل حساب $P(X=2)$ حساب $P(X=3)$ ومنه : $P(X=2)=1-\left[P(X=1)+P(X=3)\right]$

■ $P(X=3)=P(B)=\dfrac{24}{84}$.

■ قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ملخص في الجدول أدناه:

x_i القيم	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$	1

◄ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.P(X=x_i)=\frac{5+110+72}{84}=\frac{187}{84};(\simeq 7,79)$$

- ب) حساب $E(84X+1837)$

نعلم أن : $E(aX+b)=a.E(X)+b$ ومنه :

$$E(84X+1837)=84.E(X)+1837=84\left(\frac{187}{84}\right)+1837$$

أي $E(84X+1837)=2024$.

II) كل سحب عبارة عن ترتيبة 4 عناصر من بين 10.

عدد هذه الترتيبات هو إذا : $A_{10}^4=5040$.

◄ نبيّن أنّ $P(D)=\dfrac{4}{35}$

■ نعيّن عدد عناصر الحادثة D.

لاحظ مثلا السحب الآتي : (B,R,V,N) فرضنا أنّ الكرية الأولى هي كرية بيضاء.

عدد الترتيبات هو عدد تبديلات 4 عناصر من مجموعة ذات 4 عناصر. : أي $4!=24$.

في هذه الحالة عدد عناصر D هو : $24\left(A_4^1\times A_3^1\times A_2^1\times A_1^1\right)=576$ ومنه : $P(D)=\dfrac{576}{5040}=\dfrac{4}{35}$.

التمرين 04 بكالوريا 2024// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس منها :
كريتان تحملان الرقم 0 ، ثلاث كريات تحمل الرقم 2 ، كرية تحمل الرقم 3 و أربع كريات تحمل الرقم 4 .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

1) أحسب إحتمال كلا من الحوادث الآتية :
A "مجموع الأعداد التي تحملها الكريات المسحوبة يساوي 12"
B "الحصول على ثلاثة أعداد أولية"
C "جداء الأعداد التي تحملها الكريات المسحوبة معدوم"

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الأعداد الأولية المتحصل عليها .
أ ـ عيّن قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
بـ ـ أحسب إحتمال الحادثة $(X^2>e)$.

الحل

1 -) حساب احتمال الحوادث A ، B و C.

كلّ سحب آني لأربع كريات من بين 10 هو عبارة عن توفيقة ذات 3 عناصر من بين 10.

عدد الامكانيات هو : $C_{10}^{3}=120$.

◄ A :"مجموع الأرقام التي تحملها الكريات يساوي12 "

للحصول على 3 كريات مجموع أرقامها يساوي12 يجب سحب3 كريات من بين 4 كريات تحمل الرقم 4 .

وبالتالي عدد عناصر A هو : $C_{4}^{3}=4$ إذا $P(A)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$.

◄ B : " الحصول على 3 أعدا أولية "

توجد 4 كرات تحمل أرقاما أولية : 2 ، 2 ، 2 ، 3 عدد عناصر B هو : $C_{4}^{3}=4$.

في هذه الحالة : $P(B)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

◄ C : " جداء الأرقام التي تحملها الكريات معدوم "

توجد كريتان تحملان الرقم 0 . إذا يجب :

سحب كرية تحمل الرقم0 و2 كرية من البقية : $C_{2}^{1}.C_{8}^{2}=56$ أو سحب 2 كرية تحمل الرقم 0 وواحدة من البقية :

عدد عناصر C هو : $C_{2}^{2}.C_{8}^{1}=8$. ينتج : $56+8=64$. $P(C)=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}$.

2-) – أ) ◄ نعيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

عند كل عملية سحب إما لا نحصل على أي كرة تحمل عددا أوليا وإما نحصل على كرية واحدة وإما كريتين وإمّا 3 كريات.

إذا قيم المتغيّر العشوائي X هي قيم المجموعة: $\{0,1,2,3\}$.

ويكون مثلا: $(X=0)$: " لا نسحب أي كرة تحمل عددا أوّليا "

إذا: ■ $P(X=0)=\frac{C_{6}^{3}}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$.

■ $P(X=1)=\frac{C_{4}^{1}.C_{6}^{2}}{120}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

■ $P(X=2)=\frac{C_{4}^{2}.C_{6}^{1}}{120}=\frac{36}{120}=\frac{4}{9}$

■ $P(X=3)=\frac{C_{4}^{3}}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

في هذه الحالة ، قانون احتمال المتغيّر العشوائي X كما يلي :

x_i القيم	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

◄ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i.P(X=x_i)=\frac{60+72+12}{120}=\frac{6}{5}$$

_ ب)حساب احتمال الحادثة $(X^2>e)$

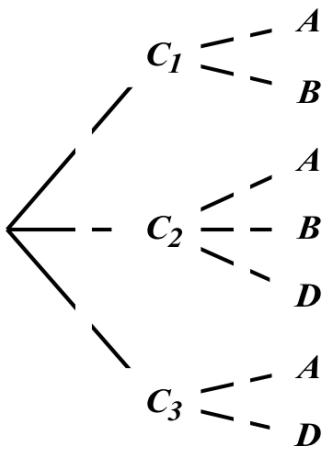
بما أنّ $X\in\mathbb{N}$ فإنّ $X^2>e$ يعني $X\geq\sqrt{e}$ وبالتّالي في هذه الحالة X يأخذ القيمتين 2 أو 3.

$$P(X>e)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$$

التمرين 05 بكالوريا 2024// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

يحتوي صندوق U_1 على 5 بطاقات متماثلة مرقمة بـ: 1، 1، 2، 3، 3 و يحتوي صندوق U_2 على 6 كريات موزعة كما يلي :
4 كريات حمراء و 2 خضراوان . (لا نفرق بين البطاقات ولا بين الكريات باللمس)
نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق .

- إذا تحصلنا على الرقم 1 نسحب عشوائيا من كرية واحدة .
- إذا تحصلنا على الرقم 2 نسحب عشوائيا من كريتين في آن واحد.
- إذا تحصلنا على الرقم 3 نسحب عشوائيا من ثلاث كريات في آن واحد .



نعتبر الحوادث الآتية :

C_i "البطاقة المتحصل عليها تحمل الرقم i " حيث $i\in\{1;2;3\}$.

A "الحصول على كريات حمراء فقط "

B "الحصول على كريات خضراء فقط "

D "الحصول على كريات ليست كلها من نفس اللون"

1) أ ـ بيّن أن : $P_{C_2}(B)=\frac{1}{15}$ و $P_{C_3}(D)=\frac{4}{5}$.

بـ ـ أنقل و املأ شجرة الإحتمالات المقابلة .

جـ ـ أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(D)$.

2) أحسب إحتمال أن تكون البطاقة المتحصل عليها تحمل الرقم 3 علما أن الكريات المسحوبة حمراء .

3) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المتحصل عليها .
عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب الأمل الرياضياتي $E(75X+1917)$.

4) إذا كان عدد الكريات الحمراء في الصندوق U_2 هو $n+4$ حيث n عدد طبيعي .
جد قيمة n التي من أجلها يكون $P_{C_3}(A)=\frac{7}{15}$.

الحل

■ مثلا C_1 هو الحادث : « الحصول على بطاقة تحمل الرقم 1»

■ بطاقة واحدة تحمل الرقم 1 $P(C_1)=\frac{1}{5}$

■توجد بطاقتان تحملان الرقم 2 من بين 5 : $p(C_1)=\frac{2}{5}$

■ بطاقتان تحملان الرقم 3 : $P(C_3)=\frac{2}{5}$

1 -) –أ) نبيّن أنّ $P_{C_2}(B)=\frac{1}{15}$ و $P_{C_3}(D)=\frac{4}{5}$.

◄ $P_{C_2}(B)$:«الحصول على كريات خضراء فقط علما أنّنا تحصلنا على بطاقة تحمل الرّقم2 »

■ في هذه الحالة يجب سحب كرتين من الصندوق U_2.

عدد الحالات الممكنة هو : $C_6^2=15$.

ـ يقابل هذه الوضعية سحب كرتين خضراوين من بين 2.

عدد عناصر B هو $C_2^2=1$.

وبالتّالي : $P_{C_2}(B)=\frac{1}{15}$.

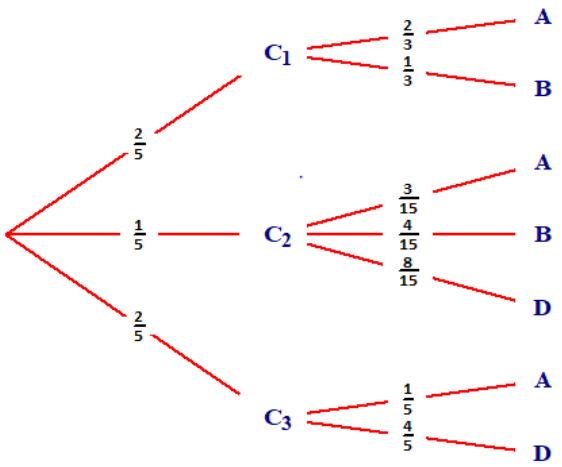
◄ $P_{C_3}(D)$: «الحصول على 3 كريات من ألوان مختلفة علما أنّنا تحصلنا على بطاقة تحمل الرقم 3 »

■ نتحصّل على 3كريات بـ $C_6^3=20$ إمكانية .

■ عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها 3 كريات من ألوان مختلفة هو : $C_4^1\times C_2^1=8$.

وبالتّالي : $P_{C_3}(D)=\frac{8}{20}=\frac{4}{5}$.

- ب) ننقل ونملأ شجرة الاحتمالات.



جـ -) حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(D)$

اعتمادا على شجرة الاحتمالات يكون لدينا :

$$P(A)=P(C_1\cap A)+P(C_2\cap A)+P(C_3\cap A)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{15}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{32}{75}$$

$$P(B)=P(C_1\cap B)+P(C_2\cap B)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{15}\right)=\frac{11}{75}$$

$$P(D)=P(C_2\cap D)+P(C_3\cap D)=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{32}{75}$$

2 -) حساب احتمال أن تكون البطاقة المتحصّل عليها تحمل الرّقم 3 علما أنّ الكريات المسحوبة حمراء.

من الواضح أنّ احتمال هذا الحادث هو $P_A(C_3)$

$$P_A(C_3)=\frac{P(C_3\cap A)}{P(A)}=\frac{2}{25}\times\frac{75}{32}=\frac{3}{16}$$

3 -) ◄ تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .

يوحد لونان وعليه قيم X هي قيم المجموعة $\{1,2\}$

لاحظ ما يلي :

■ $(X=1)$:«الحصول على كريتين حمراوين » أي $(X=1)$ هو الحادث $A\cup B$ وعليه :

$$P(X=1)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{43}{75}$$

$$P(X=2)=P(D)=\frac{32}{75}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X ملخّص في الجدول الآتي :

القيم x_i	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{43}{75}$	$\frac{32}{75}$	1

◄حساب الأمل الرياضياتي $E(75X+1917)$

لدينا : ■ $E(75X+1917)=75E(X)+1917$

لكن :■ $E(X)=\frac{43+64}{75}=\frac{107}{75}$

بالتعويض : $E(X)=75\left(\frac{107}{75}\right)+1917$. أي : $E(X)=2024$

-) إيجاد قيمة n الّتي من أجلها يكون : $P_{C_3}(A)=\frac{7}{15}$

■ عدد الحالات التي نسحب بها 3 كريات من بين $(n+6)$ هو :

$$C_{n+6}^3=\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{6}$$

■ عدد الحالات التي نسحب بها 3 كريات من بين $(n+4)$ هو :

$$C_{n+4}^3 = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}$$

وبالتّالي :

$$P_{C_3}(A) = \frac{C_{n+4}^3}{C_{n+6}^3} = \frac{(n+3)(n+2)}{(n+6)(n+5)}$$

■ $P_{C_3}(A) = \frac{7}{15}$ يكافئ $\frac{(n+3)(n+2)}{(n+6)(n+5)} = \frac{7}{15}$

يكافئ $15n^2+75n+90 = 7n^2+77n+210$ نحصل في $\mathbb{N}$ على المعادلة: $8n^2-2n-120=0$

وهي مكافئة للمعادلة: $4n^2-n-60=0$

ـ مميزها Δ هو : $\Delta = 961 = 31^2$

للمعادلة حلاّن في $\mathbb{R}$ هما : $n_1 = 4 \in \mathbb{N}$ ، $n_2 = \frac{-15}{4} \notin \mathbb{N}$

■ قيمة n هي إذا : $n=4$

التمرين 06 بكالوريا 2024// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

يحتوي صندوق U_1 على 7 كريات منها : 3 كريات بيضاء و 4 كريات حمراء و يحتوي صندوق U_2 على 7 كريات منها : كريتان بيضاوان 5 و كريات حمراء . (جميع الكريات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس)

نلقي نردا متوازنا أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 و نسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي .

- إذا ظهر رقم مضاعف للعدد 3 ، نسحب عشوائيا من الصندوق U_1 كريتين على التوالي دون إرجاع .
- في الحالات الأخرى ، نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي دون إرجاع .

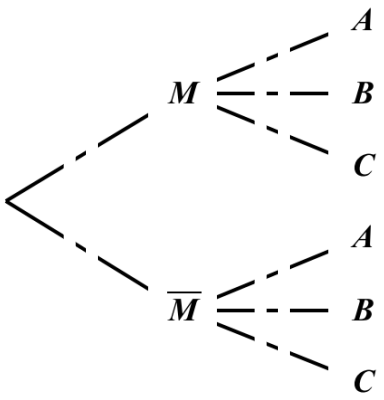
نعتبر الحوادث الآتية :

M "ظهور رقم مضاعف للعدد 3 "

A "الحصول على كريتين بيضاوين "

B "الحصول على كريتين حمراوين "

C "الحصول على كريتين من لونين مختلفين "



1) أنقل و املأ شجرة الإحتمالات المقابلة .

2) نعتبر الحادثتين :

G "الحصول على كريتين من نفس اللون "

و H "الحصول على كرية حمراء على الأقل "

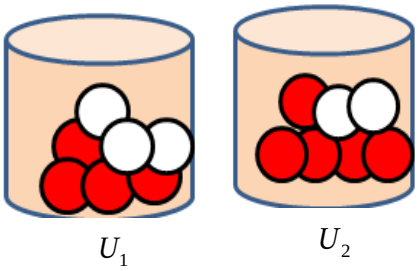
بيّن أن $P(G) = \frac{31}{63}$ ثم أحسب $P(H)$.

3) أحسب $P_G(M)$ إحتمال ظهور رقم مضاعف للعدد 3 علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون .

4) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين عدد الألوان المتحصل عليها .

عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب الأمل الرياضياتي $E(63X+1350)$.

الحل



1 -) نقل وملئ شجرة الاحتمالات .

◄ أرقام النّرد هي 1،2، 3، 4، 5، 6 منها 3 و6 من مضاعفات 3 .

واضح أنّ $P(M)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ وأنّ $P(\overline{M})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

◄ كلّ من الصندوقين يحتوي على 7 كريات وكلّ سحب لكرتين على التّوالي وبدون إرجاع هو ترتيبة ذات عنصرين من بين 7 .

← عدد الحالات الممكنة هو : $A_7^2=42$.

◄ بالنسبة للصندوق U_1 :

■ عدد عناصر A هو : $A_3^2=6$ ومنه ، $P_M(A)=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$.

■ عدد عناصر B هو : $A_4^2=12$ ومنه ، $P_M(B)=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$

■ بما أنّ مجموع الاحتمالات لكل الفروع الّتي مصدرها نفس العقدة يساوي 1 فإنّ

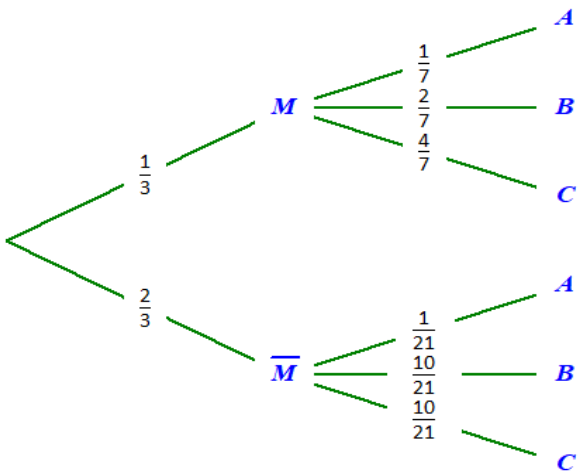
$P_M(C)=1-(P_M(A)+P_M(B))=\frac{4}{7}$.

◄ بالنّسبة للصندوق U_2 وبطريقة مماثلة نجد :

■ $P_{\overline{M}}(A)=\frac{A_2^1}{42}=\frac{1}{21}$ ؛ ■ $P_{\overline{M}}(B)=\frac{A_5^2}{42}=\frac{10}{21}$.

■ $P_{\overline{M}}(C)=1-\left(\frac{1}{21}+\frac{10}{21}\right)=\frac{10}{21}$.

◄ الشجرة تكون كالآتي :



2-) نبيّن أنّ $P(G)=\frac{31}{63}$ ثمّ نحسب $P(H)$.

◄ الحدث العكسي للحاد G هو :

$\overline{G}$: « سحب كريتين من لونين مختلفين » حسب شجلاة الاحتمالات :

$P(\overline{G})=\left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{10}{21}\right)=\frac{32}{63}$. وعليه :

$P(G)=1-\frac{32}{63}$ نجد : $P(G)=\frac{31}{63}$.

◄ حساب $P(H)$.

الحادث العكسي للحادث H هو الحادث A.

لدينا : $P(A)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{10}{21}\right)=\frac{23}{63}$. وعليه :

$$P(H)=1-P(A)=1-\frac{23}{63}=\frac{40}{63}$$

3 -) حساب $P_G(M)$

■ نعلم أنّ : $P_G(M)=\frac{P(G\cap M)}{P(G)}$. ثمّ :

M G : « سحب كرتين من U_1 ومن نفس اللّون » .إذا :

$$P(G\cap M)=P(M\cap A)+P(M\cap B)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}\right)$$

أي $P(G\cap M)=\frac{1}{7}$.

■ في هذه الحالة : $P_G(M)=\frac{1}{7}\times\frac{63}{31}=\frac{9}{31}$.

4 -) ◄ تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X.

يوجد لونان . وبالتّالي قيم المتغيذر العشوائي X هي 1 أو 2 .

■ $(X=1)$: « سحب لون واحد . ومنه : $(X=1)=A$.

إذا : $P(X=1)=P(A)=\frac{31}{63}$.

■ ينتج مباشرة : $P(X=2)=1-P(X=1)=\frac{32}{63}$.

قانون احتمال X ملخّص في الجدول الآتي :

القيم x_i	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{31}{63}$	$\frac{32}{63}$	1

◄ حساب الأمل الرياضياتي $E(63X+1350)$.

$$E(63X+1350)=63E(X)+1350=63\left(\frac{31+64}{63}\right)+1350$$

أي $E(63X+1350)=1445$

يحتوي صندوق U_1 على 5 كريات تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2، 3 و يحتوي صندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2.
(كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس)
نختار عشوائيا أحد الصندوقين و نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.

1) نعتبر الأحداث : A "سحب كريتين تحملان رقمين فرديين"، B "سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين"
C "سحب كريتين إحداهما تحمل رقما فرديا و الأخرى تحمل رقما زوجيا".

أ ـ أنجز الشجرة التي تنمذج هذه التجربة.

بـ ـ بيّن أن : $P(A)=\frac{23}{60}$ و $P(B)=\frac{1}{12}$ ثم أحسب $P(C)$.

2) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثم نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.
X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جداء الرقمين المسجلين عليهما.

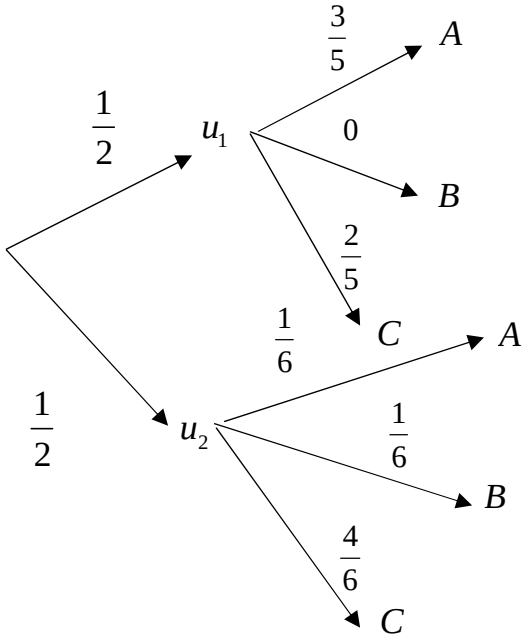
أ ـ برر أن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي : $\{1;2;3;4;6\}$.

بـ ـ عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الحل

1) أ. انجاز شجرة الاحتمالات التي تنمذج التجربة العشوائية المعطاة :

نعتبر الحدث u_1 : " اختيار الصندوق U_1" و نعتبر الحدث u_2 : " اختيار الصندوق U_2"



* نبين أن $p(A)=\frac{23}{60}$: لدينا $p(A)=p(u_1\cap A)+p(u_2\cap A)$ ومنه $p(A)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{23}{60}$

* نبين أن $p(B)=\frac{1}{12}$: لدينا $p(B)=p(u_1\cap B)+p(u_2\cap B)$ ومنه $p(B)=\left(\frac{1}{2}\times 0\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$

* حساب $p(C)$:

الطريقة الأولى : $p(C)=p(u_1\cap C)+p(u_2\cap C)$ ومنه $p(C)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\right)=\frac{8}{15}$

الطريقة الثانية : الحدث C هو الحدث العكسي لكل من A و B و عليه $p(C)=1-\left(p(A)+p(B)\right)=1-\left(\frac{23}{60}+\frac{1}{12}\right)$

ينتج أن $p(C)=\frac{8}{15}$

2)

أ) إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 1 فإن $X=1$

إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 2 فإن $X=4$

إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 1و كرية تحمل الرقم 2فإن $X=2$

إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 1و كرية تحمل الرقم 3فإن $X=3$

إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 2و كرية تحمل الرقم 3فإن $X=6$

و عليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3;4;6\}$

ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$p(X=1)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18}$ ، $p(X=2)=\frac{C_5^1\times C_3^1}{C_9^2}=\frac{5}{12}$ ، $p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_1^1}{C_9^2}=\frac{5}{36}$

$p(X=4)=\frac{C_3^2}{C_9^2}=\frac{1}{12}$ ، $p(X=6)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_9^2}=\frac{1}{12}$

لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	1	2	3	4	6
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\left(1\times\frac{5}{18}\right)+\left(2\times\frac{5}{12}\right)+\left(3\times\frac{5}{36}\right)+\left(4\times\frac{1}{12}\right)+\left(6\times\frac{1}{12}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{85}{36}$

التمرين 08 بكالوريا 2023// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي : ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 1، 1، 2 .
و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 2، 2 و أربع كريات خضراء مرقمة بـ: 1، 2، 2، 2 .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس ونعتبر الأحداث A ، B ، C الآتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ، B " الحصول على كرية خضراء على الأقل "

C " الحصول على كرتين تحملان رقمين زوجيين "

1) أ ـ بيّن أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{4}{15}$ و أن احتمال الحدث B يساوي $\frac{2}{3}$.

بـ ـ أحسب الإحتمالين $P(C)$ و $P(A\cap C)$ ، هل الحدثان A و C مستقلان ؟

جـ ـ استنتج احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون علما أنهما تحملان رقمين زوجيين.

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

أ ـ برر أن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي : $\{2;3;4\}$.

بـ ـ عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الحل

1) * عدد السحبات الممكنة هو : $C_{10}^2=45$

أ. نبين أن $p(A)=\frac{4}{15}$: عدد السحبات المواتية للحدث A هي : $C_3^2+C_3^2+C_4^2=12$ ؛ وعليه $p(A)=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$

- نبين أن $p(B)=\frac{2}{3}$: عدد السحبات المواتية للحدث B هي : $\left(C_4^1\times C_6^1\right)+C_4^2=30$ ؛ وعليه $p(B)=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$
- **طريقة ثانية :** الحدث العكسي للحدث B هو $\overline{B}$ "الكريتين المسحوبتين ليست من اللون الأخضر" و عليه

$p(B)=1-p\left(\overline{B}\right)$ ومنه $p(B)=1-\frac{C_6^2}{45}$ إذن $p(B)=1-\frac{15}{45}=\frac{30}{45}$ أي أن $p(B)=\frac{2}{3}$

ب. حساب $p(C)$: عدد السحبات المواتية للحدث C هي : $C_6^2=15$ ؛ وعليه $p(C)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

- حساب $p(A\cap C)$: الحدث $A\cap C$ هو " الكريتين المسحوبتين من نفس اللون و تحملان رقمان زوجيان"

وعليه عدد السحبات المواتية للحدث $A\cap C$ هي : $C_2^2+C_3^2=4$ ؛ وعليه $p(A\cap C)=\frac{4}{45}$

- بما أن $p(A)\times p(C)=\frac{4}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{45}$ فإن $p(A\cap C)=p(A)\times p(C)$ ومنه الحدثان A و C مستقلان

جـ. بما أن الحدثان A و C مستقلان فإن $p_C(A)=p(A)=\frac{4}{15}$

2) أ.

- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 1 فإن $X=2$
- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 2 فإن $X=4$
- إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 1و كرية تحمل الرقم 2 فإن $X=3$

و عليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{2;3;4\}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$p(X=2)=\frac{C_4^2}{45}=\frac{2}{15}$ ، $p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{45}=\frac{8}{15}$ ، $p(X=4)=\frac{C_6^2}{45}=\frac{5}{15}$

لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

- حساب الامل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\left(2\times\frac{2}{15}\right)+\left(3\times\frac{8}{15}\right)+\left(4\times\frac{5}{15}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{16}{5}$

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي :
ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 1 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 1 ، 1 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ : 1 ، 2 .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس و نعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :
A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ، B " الحصول على كرية حمراء على الأقل"
C "الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 3"

1) أ ـ بيّن أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{4}$. وأن احتمال الحدث B يساوي $\frac{9}{14}$.
بـ ـ أحسب الإحتمال $P(C)$.
2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .
أ ـ برر أن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي : $\{1;2;3;4\}$.
بـ ـ عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الحل

عدد السحبات الممكنة هي $C_8^2 = 28$

1) أ. نبين أن $p(A) = \frac{1}{4}$:

عدد السحبات المواتية للحدث A هي $C_3^2 + C_3^2 + C_2^2 = 7$ ومنه $p(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

- نبين أن $p(B) = \frac{9}{14}$:

عدد السحبات المواتية للحدث B هي $\left(C_3^1 \times C_5^1\right) + \left(C_3^2\right) = 18$ ومنه $p(B) = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

الحدث العكسي للحدث B هو $\overline{B}$ " الكريتين المسحوبتين ليست من اللون الأحمر" و عليه

$p(B) = 1 - p\left(\overline{B}\right)$ ومنه $p(B) = 1 - \frac{C_5^2}{28} = 1 - \frac{10}{28}$ أي أن $p(B) = \frac{9}{14}$

ب. حساب $p(C)$:

عدد السحبات المواتية للحدث C هي $\left(C_5^1 \times C_3^1\right) = 15$ ومنه $p(C) = \frac{15}{28}$

2) أ.

- إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 0 و كرية تحمل الرقم 1 فإن $X = 1$
- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 1 فإن $X = 2$
- إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 1 و كرية تحمل الرقم 2 فإن $X = 3$
- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 2 فإن $X = 4$

وعليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3;4\}$

أ) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$p(X=3)=\dfrac{C_5^1\times C_2^1}{28}=\dfrac{10}{28}$ ، $p(X=2)=\dfrac{\left(C_1^1\times C_2^1\right)+C_5^2}{28}=\dfrac{12}{28}$ ، $p(X=1)=\dfrac{C_1^1\times C_5^1}{28}=\dfrac{5}{28}$

$p(X=4)=\dfrac{C_2^2}{28}=\dfrac{1}{28}$. لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{1}{28}$

- حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\left(1\times\dfrac{5}{28}\right)+\left(2\times\dfrac{12}{28}\right)+\left(3\times\dfrac{10}{28}\right)+\left(4\times\dfrac{1}{28}\right)$ ومنه $E(X)=\dfrac{9}{4}$

التمرين 10 بكالوريا 2023// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

يحتوي كيس على 11 كرية متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، موزعة كما يلي :
ثلاث كريات تحمل الرقم 0 ، ثلاث كربات تحمل الرقم 1 و خمس كريات تحمل الرقم 2 .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس و نعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :
A " الحصول على كريتين رقم كل منهما عدد أولي" ، B " الحصول على كرية واحدة تحمل رقما فرديا "
C "الحصول على كريتين جداء رقميهما معدوم"

1) أ ـ بيّن أن احتمال الحدث A يساوي $\dfrac{2}{11}$ وأن احتمال الحدث B يساوي $\dfrac{24}{55}$.
ب ـ أحسب الاحتمال $P(C)$.
2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جداء الرقمين المسجلين عليهما.
أ ـ برر أن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي : $\{0;1;2;4\}$.
ب ـ عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
جـ ـ أحسب احتمال الحدث : " $e^{X+6}<2023$ " .

الحل

عدد السحبات الممكنة هي $C_{11}^2=55$

1) أ. نبين أن $p(A)=\dfrac{2}{11}$:

عدد السحبات المواتية للحدث A هي $C_5^2=10$ ومنه $p(A)=\dfrac{10}{55}=\dfrac{2}{11}$

- نبين أن $p(B)=\dfrac{24}{55}$:

عدد السحبات المواتية للحدث B هي $C_3^1\times C_8^1=24$ ومنه $p(B)=\dfrac{24}{55}$

ب. حساب $p(C)$:

عدد السحبات المواتية للحدث C هي $\left(C_3^2+C_3^1\times C_8^1\right)=27$ ومنه $p(C)=\dfrac{27}{55}$

2) أ.

- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 0 فإن $X=0$
- إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 0 و كرية تحمل الرقم 1 فإن $X=0$
- إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 0 و كرية تحمل الرقم 2 فإن $X=0$
- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 1 فإن $X=1$
- إذا سحبنا كرية تحمل الرقم 1 و كرية تحمل الرقم 2 فإن $X=2$
- إذا سحبنا كريتين تحملان الرقم 2 فإن $X=4$

وعليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0;1;2;4\}$

ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$p(X=0)=p(C)=\frac{27}{55}$ ، $p(X=1)=\frac{C_3^2}{55}=\frac{3}{55}$ ، $p(X=2)=\frac{C_3^1\times C_5^1}{55}=\frac{15}{55}$

$p(X=4)=\frac{C_5^2}{55}=\frac{10}{55}$. لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\frac{15}{55}$	$\frac{10}{55}$

- حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\left(0\times\frac{27}{55}\right)+\left(1\times\frac{3}{55}\right)+\left(2\times\frac{15}{55}\right)+\left(4\times\frac{10}{55}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{73}{55}$

جـ. حساب $p\left(e^{X+6}<2023\right)$:

$\left(e^{X+6}<2023\right)$ تكافئ $\left(X<\ln(2023)-6\right)$ و بما أن $\ln(2023)-6\simeq 1.61$

فإن $\left(e^{X+6}<2023\right)$ تكافئ ($X=0$ أو $X=1$) و بالتالي : $p\left(e^{X+6}<2023\right)=p(X=0)+p(X=1)$

أي أن $p\left(e^{X+6}<2023\right)=\frac{27}{55}+\frac{3}{55}=\frac{6}{11}$

التمرين 11 بكالوريا 2023// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ، منها كريتان حمراوان مرقمتان بـ : 2 ، -3 وخمس كريات بيضاء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، -2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :

A "الحصول على 3 كريات من نفس اللون " ، B " الحصول على الألوان الثلاثة" .

C "الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها معدوم"

1) أ ـ أحسب $P(A)$ و $P(C)$ ثم بيّن أن : $P(C)=\frac{3}{20}$.

ب ـ أحسب $P(A\cap C)$ ثم استنتج $P_C(A)$.

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصل عليها.

عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبإرجاع .

أحسب إحتمال الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم .

الحل

1) عدد السحبات الكلية هو $C_{10}^{3}=120$

أ. حساب $p(A)$: عدد السحبات المواتية للحدث A هي $C_5^3+C_3^3=11$ ومنه $p(A)=\frac{11}{120}$

- حساب $p(B)$: عدد السحبات المواتية للحدث B هي $C_2^1\times C_5^1\times C_3^1=30$ ومنه $p(B)=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$
- نبين أن $p(C)=\frac{3}{20}$: الحدث C معناه الحصول على $\{-2;0;2\}$ أو $\{-3;1;2\}$ أو $\{1;1;-2\}$ و بالتالي

عدد السحبات المواتية للحدث C هي $\left(C_2^1\times C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_3^1\times C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_3^2\times C_1^1\right)=18$ ومنه $p(C)=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$

ب. حساب $p(A\cap C)$: الحدث $A\cap C$ هو "الحصول على كريات من نفس اللون و مجموع أرقامها معدوم "

أي أن الحدث $A\cap C$ هو "الحصول على كريات من اللون الأبيض و مجموع أرقامها معدوم "

و عليه عدد السحبات المواتية هي $C_3^3+C_2^2\times C_1^1=2$ ومنه $p(A\cap C)=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$

- استنتاج $p_C(A)$: إن $p_C(A)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}$ ومنه $p_C(A)=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{3}{20}}$ أي أن $p_C(A)=\frac{1}{9}$

2) مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1;2;3\}$ لأن :

- إذا سحبنا 3 كريات من نفس اللون فإن $X=1$
- إذا سحبنا كريتين من نفس اللون من بين الكريات الثلاث فإن $X=2$
- إذا سحبنا 3 كريات مختلفة اللون مثنى ، مثنى فإن $X=3$
- تعيين قانون احتمال X :

$p(X=1)=p(A)=\frac{11}{120}$ ، $p(X=3)=p(B)=\frac{30}{120}$ ، $p(X=2)=1-\left(p(X=1)+p(X=3)\right)=\frac{79}{120}$

طريقة ثانية لحساب $p(X=2)$: $p(X=2)=\frac{\left(C_2^2\times C_8^1\right)+\left(C_5^2\times C_5^1\right)+\left(C_3^2\times C_7^1\right)}{120}=\frac{79}{120}$

لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$

- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\left(1\times\frac{11}{120}\right)+\left(2\times\frac{30}{120}\right)+\left(3\times\frac{79}{120}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{77}{30}$

3) عدد السحبات الممكنة هو $10^3=1000$

و عدد السحبات المواتية للحدث D : "حصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم" معناه "حصول على كرية تحمل الرقم0 و كريتين لا تحملان الرقم 0 أو كريتين تحملان الرقم 0 و كرية لا تحمل الرقم 0 أو ثلاث كريات تحمل الرقم 0" و عليه عدد السحبات المواتية هو $\left(2^1\times 8^2\times C_3^1\times C_2^2\right)+\left(2^2\times 8^1\times C_3^2\times C_1^1\right)+2^3=488$

وبالتالي $p(D)=\dfrac{488}{1000}=\dfrac{61}{125}$

طريقة ثانية : الحدث العكسي للحدث D هو $\overline{D}$ "حصول على ثلاث كريات جداء أرقامها غير معدوم" معناه

" حصول على ثلاث كريات لا تحمل الرقم 0" وعليه $p(D)=1-p\left(\overline{D}\right)=1-\dfrac{8^3}{1000}$ أي أن $p(D)=1-\dfrac{64}{125}=\dfrac{61}{125}$

التمرين 12 بكالوريا 2023// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

يحتوي صندوق U على كريتين حمراوين وكريتين خضراوين و يحتوي صندوق V على كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء.
(كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 10 .

إذا تحصلنا على عدد أولي نسحب الكريتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V.

1) نعتبر الأحداث A ، B و C الآتية :

A "سحب كريتين حمراوين" ، B "سحب كريتين خضراوين" و C "سحب كريتين من لونين مختلفين" .

أ- أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.

ب- بيّن أن $P(B)=\dfrac{19}{150}$ و $P(B)=\dfrac{37}{150}$ ثم استنتج $P(C)$.

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المتحصل عليها.

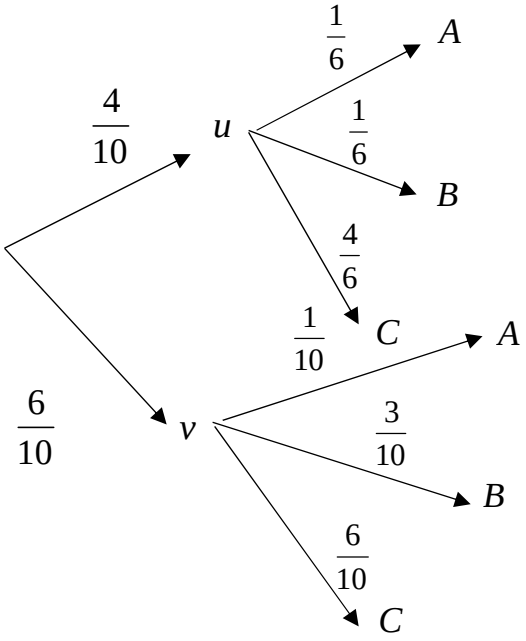
أ- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب- أحسب إحتمال الحدث : " $\ln X\leq 1$ ".

الحل

1) أ. انجاز شجرة الاحتمالات التي تنمذج التجربة العشوائية المعطاة :

نعتبر الحدث u : " السحب من الصندوق U" و نعتبر الحدث v : " اختيار الصندوق V"



ب. نبين أن $p(A)=\frac{19}{150}$:

إن $p(A)=p(u\cap A)+p(v\cap A)$ ومنه $p(A)=\left(\frac{4}{10}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{6}{10}\times\frac{1}{10}\right)$ وعليه $p(A)=\frac{19}{150}$

- نبين أن $p(B)=\frac{37}{150}$:

إن $p(B)=p(u\cap B)+p(v\cap B)$ ومنه $p(B)=\left(\frac{4}{10}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{6}{10}\times\frac{3}{10}\right)$ وعليه $p(B)=\frac{37}{150}$

- استنتاج $p(C)$: بما أن الحدث C هو الحدث العكسي للحدثين A و B فإن :

$p(C)=1-\left[p(A)+p(B)\right]$ وعليه $p(C)=1-\left[\frac{19}{150}+\frac{37}{150}\right]$ أي أن $p(C)=\frac{94}{150}$

2) أ. مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0;1;2\}$

تعيين قانون احتمال X :

$p(X=0)=p(B)=\frac{37}{150}$ ، $p(X=1)=p(C)=\frac{94}{150}$ ، $p(X=2)=p(A)=\frac{19}{150}$

لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{37}{150}$	$\frac{94}{150}$	$\frac{19}{150}$

- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$E(X)=\left(0\times\frac{37}{150}\right)+\left(1\times\frac{49}{150}\right)+\left(2\times\frac{19}{150}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{29}{50}$

ب. حساب $p(\ln X\leq 1)$: $(\ln X\leq 1)$ تكافئ $(0<X\leq e)$

ومنه $(\ln X\leq 1)$ تكافئ $(X=2$ أو $X=1)$ وعليه $p(\ln X\leq 1)=p(X=1)+p(X=2)$

ينتج أن $p(\ln X\leq 1)=\frac{94}{150}+\frac{19}{150}=\frac{113}{150}$

يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 و H_2 و H_3 وامرأتين F_1 و F_2

نعتبر الحوادث A, B, C حيث A " عضوا اللجنة من نفس الجنس "

B " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين " C " H_1 عضو في اللجنة "

(1) (أ) أحسب $p(A)$ و $p(B)$ احتمال الحادثين A, B على الترتيب

(ب) بين ان $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$

(2) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة

(أ) برر أن مجموعة قيم X هي $\{0,1,2\}$

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

الحل

1) A " عضوا اللجنة من نفس الجنس " B " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين " C " H_1 عضو في اللجنة "

اللجنة تتكون من عضوين فقط من بين ثلاثة رجال وامرأتين

(أ) عدد اللجان هو $C_5^2 = 10$

حساب $p(A)$ و $p(B)$:

عدد حالات الحادث A هو : $C_2^2 + C_3^2 = 1 + 3 = 4$ ومنه $p(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

عدد حالات الحادث B : $C_2^1 \times C_3^1 = 6$ ومنه $p(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

(ب) تبيان ان $p(C) = \frac{2}{5}$:

عدد حالات الحادث C هو : $C_1^1 \times C_4^1 = 4$ و منه $p(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

(2) المتغير العشوائي X يرفق بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة

(أ) مجموعة قيم X هي $\{0,1,2\}$ لأنه عند اختيار لجنة يمكن ان لا يكون فيها أي رجل أي $X = 0$ او رجل واحد أي $X = 1$ او رجلين أي $X = 2$

(ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X:

$P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ و $P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ و $P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$	$\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

حساب الأمل الرياضياتي : $E(X) = 0.\frac{1}{10} + 1\frac{3}{5} + 2\frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها باللمس . مكتوب على كل منها سؤال واحد ، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ : 1 ، 2 و 3 وأربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ : 1، 2 ، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ : 1 و 2 .

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية : A,B,C حيث A " سحب سؤال في الهندسة "

B " سحب سؤال في التحليل " C " سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا "

(1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$ احتمال الحوادث A,B,C على الترتيب

(2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 .

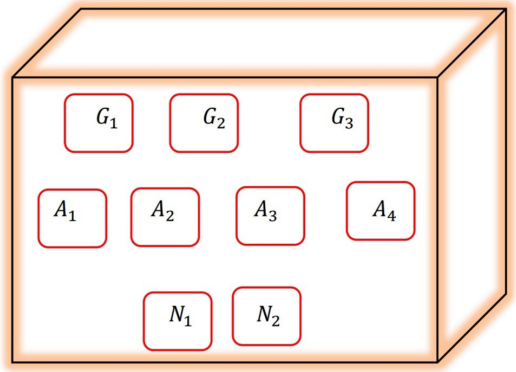
(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها

(أ) برر ان مجموعة قيم X هي $\{1,2,3,4\}$

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

(ج) استنتج قيمة $E(2021X+1442)$

الحل



نسمي G البطاقات التي تحمل أسئلة الهندسة وحرف A للبطاقات التي تحمل أسئلة الجبر وحرف N لأسئلة التحليل

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة : الحادث A " سحب سؤال في الهندسة "

B " سحب سؤال في التحليل " C " سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا "

1) حساب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$:

$p(A)=\frac{3}{9}$ و $p(B)=\frac{2}{9}$ و $p(C)=\frac{2}{9}$

2) حساب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 ونسميه الحادث D : ومعناه سحب بطاقة تحمل الارقام الاخرى ومنه $p(D)=\frac{6}{9}$

3) (أ) تبرير أن مجموعة قيم X هي $\{1,2,3,4\}$: إن سحب أي بطاقة يعطي إما رقم 1 أو 2 أو 3 أو 4 وبالتالي قيم X هي $\{1,2,3,4\}$

ب) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

$X=x_i$	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$

ج) استنتاج قيمة $E(2021X+1442)$: باستعمال خواص الأمل الرياضي نجد :

$$E(2021X+1442)=2021\times E(X)+1442=2021\times\frac{16}{9}+1442=\frac{51377}{9}$$

كيس به كرية 12 متماثلة لا نفرّق بينها باللمس .
كل من الكريات الإثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية : 1 ، 2 ، 3 و 4 .
نسحب عشوائيا كريّة واحدة من الكيس .

نرمز بـ P_i إلى إحتمال سحب كريّة رقمها i ، حيث : $P_1=\frac{1}{3}$ ، $P_2=\frac{1}{6}$ ، $P_3=\frac{1}{4}$ و $P_4=\frac{1}{4}$.

1) وزع الكريات الإثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 4 .
2) أحسب إحتمال كلا من الأحداث A ، B و C الآتية : A " سحب كريّة تحمل رقما فرديا " .
B " سحب كريّة تحمل رقما من أرقام نظام التعداد ذي الأساس 4 " .
C " سحب كريّة رقمها حل للمعادلة $x^2=2^x$ " .
3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكل سحب لكريّة الرقم الذي تحمله .
عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

الحل

لدينا $P_1=\frac{1}{3}$ و $P_2=\frac{1}{6}$ و $P_3=\frac{1}{4}$ و $P_4=\frac{1}{4}$

1) توزيع الكريات حسب الأرقام : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ;1 ; 2 ; 2 ;3;3;3;2 ; 4;4; 4;3;3;3;2 ; 4;4; 4;3;3;3;2 ; 4;4 .

عدد الكريات التي تحمل الرقم 1 هو 4 . و عدد الكريات التي تحمل الرقم 2 هو 2
وعدد الكريات التي تحمل الرقم 3 هو 3 و عدد الكريات التي تحمل الرقم 4 هو 3

2)حساب احتمال الحوادث :

(.) $P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ لأن $A=\{1\ ;\ 3\}$ (الأعداد الفردية هي 1 و 3)

(..) (أرقام النظام ذي الأساس 4 من بين أرقام الكريات هي 1 و 2 و 3)

ومنه $P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ لأن $B=\{1;2\ ;\ 3\}$

و $P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ $C=\{2\ ;4\}$ (لأن $2^2=2^2$ و $4^2=2^4$)

3) قانون الاحتمال للمتغير X : قيم المتغير العشوائي هي : $\{1\ ،\ 2\ ،\ 3\ ،\ 4\}$

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

الأمل الرياضياتي : $E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{29}{12}$

التمرين 16 بكالوريا 2021// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و أربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 .

1) بيّن أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : 42 .

2) نعتبر الأحداث الآتية :

A : " اللجنة من نفس الجنس " .

B : " اللجنة من جنسين مختلفين " .

C : " H_1 هو الرئيس " .

E : " اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1 " .

أ ـ أحسب $P(A)$ إحتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$.

بـ ـ أحسب $P(C)$ و $P(E)$.

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها .

عيّن قانون احتمال X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

الحل

1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو عدد ترتيبات عنصرين من 7 أي $A_7^2 = 42$

2)(أ)- حساب الاحتمالات :

$P(A) = \dfrac{A_3^2 + A_4^2}{42} = \dfrac{3+15}{42} = \dfrac{3}{7}$ والحادثتان A و B متعاكستان ومنه $P(\mathrm{B}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$

ب)-حساب $P(C)$ (H_1 رئيس تختار نائبه من بين 6 أشخاص الباقية) :

$$P(C) = \frac{A_1^1 \times A_6^1}{42} = \frac{1\times 6}{42} = \frac{1}{7}$$

حساب $P(E)$:

(اللجنة لا تضم H_1 و F_1 يعني أن أعضاء اللجنة نختارها من بين 5 أشخاص الباقية A_5^2 رئيس ونائبه).

$$P(E) = 2\times\frac{A_5^2}{42} = \frac{40}{42} = \frac{20}{21}$$

أو بطريقة أخرى $\overline{E} = \{F_1H_1\,;\,H_1F_1\}$ حالتان فقط ومنه $P(\overline{E}) = \dfrac{2}{42}$ وبا لتالي $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \dfrac{2}{42} = \dfrac{40}{42} = \dfrac{20}{21}$

3)المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها اي ان قيم X هي : 0 أو 1 أو 2 لان اللجنة تتشكل من عضوين فقط

قانون الاحتمال للمتغير X : $P(X=0) = \dfrac{A_4^2}{42} = \dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$ و $P(X=1) = P(B) = \dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$

و $P(X=2) = \dfrac{A_3^2}{42} = \dfrac{6}{42} = \dfrac{1}{7}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

الأمل ألرياضياتي : $E(X) = 0\left(\dfrac{2}{7}\right) + 1\left(\dfrac{4}{7}\right) + 2\left(\dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{6}{7}$

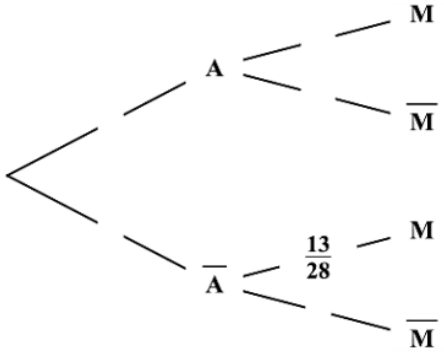
يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء و يحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء و كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الوعائين بالكيفية التالية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة و مرقمة من 1 إلى 6 ، إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكرتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V .

نسمي A الحدث : "الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5" .

نسمي M الحدث : "الحصول على كريتين من نفس اللون" .



1) تحقق $P(\overline{A})$ أن إحتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من U ، بيّن أن إحتمال أن تكونا من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$.

3) أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة ثم أكملها و استنتج $P(M)$.

4) أحسب $P_{\overline{M}}(A)$ إحتمال السحب من الوعاء U علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللون .

الحل

الوعاء U يحوي 4R و 6N والوعاء V يحوي 5R و 3N

1) التحقق أن $P\left(\overline{A}\right)$ احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$:

A الحدث : " الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5 "

الحادث $\overline{A}$ هو الحادث المعاكس للحادث A أي : " الحصول على أحد الأرقام 1 أو 2 أو 4 أو 6

" هناك 4 إمكانيات لسحب بطاقة من كيس فيه 6 بطاقات . إذن : $P\left(\overline{A}\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

نسمي M الحدث: " الحصول على كريتين من نفس اللون "

2) عدد إمكانيات سحب كريتين في آن واحد من الوعاء U هو $C_2^{10}=45$

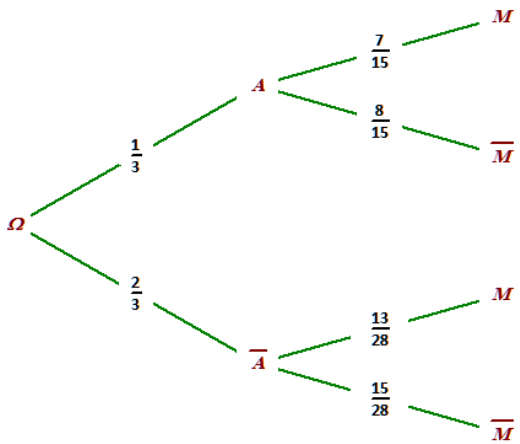
الكريتان المسحوبتان من U. احتمال ان تكونا من نفس اللون اي سحب كريتين حمراء أو كريتين سوداء

ومنه $P_U(M)=P_A(M)=\frac{C_4^2+C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{6+15}{45}=\frac{7}{15}$

3) أ) تكملة شجرة الاحتمالات :

$p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P_A(M)=\frac{7}{15}$ ومنه $P_A\left(\overline{M}\right)=1-P_A(M)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$



$$P_{\overline{A}}\left(\overline{M}\right)=1-P_{\overline{A}}\left(M\right)=1-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$$

ب) استنتاج $p\left(M\right)$:

$$p\left(M\right)=p\left(A\cap M\right)+p\left(\overline{A}\cap M\right)=p\left(A\right)\times p_{A}\left(M\right)+p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}\left(M\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{2}{3}\times\frac{13}{28}=\frac{293}{630}$$

4) حساب $P_{\overline{M}}\left(A\right)$ احتمال السحب من الوعاء U علما ان الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللون :

$$P_{\overline{M}}\left(A\right)=\frac{P\left(\overline{M}\cap A\right)}{P\left(\overline{M}\right)}\quad\text{و}\quad P\left(\overline{M}\right)=1-P\left(M\right)=1-\frac{293}{630}=\frac{337}{630}$$

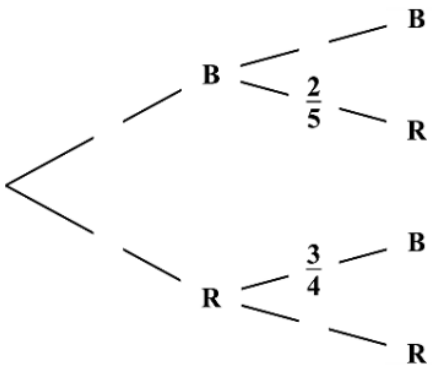
$$P_{\overline{M}}\left(A\right)=\frac{\frac{8}{45}}{\frac{337}{630}}=\frac{8}{45}\times\frac{630}{337}=\frac{112}{337}\quad\text{اذن}\quad P\left(\overline{M}\cap A\right)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{45}\quad\text{و}$$

التمرين 18 بكالوريا 2020// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية : إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس .

1) أ ـ أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة ثم أكملها.

B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء و R إلى الحصول على كرية حمراء .



ب ـ أحسب إحتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء .

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

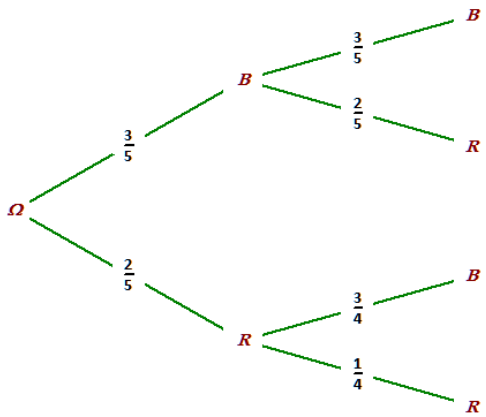
أ ـ عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X .

ب ـ بيّن أن : $P(X=1)=\frac{27}{50}$ ، ثم عرّف قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X .

جـ ـ أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X .

الحل

(3B) و (2R) ، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس .



1 أ) تكملة شجرة الاحتمالات :

إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها الى الكيس فيكون عدد الكريات البيضاء في السحب الثاني هو 3 .

عند سحب الكرية الأولى اذا كانت بيضاء فان $P(B)=\frac{3}{5}$

وبما ان $P(R)+P(B)=1$ فان

$$P(R)=1-P(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

وهكذا نكمل مع سحب الكرية الثانية فنحصل على الشجرة التالية

ب) حساب احتمال ان تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء :

من الشجرة نجد أن احتمال ان تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء هو :

$$P_2=P(B)\times P_B(R)+P(R)\times P_R(R)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{17}{50}$$

2) أ) X هو المتغير العشوائي قيمته عدد الكريات الحمراء المسحوبة فتكون مجموعة قيمه هي: $\{0,1,2\}$

(ب) إثبات أن $p(X=1)=\frac{27}{50}$:

الحادث $X=1$ يعني الحصول على كرة واحدة حمراء عند سحب كريتين . ومن الشجرة نجد

$$p(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{50}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$p(X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$ و $p(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$X=x_i$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{1}{10}$

ج) حساب $E(X)$ الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=0\times\frac{9}{25}+1\times\frac{27}{50}+2\times\frac{1}{10}=\frac{37}{50}$$

التمرين 19 بكالوريا 2020// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 3 ، 2 .
الكريات لا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من هذا الكيس .

1) نعتبر الحدثين : A " الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم " و B " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون " .
أ ـ أحسب إحتمال كلا من الحدثين A و B .

ب ـ بيّن أن إحتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم و مختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

جـ ـ استنتج إحتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون .

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين .
عرّف قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X .

3) في لعبة ، يقوم لاعب بسحب كريتين : إذا كان جداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار ، إذا كان جداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار و إذا كان جداء رقميهما 9 يخسر 130دينار . (x و y عددان طبيعيان غير معدومين)
عيّن قيمة كلا من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة .

الحل

$4R$مرقمة :2 ، 2 ، 2 ، 2 و $3V$ مرقمة بـ :3 ، 3 ، 2 . .نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين من هذا الكيس .

1) A " الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم " و B " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون"

أ) حساب احتمال كلا من الحدثين A و B :

عدد إمكانيات سحب كريتين من الكيس هو $C_7^2=21$

–" سحب كريتين تحملان نفس الرقم" تعني (كريتان تحملان رقم 2) او (كريتان تحملان الرقم 3)

عدد الامكانيات هو $C_5^2+C_2^2=10+1=11$ ومنه $p(A)=\frac{11}{21}$

– "سحب كريتين مختلفتين في اللون" أي (كرية حمراء و كرية خضراء)

عدد الامكانيات هو $C_4^1\times C_3^1=4\times 3=12$ ومنه $p(B)=\frac{12}{21}$

ب) تبيان أن احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$:

هذا الحادث هو $A\cap B$ (كرية حمراء تحمل رقم 2 و كرية خضراء تحمل رقم 2) وعدد امكانياته هو : $C_4^1\times C_1^1$

$$p(A\cap B)=\frac{C_4^1\times C_1^1}{21}=\frac{4}{21}$$

(ج) احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون : هذا الحادث هو $A\cup B$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{11}{21}+\frac{12}{21}-\frac{4}{21}=\frac{19}{21}$$

2) Xالمتغير العشوائي : " جداء الرقمين الظاهرين على الكريتين" فقيمه هي : 4 أو 6 أو 9 .

$p(X=4)=\frac{C_5^2}{21}=\frac{10}{21}$ و $p(X=6)=\frac{C_2^1\times C_5^1}{21}=\frac{10}{21}$ و $p(X=9)=\frac{C_2^2}{21}=\frac{1}{21}$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

$x_i=$	4	6	9
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

3) إذا كان جداء رقميهما 4 يربح x^2دينار وإذا كان جداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار واذا كان جداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار تكون اللعبة عادلة اذا كان $E(X)=0$.

حيث $E(X)=x^2\times p(X=4)+(-y^2)\times p(X=6)+(-130)\times p(X=9)=0$

ومنه $x^2\times\frac{10}{21}-y^2\times\frac{10}{21}+(-130)\times\frac{1}{21}=0$ أي $10x^2-10y^2-130=0$ ومنه $x^2-y^2=13$

أي $(x-y)(x+y)=13$ ومنه $\begin{cases}x+y=13\\x-y=1\end{cases}$ وبالجمع نجد $2x=14$ وبالتالي $x=7$ ومنه $y=6$

او $\begin{cases}x-y=13\\x+y=1\end{cases}$ وبالجمع نجد $2x=14$ وبالتالي $x=7$ ومنه $y=-6$ مرفوض لان x و y عددان طبيعيان

التمرين 20 بكالوريا 2020// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

يحتوي كيس على كريتين خضراوين تحملان الرقمين 1، 2 و ثلاث كريات كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 2 و أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2، 3، 3، 4. (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

I) نسحب من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

1) أحسب إحتمال كلا من الحدثين A و B التاليين:

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" و B "الحصول على كرية بيضاء على الأقل".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ- بيّن أن $P(X=3)=\frac{3}{7}$، ثم عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ب- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

II) نسحب الأن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث "الحصول على ثلاث أرقام جداؤها زوجي".

أحسب إحتمال C.

الحل

$2V$ مرقمتان 1، 2 و $3R$ مرقمة بـ: 1، 2، 2. و $4B$ مرقمة: 2، 3، 3، 4

I) نسحب 3 كريات في آن واحد من الكيس:

عدد الحالات الكلية للسحب هو $C_9^3=84$

1) حساب احتمال الحدث A "الحصول على 3 كريات من نفس اللون" أي $3R$ او $3B$

عدد الحالات الملائمة هو $C_3^3+C_4^3=1+4=5$ ومنه $P(A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

حساب احتمال الحدث B:

"الحصول على كرية بيضاء على الأقل" أي $(1B$ و $2\overline{B})$ او $(2B$ و $1\overline{B})$ او $(3B)$

عدد الامكانيات هو: $C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3=4\times 10+6\times 5+4=74$

ومنه $P(B)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3}{C_9^3}=\frac{74}{84}=\frac{37}{42}$

2) X المتغير العشوائي (أكبر الأرقام المحصل عليها): قيمه هي 2 أو 3 أو 4.

أ) تبيان أن $P(X=3)=\frac{3}{7}$

الحادث $(X=3)$ معناه (كرية تحمل رقم 3 وكريتين تحملان أرقام أخرى ماعدا الرقم 3 و 4) أو (كريتين تحملان الرقم 3 وكرية تحمل رقما أخر ماعدا 4)

$$P(X=3)=\frac{C_2^1\times C_6^2+C_2^2\times C_6^1}{C_9^3}=\frac{36}{84}=\frac{3}{7}$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

$$P(X=2)=\frac{C_2^1\times C_4^2+C_2^2\times C_4^1+C_4^3}{C_9^3}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21} \quad \text{و} \quad P(X=4)=\frac{C_1^1\times C_8^2}{C_9^3}=\frac{28}{84}=\frac{1}{3}$$

$X=x_i$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{36}{84}$	$\frac{28}{84}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X:

$$E(X)=2\times\frac{20}{84}+3\times\frac{36}{84}+4\times\frac{28}{84}=\frac{65}{21}$$

II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع : عدد الحالات الكلية للسحب هو : $9\times8\times7=504$

C الحدث " الحصول على 3 أرقام جداؤها عدد زوجي "

نعتبر الحادث المعاكس $\overline{C}$ " الحصول على 3 أرقام جداؤها عدد فردي " أي سحب 3 أرقام فردية من 4 أرقام تحمل رقما فرديا . عدد إمكانيات الحادث $\overline{C}$ هو : $A_4^3=24$ وبالتالي $P(\overline{C})=\frac{24}{504}=\frac{1}{21}$

إذن احتمال الحدث C هو : $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$

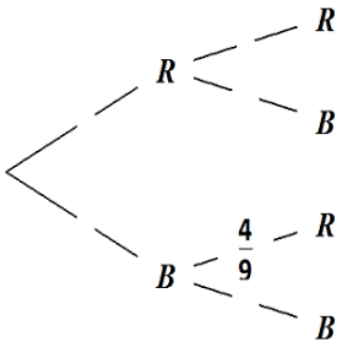
ملاحظة : يمكن استعمال الشجرة : الحادث $\overline{C}$ " الحصول على 3 كريات تحمل رقم فردي " (impair)

$\xrightarrow{\frac{4}{9}} imp \xrightarrow{\frac{3}{8}} imp \xrightarrow{\frac{2}{7}} imp$ ومنه $P(\overline{C})=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$ اذن $P(C)=1-P(\overline{C})=\frac{20}{21}$

التمرين 21 بكالوريا 2020// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نسحب من الصندوق كرية واحدة بحيث : إذا ظهرت كرية حمراء نعيدها إلى الصندوق و نضيف له كرية بيضاء و إذا ظهرت كرية بيضاء نعيدها إلى الصندوق و نضيف له كرية حمراء ، و نكرر العملية مرة ثانية .



1) أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذ هذه التجربة ثم أكملها .

2) بيّن أن إحتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

3) أحسب إحتمال أن يوجد بالصندوق 4 كريات حمراء على الأقل .

4) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية .

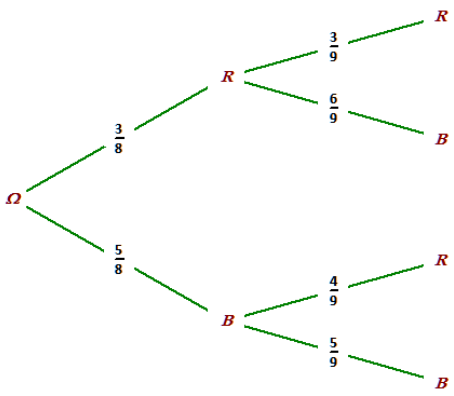
أ- برّر أن قيم المتغيّر العشوائي هي : 5 ، 6 و 7 .

ب- عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

الحل

$5B$ و $3R$

نسحب من الصندوق كرية واحدة . اذا ظهرت حمراء نعيدها الى الصندوق ونضيف له كرية بيضاء وإذا ظهرت بيضاء نعيدها الى الصندوق ونضيق له كرية حمراء ثم نكرر العملية مرة ثانية .



1) شجرة الاحتمالات :

2)تبيان أن احتمال الحادث A " أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء" هو $\frac{1}{8}$:

حتى يتحقق الحادث A يجب ان تكون الكرية المسحوبة الاولى حمراء وأن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء .

المسار الذي يحقق هو $R \to R$. أي $p(A)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{8}$

3) حساب احتمال الحادث B " أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الاقل" :

يتحقق الحادث B في المسارات التالية : $R \to B$ أو $B \to R$ او $B \to B$

ومنه $P(B)=\frac{3}{8}\times\frac{6}{9}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{9}=\frac{18+20+25}{72}=\frac{63}{72}=\frac{7}{8}$

4) المتغير العشوائي X قيمه "عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية" :

ا) قيم المتغير العشوائي X هي : 5 ، 6 ، 7 : لان

اذا كانت الكرية المسحوبة الاولى بيضاء والثانية بيضاء يكون عدد الكريات البيضاء في الصندوق هو 5

اذا كانت الكرية المسحوبة الاولى بيضاء والثانية حمراء يكون عدد الكريات البيضاء في الصندوق هو 6

اذا كانت الكرية المسحوبة الاولى حمراء والثانية حمراء يكون عدد الكريات البيضاء في الصندوق هو 7

ب)تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

الحادث $X=5$ أي المسار $B \to B$: $p(X=5)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{9}=\frac{25}{72}$

الحادث $X=6$ أي المسار $B \to R$ او $R \to B$: $p(X=6)=\frac{3}{8}\times\frac{6}{9}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{38}{72}$

الحادث $X=7$ أي المسار $R \to R$: $p(X=7)=\frac{3}{8}\times\frac{3}{9}=\frac{9}{72}$

$X=x_i$	5	6	7
$p(X=x_i)$	$\frac{25}{72}$	$\frac{38}{72}$	$\frac{9}{72}$

حساب الامل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=5\times\frac{25}{72}+6\times\frac{38}{72}+7\times\frac{9}{72}=\frac{52}{9}$$

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها : n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n \geq 2$)

و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ و π و كريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق .

1) أ ـ أحسب إحتمال كلا من الحدثين A و B حيث :

A "سحب كريتين من نفس اللون" و B "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون" .

بـ ـ عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $P(A)=\frac{17}{55}$.

2) نفرض فيما يلي : $n=5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين .

نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد : $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

أ ـ برّر أن قيم المتغيّر العشوائي X هي : $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ و 1 .

بـ ـ بيّن أن : $P(X=0)=\frac{27}{55}$.

جـ ـ عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الحل

$n.B$ تحمل العدد π $(n \geq 2)$ و $4.R$ تحمل الأعداد : $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، π و $2V$ تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$.

عدد الامكانيات الكلية لسحب كرتين في آن واحد هو : $C_{n+6}^2=\frac{(n+6)!}{2!(n+6-2)!}=\frac{(n+6)(n+5)}{2}$

1)أ) حساب احتمال الحدث A : " سحب كرتين من نفس اللون " أي (($2B$) او ($2R$) او ($2V$))

عدد إمكانيات الحدث A هو :

$$C_n^2+C_4^2+C_2^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}+6+1=\frac{n(n-1)+14}{2}=\frac{n^2-n+14}{2}$$

ومنه احتمال الحدث A هو : $p(A)=\frac{C_n^2+C_4^2+C_2^2}{C_{n+6}^2}=\frac{\frac{n^2-n+14}{2}}{\frac{(n+6)(n+5)}{2}}=\frac{n^2-n+14}{(n+6)(n+5)}$

– حساب احتمال الحدث B : " سحب كرتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون "

الحدث B هو (($2B$ تحملان العدد π) او ($2R$ تحملان $\frac{\pi}{2}$)) : عدد امكانياته هو :

$$C_n^2+C_2^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}+1=\frac{n(n-1)+2}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$$

ومنه احتمال الحادث B هو : $p(B)=\frac{C_n^2+C_4^2}{C_{n+6}^2}=\frac{n^2-n+2}{(n+6)(n+5)}$

ب) تعيين العدد n حتى يكون $P(A)=\frac{17}{55}$:

$P(A)=\frac{17}{55}$ تعني $\frac{n^2-n+14}{(n+6)(n+5)}=\frac{17}{55}$ أي $55(n^2-n+14)=17(n^2+11n+30)$

ومنه نجد $19n^2-121n+130=0$ ومميزها $\Delta=4761$ ومنه للمعادلة حلان هما : $n=5$ او $n=\frac{26}{19}\notin N$ (مرفوض)

2) أ) تبرير أن قيم X هي $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1 :

ومنه $n=5$ $\Omega=\left\{\pi,\pi,\pi,\pi,\pi,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}$ عدد عناصرها 11 .

المخارج هي : (π,π) او $(\pi,\frac{\pi}{2})$ او $(\pi,\frac{\pi}{3})$ او $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})$ او $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ او $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

ومنه قيم الجداء $\cos(\alpha)\times\cos(\beta)$ هي :

$\cos(\pi)\times\cos(\pi)=1$ او $\cos(\pi)\times\cos(\frac{\pi}{2})=0$ او $\cos(\pi)\times\cos(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$

او $\cos(\frac{\pi}{2})\times\cos(\frac{\pi}{3})=0$ او $\cos(\frac{\pi}{3})\times\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$ او $\cos(\frac{\pi}{2})\times\cos(\frac{\pi}{2})=0$

اذن قيم المتغير العشوائي X هي $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1 :

ب) تبيان ان $P(X=0)=\frac{27}{55}$:

الحدث $(X=0)$ يعني (سحب كرية تحمل $\frac{\pi}{2}$ واخرى تحمل عدد أخر) أو (كريتان تحملان $\frac{\pi}{2}$)

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_8^1+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{3\times8+3}{55}=\frac{27}{55}$$

ج) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

$P(X=1)=P(\pi,\pi)=\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{15}{55}$ و $P(X=-\frac{1}{2})=P(\pi,\frac{\pi}{3})=\frac{C_6^1\times C_2^1}{C_{11}^2}=\frac{12}{55}$

$P(X=\frac{1}{4})=P(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{C_2^2}{C_{11}^2}=\frac{1}{55}$

$X=x_i$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$
$p(X=x_i)$	$\frac{12}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{15}{55}$	$\frac{1}{55}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=-\frac{1}{2}.\frac{12}{55}+0+\frac{15}{55}+\frac{1}{4}.\frac{1}{55}=\frac{37}{220}$

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث :
A : "سحب كريتين من نفس اللون" ، B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم"

1) بيّن أن إحتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$ و احسب إحتمال الحادثة B .
2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟
3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .
عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي و أحسب أمله الرياضياتي . $E(X)$.

الحل

1) الحدث A سحب كريتين من نفس اللون أي اما كريتان حمراء من بين 5 حمراء او كريتان خضراء من بين 7 خضراء

ومنه $P(A)=\frac{C_5^2+C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{10+21}{78}=\frac{31}{66}$ ، $P(B)=\frac{C_8^2+C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{28+6}{78}=\frac{34}{78}=\frac{17}{39}$

2) الاحتمال المطلوب هو احتمال شرطي أي $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ و $A\cap B$ هو الحدث كريتان من نفس اللون

ونفس الرقم أي (اما 2 حمراء تحمل الرقم 1 او 2 خضراء تحمل الرقم 1 او 2 خضراء تحمل رقم 2)

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_4^2+C_4^2+C_3^2}{66}}{\frac{31}{66}}=\frac{\frac{15}{66}}{\frac{31}{66}}=\frac{15}{31}$$

3) X المتغير العشوائي والذي يساوي عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس بعد سحب كريتان في آن واحد اذن: $X=\{3;4;5\}$

$P(X=3)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$ ، $P(X=4)=\frac{C_5^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{35}{66}$ ، $P(X=5)=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$

ويكون القانون ملخص في الجدول التالي:

$X=x_i$	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$

الأمل الرياضياتي هو :

$$E(X)=3\times\frac{10}{66}+4\times\frac{35}{66}+5\times\frac{21}{66}=\frac{275}{66}$$.

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

1) عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

ما إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي ؟

الحل

الكريات أرقامها: $\{0;0;1;1;1;2;2;2;2;2\}$

1) من خلال هذه الأرقامفان ناتج جداء أي ثلاث ارقام منهاهو: 0 أو 1 أو 2 أو 4 أو 8

ومنه قيم المتغير العشوائي هي $X=\{0;1;2;4;8\}$

الحادث : $(X=0)$ هو سحب كرتين رقميهما 0 وأخرى غير 0 أو كرة تحمل الرقم 0 وكرتين لا تحملان الرقم 0

إذن : $P(X=0)=\frac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{56+8}{120}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}$

الحادث: $(X=1)$: أي سحب ثلاث كرات تحمل الرقم 1 : ومنه $P(X=1)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$

الحادث $(X=2)$ هو سحب كرتين تحملان الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 ومنه

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$$

الحادث $(X=4)$ هو سحب كرتين تحملان الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 1 ومنه

$$P(X=4)=\frac{C_3^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

الحادث $(X=8)$ هو سحب ثلاث كرات تحمل الرقم 2 ومنه $P(X=8)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$.

فيكون قانون احتمال المتغير العشوائي X ملخص في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	4	8	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{64}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$	1

الأمل الرياضياتي: $E(X)=0\times\frac{64}{120}+1\times\frac{1}{120}+2\times\frac{15}{120}+4\times\frac{30}{120}+8\times\frac{10}{120}=\frac{231}{120}=\frac{77}{40}$.

2) الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما زوجية : نعلم ان عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا هو 7 حيث كريتين تحملان الرقم 0 وخمس كريات تحمل الرقم 2 أي أن كل منها اما رقمها 0 او 2 ومنه :

$P=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$.

3)نسمي A الحدث مجموع رقمي الكريتين فردي و الحدث B جداؤهما زوجي: (السحب على التوالي دون ارجاع)

$A\cap B$ هو الحدث الحصول على كريتين مجموع رقميهما فردي وجداؤهما زوجي أي 0 مع 1 مضروبة في 2 لان الترتيب مهم او 1 مع 2كذلك مضروبة في 2 ومنه $P(A\cap B)=\frac{A_2^1\times A_3^1\times 2+A_3^1\times A_5^1\times 2}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

أيضا B معناه إما تحملان الرقم 0 او الأولى رقم 0 والثانية 1 او الاولى 0 والثانية 2 او الاولى 1 والثانية 2 او كلاهما2 فنجد:

$P(B)=\frac{A_2^2+\left(A_2^1\times A_3^1\times 2\right)+\left(A_2^1\times A_5^1\times 2\right)+\left(A_3^1\times A_5^1\times 2\right)+A_5^2}{A_{10}^2}=\frac{2+12+20+30+20}{90}=\frac{84}{90}=\frac{14}{15}$

ومنه فان الاحتمال المطلوب هو: $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{14}{15}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$.

التمرين 25 بكالوريا 2019// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية . إختر الإجابة الصحيحة مبررا إختيارك .

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و كريتين سوداوين تحملان الرقمين1 ، 2 .

(الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا و في آن واحد.

X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

1) قيم المتغيّر العشوائي X هي : أ) $\{1;2;3\}$ ب) $\{0;2;3\}$ جـ) $\{0;1;2\}$.

2) الأمل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو : أ) $E(X)=\frac{4}{5}$ ب) $E(X)=\frac{6}{5}$ جـ) $E(X)=\frac{11}{10}$.

3) إحتمال " الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة "

يساوي : أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ جـ) $\frac{3}{5}$.

4) إحتمال " باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1 "

يساوي : أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ جـ) $\frac{1}{5}$.

الحل

عدد الكرات بالألوان $3B$ و $2N$

1)قيم المتغير X هيعدد الكرات السوداء المسحوبة و منه قيم X هي 0 و 1 و 2 و منه الإجابة الصحيحة هي (ج)

2)الأمل ألرياضياتي : عدد الحالات الممكنة $C_5^3=10$

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{10}=\frac{1}{10}$ و $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_3^2}{10}=\frac{6}{10}$ و $P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_3^1}{10}=\frac{3}{10}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

الأمل ألرياضياتي : هو $E(X)=0\frac{1}{10}+1\frac{6}{10}+2\frac{3}{10}=\frac{0+6+6}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$ الإجابة الصحيحة هي (ب) .

(3)احتمال الحصول على كرة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 هو $P(A)=\frac{C_1^1\times C_3^2+C_2^2\times C_3^1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

و منه الإجابة الصحيحة هي (ج).

4)باقي مجموع المربعات :

$1^2+2^2+2^2\equiv 9[13]$ أو $1^2+2^2+3^2\equiv 1[13]$ أو $1^2+2^2+1^2\equiv 6[13]$

أو $1^2+1^2+3^2\equiv 11[13]$ أو $2^2+2^2+3^2\equiv 4[13]$

و احتمال ان يكون مجموع المربعات باقي قسمة على 13 هو 1 هي الحالة : $1^2+2^2+3^2\equiv 1[13]$

ومنه $P(B)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ الإجابة الصحيحة هي (أ)

التمرين 26 بكالوريا 2019// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ،4 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام1 ، 2 ، 3 و كريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق عند اللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الكيس .

1) أحسب إحتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرية بيضاء واحدة " .

B : " الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر " .

C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية " .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية .

أ ـ عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون إحتماله .

بـ ـ أحسب $P(X^2-X\leq 0)$.

الحل

كريتان سوداوان $2N$ وثلاث كرات حمراء $3R$ و أربعة بيضاء $4B$

عدد الحالات الممكنة للسحب هو $C_9^3=84$

1)حساب الاحتمالات (A) (الحصول على كرة بيضاء) :

$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{84}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$$

(B)(كريتان بيضاء على الأكثر) :

$$P(B)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_4^1\times C_5^2+C_5^3}{84}=\frac{80}{84}=\frac{20}{21}$$

(C):(ثلاث كرات ذات ارقام غير أولية) أي سحب ثلاث كرات من الأرقام : 1 ، 4 ، 1 ، 1

$$P(C)=\frac{C_4^3}{84}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$$

2)(أ)قيم المتغير العشوائي X هي قيم المجموعة $\{3,2,1,0\}$

قانون الاحتمال : الحادث $(X=0)$معناه لا نحصل على أي كرة تحمل رقما أوليا ومنه $P(X=0)=\frac{C_4^3}{84}=\frac{4}{84}$

وكذلك الحادث $(X=1)$معناه الحصول على كرة واحدة تحمل رقما فرديا ومنه $P(X=1)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{84}=\frac{30}{84}$

وأيضا $P(X=2)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{84}=\frac{40}{84}$ و كذلك $P(X=3)=\frac{C_5^3}{84}=\frac{10}{84}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

حساب الأمل الرياضياتي :

$$E(X)=\frac{0+30+80+30}{84}$$ أي أن $E(X)=\frac{140}{84}$ و منه $E(X)=\frac{5}{3}$.

ب)حساب $P(X^2-X\le 0)$:

لدينا $X^2-X\le 0$ يكافئ $(X-1)X\le 0$ يعني أن $0\le X\le 1$ و منه $P(X^2-X\le 0)=\frac{4}{84}+\frac{30}{84}$

أي أن $P(X^2-X\le 0)=\frac{34}{84}$ إذن $P(X^2-X\le 0)=\frac{17}{42}$.

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و ثلاث كريات سوداء و يحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين . (كل الكريات متشابهة لا نفرق عند اللمس)

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 .

و في باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ :

A : " سحب كريتين حمراوين " .

B : " سحب كريتين سوداوين " .

C : " سحب كريتين من لونين مختلفين " .

1) أنقل و أكمل شجرة الإحتمالات .

2) أحسب إحتمالات الأحداث A ، B و C .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

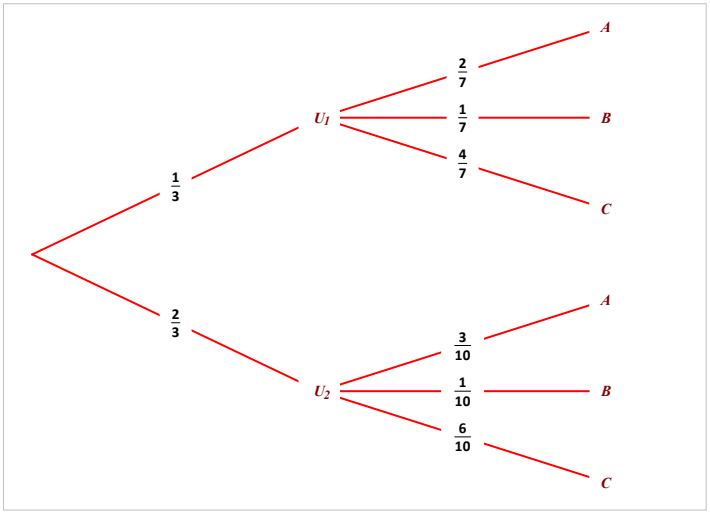
3) أ ـ عيّن قيم المتغير العشوائي X .

ب ـ عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

4) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

الحل

1) نقل و إكمال شجرة الإحتمالات :



لدينا $P_{U_2}(B)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ و $P_{U_2}(A)=\frac{3}{10}$

و $P_{U_2}(C)=\frac{6}{10}$

2) حساب الإحتمالات :

$$p(A)=p(A\cap U_1)+p(A\cap U_2)$$

أي :

$p(A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}$ و منه : $p(A)=\frac{31}{105}$.

$p(B)=p(B\cap U_1)+p(B\cap U_2)$ أي : $p(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}$ و منه : $p(B)=\frac{12}{105}$.

$p(C)=p(C\cap U_1)+p(C\cap U_2)$ أي $p(C)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}$ و منه : $p(C)=\frac{62}{105}$.

3) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي :

المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة و منه : $X \in \{0;1;2\}$.

ب) تعيين قانون الإحتمال :

$p(X=0)=p(B)=\frac{12}{105}$ و $p(X=1)=p(C)=\frac{62}{105}$ و $p(X=2)=p(A)=\frac{31}{105}$

X_i	0	1	2
$P_i(X_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

4) حساب الأمل الرياضي :

$E(X)=\frac{(0\times12)+(1\times62)+(2\times31)}{105}$ أي : $E(X)=\frac{124}{105}$.

التمرين 28 بكالوريا 2018// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ".

و B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

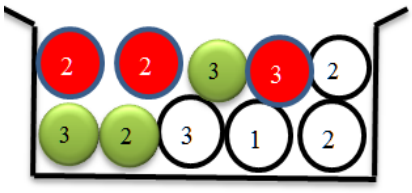
1) أ- أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب- بيّن أن : $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الحل



نسحب عشوائيا و في ان واحد 3 كريات من الصندوق :

عدد الحالات الكلية للسحب هو : $C_{10}^3=120$

1) (أ) حساب : $P(A)$ و $P(B)$

الحادثة A : الكريات الثلاث المسحوبة تحمل الوان العلم الوطني :

أي الحصول على الالوان الثلاث : كرية حمراء و كرية بيضاء وكرية خضراء

عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو : $C_4^1\times C_3^1\times C_3^1=4\times3\times3=36$

اذن $P(A)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

و الحادثة B : الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم : اي "الكرات الثلاث تحمل الرقم 2 من بين 5 كرات" او "الثلاث كرات تحمل الرقم 3 من بين 4 كرات"

عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هو : $C_5^3+C_4^3=10+4=14$ ومنه $P(B)=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$

ب) تبيان ان : $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$:

الحادث $(A\cap B)$ هو " سحب 3 كرات من الوان مختلفة " و " الكريات الثلاث تحمل نفس الرقم "

اي " كرة خضراء و تحمل الرقم 2 وكرة حمراء تحمل الرقم 2 و كرة بيضاء تحمل الرقم 2" او " كرة خضراء وتحمل الرقم 3 و كرة حمراء وتحمل الرقم 3 وكرة بيضاء وتحمل الرقم 3 "

عدد الحالات الملائمة للحادث $(A\cap B)$ هو : $C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1=2\times 2\times 1+1\times 1\times 2=6$

اذن $P(A\cap B)=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

- استنتاج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{20}\times\frac{10}{3}=\frac{1}{6}$$

ولدينا : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{36}{120}+\frac{14}{120}-\frac{6}{120}=\frac{11}{30}$

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا :

قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0,1,2,3\}$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X : $(X=0)$ تعني الحصول على 3 كريات تحمل رقما زوجيا .

عدد الحالات الملائمة لهذا الحادث هو : $C_5^3=10$ ومنه $p(X=0)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

$p(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{120}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$ و $p(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{120}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$ و

$p(X=3)=\frac{C_5^3}{120}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

حساب الامل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء .
نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

I) 1)أحسب إحتمال الحادثة A : "سحب كريتين مختلفتين في اللون " .

2)أحسب إحتمال الحادثة B : "سحب كريتين من نفس اللون " .

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).
فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ،
و إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه . و ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha;50-\alpha;-\alpha\}$ ثم عرّف قانون إحتماله .

2) بيّن أن الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X بدلالة α هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.
ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

الحل

كيس به 7 كريات 3 بيضاء و 4 خضراء (نسحب عشوائيا كرتين من الكيس)

$I)$ (1) حساب $P(A)$: الحصول على كرتين مختلفتين في اللون .

$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{3\times 4}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

2) حساب $P(B)$: الحصول على كرتين من نفس اللون

$$P(B)=\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\frac{3+6}{21}=\frac{3}{7}$$

$II)$ X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب الذي دفع α دينار:

1) تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : $\{100-\alpha,50-\alpha,-\alpha\}$

اللاعب يدفع αDA ويسحب كرتين في آن واحد .

الحصول على كرتين خضراوين ؛ الحصول على كرتين بيضاوين ؛ الحصول على كرة بيضاء وكرة خضراء

*الحصول على كرتين بيضاوين يربح $100DA$ ومنه $X=100-\alpha$

*الحصول على كرتين مختلفتين يربح $50DA$ ومنه $X=50-\alpha$

*الحصول على كرتين خضراوين يخسر ما دفعه ومنه $X=-\alpha$

قانون احتمال X :

X	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X=x_i)=$	$\frac{C_3^2}{21}=\frac{1}{7}$	$\frac{C_3^1\times C_4^1}{21}=\frac{4}{7}$	$\frac{C_4^2}{21}=\frac{2}{7}$

$$P(X=100-\alpha)=\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}$$

$$P(X=50-\alpha)=P(A)=\frac{12}{21}$$

$$P(X=-\alpha)=\frac{C_4^2}{21}=\frac{6}{21}$$

2) إثبات أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$

لدينا $E(X)=(100-\alpha)\left(\frac{3}{21}\right)+(50-\alpha)\left(\frac{12}{21}\right)+(-\alpha)\left(\frac{6}{21}\right)$

ومنه $E(X)=\frac{300-3\alpha+600-12\alpha-6\alpha}{21}=\frac{900\alpha-21}{21}$

نجد $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$

إيجاد أكبر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب :

تكون اللعبة في صالح اللاعب إذا كان $E(X)\succ 0$ ومنه $-\alpha+\frac{300}{7}\succ 0$ ومنه $\alpha\prec\frac{300}{7}$ ومنه $\alpha\prec 42,85$

ومنه أكبر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي : $\alpha=42$

التمرين 30 بكالوريا 2018// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3− ، 2 ، 3 وكرية بيضاء مرقمة بـ: 1− .

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ ـ عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون إحتماله .

بـ ـ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

جـ ـ أحسب إحتمال الحادثة : " $X^2-X>0$ " .

الحل

1) حساب احتمال الحوادث :

عدد الإمكانيات الكلية لسحب 4 كريات في آن واحد هو $C_9^4=\frac{9!}{4!\times 5!}=126$.

A: "الحصول على أربع كريات من نفس اللون" يعني 4 كلها حمراء ومنه $P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\frac{5}{126}$.

B:" الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" معناه :

(واحدة بيضاء وثلاث من اللونين الآخرين) أو (4 كريات كلها ليست من اللون الأبيض) ومنه

$P(B)=\dfrac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=\dfrac{56+70}{126}=\boxed{1}$.

C:" الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم" أي نحصل على $\{-3;-1;2;2\}$ او $\{-3;-1;1;3\}$

ومنه $P(C)=\dfrac{C_1^1\times C_1^1\times C_4^2+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{126}=\dfrac{6+2}{126}=\dfrac{4}{63}$.

2)أ) قيم المتغير العشوائي X هو عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس : لدينا تسعة كريات من بينها 3 كريات خضراء ومنه عندما نسحب أربع كريات فإما يتبقى 3 خضراء أو 2 خضراء أو 1 خضراء أو 0 خضراء أي $X=\{0;1;2;3\}$.

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$ ، $P(X=1)=\dfrac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\dfrac{45}{126}=\dfrac{5}{14}$

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$ ، $P(X=3)=\dfrac{C_6^4}{126}=\dfrac{15}{126}=\dfrac{5}{42}$

ومنه قانون الإحتمال للمتغير العشوائي معرف في الجدول التالي:

X_i	0	1	2	3
$p(X_i)$	$\frac{6}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{15}{126}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$E(X)=0\times\dfrac{6}{126}+1\times\dfrac{45}{126}+2\times\dfrac{60}{126}+3\times\dfrac{15}{126}=\dfrac{210}{126}=\dfrac{5}{3}$

ج) حساب احتمال الحادثة $X^2-X\succ 0$:

$X^2-X\succ 0$ معناه $X(X-1)\succ 0$ أي يجب أن يكون $(X=2)$ أو $(X=3)$

ومنه $P(X^2-X\succ 0)=P(X=2)+P(X=3)=\dfrac{60}{126}+\dfrac{15}{126}=\dfrac{25}{42}$