كوْكب النُّخبة في مـادة الرياضيـات - بكالوريا 2024 -

محطة التحضير الممتاز لامتحان البكالوريا التجريبية

القِسم الأولْ : I

الاختبارات :

،، مِـنْ 01 إلـى 07 ،،

المواضيع الـ{14}مرفقة بالتصحيح النَّموذجي المفصَّل و سلم التنقيط

ملاحظة : هذه الباقة خاصة بتلاميذ شعبة رياضيات و يمكن لتلاميذ شعبتي علوم تجريبية و تقني رياضي الاستفادة منها حسب المطلوب ،،

تحت شعار :

،، تَجْرُبةُ اليوْم ،، عِبرةٌ للغد ،،

المنصة العلمية : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

الموسم الدراسي : 2022 / 2023 — القسم : 03 رياضيات

امتحان بكالوريا تجريبي — الشعبة : رياضيات

إختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (03 نقاط)

– أجب بصحيح أو خطأ :

1)– حجم المجسم المولد بالدوران حول محور الفواصل للتمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[1,e]$ بـ :

$f(x)=\dfrac{2(Lnx)^2}{\sqrt{x}}$ هو : $V=\dfrac{4\pi}{5}uv$ ؟

2)– $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2023}{x}\right)^x=\dfrac{1}{2023}$

3)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1+3^{\frac{1}{2}}+3+3^{\frac{3}{2}}+.....+3^{\frac{n}{2}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{2}$

4)– (U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ : $U_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{e}{n}$ ، $V_n=Ln\sqrt{\dfrac{3}{n}+e}$.

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I)–1)– ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من : 2^n ، 3^n على 11 .

2)– n عدد طبيعي ، α عدد صحيح ، نضع : $A_\alpha=2023^{2n+1}+\alpha\times4^{5n+1}$

أ)– تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{1444}\equiv0[11]$.

ب)– عين الأعداد الصحيحة α التي من اجلها A_α يقبل القسمة على 11 من أجل كل عدد طبيعي n .

ج)– أوجد قيم العدد الطبيعي t بحيث : $1443^t+1444^t\equiv0[11]$.

II)– نضع في علبة بطاقات مرقمة ببواقي قسمة العدد 2^n على 11 ، نسحب من العلبة 3 بطاقات على التوالي وبدون إرجاع

لتكن الحادثتان التاليتان : A البطاقات المسحوبة تحمل أرقماأولية ، B البطاقات المسحوبة تحمل أرقما فرديا

1)– أحسب احتمال الحوادث : A ، B ، $A \cap B$. استنتج احتمال الحادثة : $A \cup B$.

2)– أحسب احتمال سحب بطاقة تحمل رقما أوليا علما أنه فردي .

3)– ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد البطاقات التي تحمل رقما أوليا المتبقية في العلبة

– عرف قانون إحتمال X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث :(05 نقاط)

1)– $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

أ)– تحقق أن 2 هو جذرا $P(z)$. ب)– حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $P(z)=0$.

2)– في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقاط : A ، B و C تحقق لواحقها على الترتيب :

$z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ)– أكتب كل من z_B ، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسي . ب)– عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا .

جـ)– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n}+z_C^{3n}+2^{3n+1}=0$

د)– علم النقاط : A ، B و C ، ماهي طبيعة الرباعي $OBAC$ ؟

3)– M و M' نقطتان من المستوي ذات اللاحقتان : z و z' على الترتيب حيث : $z'=\frac{z_A\times\overline{z}-z_C}{\overline{z}-z_C}$

أ)– لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=1$ ، عين ثم أنشئ (E) .

ب)– تحقق أن : $z'=z_A+\frac{z_C}{\overline{z}-z_C}$

جـ)– بين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

التمرين الرابع :(07 نقاط)

I)– الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2x^2-5x+4)e^{x-2}+1$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	.....	↗	$7e^{\frac{-5}{2}}+1$	↘	.....	↗	....

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$

1)– أنقل ثم أكمل جدول تغيرات الدالة g ، استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$. 2)– تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)-1 \succ 0$

3)– برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)-1 = 2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2}$.

4)– أحسب : $S = \int_1^2 (g(x)-1)dx$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا .

II)– لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \left(\frac{2x-3}{x-1}\right)(e^{x-2}+1)$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)– أ)– أحسب : $\lim_{x \xrightarrow{\prec} 1} f(x)$ ، $\lim_{x \xrightarrow{\succ} 1} f(x)$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، فسر هذه النتائج بيانيا. ب)– أحسب : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2)– أثبت أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، استنتج اتجاه الدالة f على D_f . شكل جدول تغيراتها .

3)– أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$.

4)– أحسب : $f(0)$ ، $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، ثم أنشئ (T) و (C_f) .

III)– لتكن الدالة h المعرفة على $D_h = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ : $h(x) = \left(\frac{2|x|-3}{|x|-1}\right)(e^{|x|-2}+1)$.

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1)– أثبت أن الدالة h دالة زوجية . 2)– اشرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) .

3)– أنشئ (C_h) . (استعمل الألوان للتوضيح)

التمرين الأول :(04 نقاط)

I)– 1)– أوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

2)– أوجد الثنائيات (a,b) من $(\mathbb{N}^*)^2$ حيث : $\begin{cases} PGCD(a,b)=17 \\ PPCM(a,b)=2023 \end{cases}$

II)– لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $289x-34y=2023.....(E)$

1)– أوجد $PGCD(289,34)$ ،ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

2)– بين أنه إذاكانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن y مضاعف للعدد 17 . ثم استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E).

3)– أوجد الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2-y\leq 52$

III)– n عددطبيعي فردي ، باقي قسمته على 17 هو 16 ، فما هو باقي قسمته على 34 ؟

التمرين الثاني :(04 نقاط)

1)– في ألعاب البحر المتوسط التي إحتضنها ولاية وهران (بالجزائر) في جوان 2022 ، تحصلت الجزائر في رياضة الملاكمة على :

7 ميداليات ذهبية ، 4 ميداليات فضية و ميدالية واحدة برونزية . وضعت هذه الميداليات في صندوق

– نسحب من الصندوق ميداليتين في آن واحد . نعتبر اللعبة التالية : يربح لاعب 20DA عند سحب ميدالية ذهبية ، يربح 10DA عند سحب ميدالية فضية و يخسر 10DA عند سحب ميدالية فضية

– ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب ، عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي

2)– بعد نجاح رياضة الملاكمة في الجزائر ترشح للمشاركة في ألعاب البحر المتوسط التي ستقام بفرنسا : 20 ملاكمة (إناث) من بينهم الملاكمة : إيمان خليف و 18 ملاكم (ذكور)من بينهم الملاكم :بن قاسمية محمد .

تم اختيارمجموعة مكونة من ثلاث ملاكمين للمشاركة في هذه التظاهرة الرياضية

– احسب احتمال الحوادث التالية : A : المجموعة تضم ثلاث ذكور. B : المجموعة تضم ذكر وأنثيين .

C : المجموعة تضم إيمان أو محمد .

D : المجموعة تضم ثلاث إناث ولاتضم الملاكمة إيمان بعد ما تم إقصائها نهائيا من المنافسة .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I)– لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} \end{cases}$

1)– أ)– تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = 9 - \frac{70}{U_n + 8}$

ب)– باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le 2$.

جـ)– أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. هـ)– استنتج مما سبق أن المتتالية (U_n) متقاربة .

2)– أ)– أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 - U_{n+1} \le \frac{7}{8}(2 - U_n)$.

ب)– استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le 2 - U_n \le \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$ ، ثم أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

II)– لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$

1)– أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 .

2)– أكتب بدلالة عبارة n الحدالعام V_n ثم U_n. 3)– أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ ، ثم استنتج للمرة الثانية حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4)– أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = U_0(V_0 - 1) + 10U_1(V_1 - 1) + 10^2 U_2(V_2 - 1) + \dots\dots\dots + 10^n U_n(V_n - 1)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I)– a و b عددان حقيقيان موجبان تماما ، باستعمال المساواة : $Ln(a \times b) = Ln(a) + Ln(b)$ أثبت أن :

$$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}Ln(a)$$

II)–لتكن الدالة g المعرفة على المجال $D_g =]1, +\infty[$ بـ : $g(x) = Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}} + \frac{1}{2}$

1)– أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2)– أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على D_g .

3)– أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على D_g .

III)– لتكن الدالة f المعرفة على المجال $D_f = [1,+\infty[$ بـ : $f(x) = \begin{cases} (x-1)Ln\sqrt{\dfrac{x-1}{2e}} & ; x \succ 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)– أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$. ماذا تستنتج ؟ فسر هذه النتيجة بيانيا . 2)– أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3)– أثبت أنه من أجل كل x من $]1,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

4)– أ)– أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند نقطة A فاصلتها α حيث : $\alpha \succ 1$ يطلب تعيينها .

بـ)– أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A . جـ)– أنشئ (T) و (C_f) .

5)– لتكن الدالة h المعرفة على المجال $D_h = [1,+\infty[$ بـ : $h(x) = -f(x)$

– اشرح كيفية إنشاء (C_h) التمثيل البياني للدالة h إنطلاقا من (C_f) . ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم السابق .

6)– أ)– تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $\dfrac{x^2-2x}{x-1} = x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$ ، ثم أحسب : $\int_2^{\alpha} \dfrac{x^2-2x}{x-1}dx$

بـ)– أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = 2$ ، $x = \alpha$.

(استعمل التكامل بالتجزئة)

جـ)– استنتج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و (C_h) و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = 2$ ، $x = \alpha$.

بالتوفيق و النجاح في شهادة بكالوريا 2023 الأستاذة : بن زادي

الإجابـــة النموذجية + سلـــم التنقيط :

الـــموضوع الأول :

التمرين الأول :(03 نقاط):

1)– $V=\pi\int_1^e (f(x))^2dx\ uv=\pi\int_1^e \frac{4(Lnx)^4}{x}dx\ uv$ هو : $V=\frac{4\pi}{5}uv$ ؟

$V=4\pi\left[\frac{(Lnx)^5}{5}\right]_1^e uv=\frac{4\pi}{5}uv$ و منه : الإجابة صحيحة ..... (0.5ن)

2)– من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x لدينا : $\left(1+\frac{2023}{x}\right)^x=e^{xLn\left(1+\frac{2023}{x}\right)}$

نضع : $t=\frac{1}{x}$ ، $x\to+\infty$ ، $t\to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2023}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}e^{\frac{Ln(1+2023t)}{t}}=\lim_{t\to 0}e^{2023\times\frac{Ln(1+2023t)}{2023t}}$$

بما أن : $\lim_{X\to 0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1$ و منه : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2023}{x}\right)^x=e^{2023}$ و منه : الإجابة خاطئة..... (01ن)

3)– نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_n=\left(\sqrt{3}\right)^n$. (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول $U_0=1$.

$$S_n=U_0+U_1+U_1+.....+U_n=\frac{1}{1-\sqrt{3}}\left[1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]$$

$S_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-3}\right)\left[1-3^{\frac{n+1}{2}}\right]=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{2}$ و منه : الإجابة صحيحة..... (0.5ن)

4)– من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $U_{n+1}-U_n=\frac{e}{n(n+1)}\succ 0$ و منه : (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $n+1\succ n$ ، $\frac{1}{n+1}\prec\frac{1}{n}$ ، $\frac{3}{n+1}+e\prec\frac{3}{n}+e$ ، $\sqrt{\frac{3}{n+1}+e}\prec\sqrt{\frac{3}{n}+e}$

$Ln\sqrt{\frac{3}{n+1}+e} \prec Ln\sqrt{\frac{3}{n}+e}$ و منه : $V_{n+1} \prec V_n$ ، أي أن (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} Ln\sqrt{\frac{3}{n}+e} = Ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Ln\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{n}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

و منه :المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان الإجابة صحيحة ..... (01ن)

التمرين الثاني :(05 نقاط):

I)-1)- $2^0 \equiv 1[11]$ ، $2^1 \equiv 2[11]$ ، $2^2 \equiv 4[11]$ ، $2^3 \equiv 8[11]$ ، $2^4 \equiv 5[11]$ ، $2^5 \equiv 10[11]$ ، $2^6 \equiv 9[11]$ ، $2^7 \equiv 7[11]$ ، $2^8 \equiv 3[11]$ ، $2^9 \equiv 6[11]$ ، $2^{10} \equiv 1[11]$ . ..... (0.5ن)

بواقي قسمة 2^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p = 10$.

$n =$	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$

$3^0 \equiv 1[11]$ ، $3^1 \equiv 3[11]$ ، $3^2 \equiv 9[11]$ ، $3^3 \equiv 5[11]$ ، $3^4 \equiv 4[11]$ ، $3^5 \equiv 1[11]$ . ..... (0.5ن)

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p' = 5$.

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	$[11]$

2)- أ)- لدينا : $2023 \equiv 10[11]$ أي أن : $2023 \equiv -1[11]$ و منه : $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ (لأن $2n+1$ فردي)

$4^{5n+1} = 2^{10n+2}$ و منه : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $1444 \equiv 3[11]$ و منه : $A_{1444} \equiv (-1+3\times 4)[11]$ أي أن :

$A_{1444} \equiv 0[11]$ ..... (0.5ن)

ب)- لدينا : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ ، A_α يقبل القسمة على **11** معناه : $A_\alpha \equiv 0[11]$.

$A_\alpha \equiv (-1+4\alpha)[11]$ ، $-1+4\alpha \equiv 0[11]$ ، $4\alpha \equiv 1[11]$ ، $12\alpha \equiv 3[11]$ ، $\alpha \equiv 3[11]$. و منه :

A_α يقبل القسمة على **11** معناه : $\alpha = 11k+3 \quad (k \in \mathbb{Z})$ ..... (0.5ن)

$n =$	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$ $5k'$	$10k+6$ $5k'+1$	$10k+7$ $5k'+2$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$ $k' \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	$[11]$
$2^n + 3^n \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	$[11]$

$n = 11k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$ ..... (0.5ن)

طريقة ثانية :

لدينا : $3 \equiv -8[11]$ ، $3^t \equiv (-2)^{3t}[11]$ و منه : $1443^t + 1444^t \equiv 0[11]$ يكافئ : $2^t + (-2)^{3t} \equiv 0[11]$.

$n =$	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$
$(-2)^{3t} \equiv$	1	-8	9	-6	4	-10	3	-2	5	-7	$[11]$
$2^t + (-2)^{3t} \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	$[11]$

$n = 11k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^3 = 720$

1) –البطاقات التي تحمل أرقاما أولية هي : $2,3,5,7$ و منه : $P(A) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$ ..... (0.25ن)

2)– البطاقات التي تحمل أرقاما فردية هي : $1,3,5,7,9$ و منه : $P(B) = \frac{A_5^3}{A_{10}^3} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$ ..... (0.25ن)

3)– البطاقات التي تحمل أرقاما فردية وأولية هي : $3,5,7$ و منه : $P(A \cap B) = \frac{A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$ ..... (0.25ن)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120}$$

و منه : $P(A \cup B) = \frac{13}{120}$ ..... (0.25ن)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{10}$$ ..... (0.25ن)

3)– قيم المتغير العشوائي : $x_i \in \{1,2,3,4\}$ ..... (0.25ن)

$P(X=1)=\frac{A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{24}{720}=\frac{1}{30}$ ، $P(X=2)=\frac{A_4^2\times A_6^1\times 3!}{A_{10}^3\times 2!\times 1!}=\frac{216}{720}=\frac{3}{10}$ .....(0.25ن) (0.25ن)

$P(X=3)=\frac{A_4^1\times A_6^2\times 3!}{A_{10}^3\times 2!\times 1!}=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}$ ، $P(X=4)=\frac{A_6^3}{A_{10}^3}=\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$ ..... (0.25ن) (0.25ن)

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=\frac{1}{30}+\frac{6}{10}+\frac{3}{2}+\frac{4}{6}\approx 2.8$ ..... (0.25ن)

التمرين الثالث:(05 نقاط):

1)– أ)- $P(2)=8-16+16-8=0$ ..... (0.25ن)

ب)- من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$ ..... (0.5ن)

$P(z)=0$ من يكافئ : $z=2$ أو $z^2-2z+4=0$ $(\Delta=-12)$

$S=\{2,1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\}$ ..... (0.5ن)

2)– أ)- $z_B=2e^{\frac{i\pi}{3}}$ ، $z_C=2e^{\frac{-i\pi}{3}}$ ، $\frac{z_B}{z_C}=e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ..... (0.5ن)

ب)- $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n=e^{\frac{i2n\pi}{3}}$. $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقي يكافئ : $(k\in\mathbb{N})$ $\frac{2\pi n}{3}=k\pi$ و منه :

$(k\in\mathbb{N})$ $2n=3k$ ، لدينا : $3/2n$ و $PGCD(2,3)=1$ ومنه : حسب مبرهنة غوص : $3/n$

$n=3k'$ $(k'\in\mathbb{N})$ ..... (0.5ن)

جـ)- n من فردي معناه : $n=2k+1(k\in\mathbb{N})$

$(z_B)^{3n}=2^{3n}\left(e^{i(2k+1)\pi}\right)=2^{3n}e^{i\pi}=-2^{3n}$

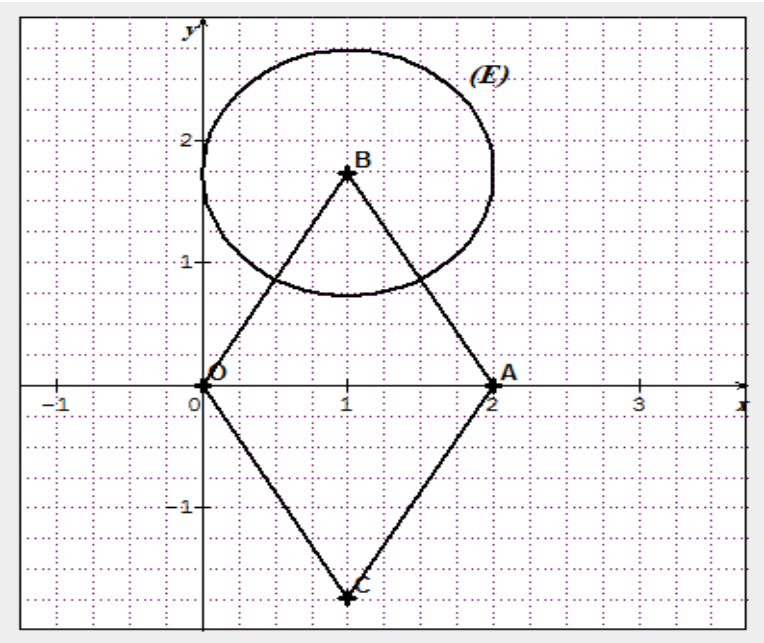
$(z_C)^{3n}=2^{3n}\left(e^{-i(2k+1)\pi}\right)=2^{3n}e^{-i\pi}=-2^{3n}$ ..... (0.5ن)

$(z_B)^{3n}+(z_C)^{3n}+2^{3n+1}=-2^{3n}-2^{3n}+2^{3n+1}=-2^{3n+1}+2^{3n+1}=0$

د)- لدينا : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$ $\left(z_B=z_A-z_C\right)$ و $OB=OC=2$ (متوازي أضلاع له ضلعان متتابعان متقايسان)

ومنه : الرباعي $OBAC$ معين ..... (0.5ن)

- تعليم النقاط : ..... (0.5ن)



2)- أ)- $\left(z-z_B\right)\left(z-z_C\right)=\left(z-z_B\right)\overline{\left(z-z_C\right)}=1$ ومنه : $BM=1$

(نذكر أن : $z.\overline{z}=|z|^2$)

ومنه: (E) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $r=1$ ..... (0.5ن)

ب)- $z'=z_A+\dfrac{z_C}{\overline{z}-z_C}=\dfrac{z_A.\overline{z}-z_A.z_C+z_C}{\overline{z}-z_C}=\dfrac{z_A.\overline{z}-2.z_C+z_C}{\overline{z}-z_C}=\dfrac{z_A.\overline{z}-z_C}{\overline{z}-z_C}$ ..... (0.25ن)

جـ)- $\left|z'-z_A\right|=\left|\dfrac{z_C}{\overline{z}-z_C}\right|=\left|\dfrac{z_C}{\overline{z}-z_B}\right|=\left|\dfrac{z_C}{z-z_B}\right|$ ومنه : $AM'=\dfrac{OC}{BM}$

وبما أن : $M\in(E)$ فإن : $BM=1$ ومنه : $AM'=2$ ومنه : مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A

و نصف قطرها $r=2$ ..... (0.5ن)

التمرين الرابع : (07 نقاط):

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ ، $g(1)=e^{-1}+1$ . ..... (0.75ن)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$7e^{\frac{-5}{2}}+1$	$\searrow$	$e^{-1}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \succ 0$ . ..... (0.25ن)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x-2} \succ 0$ ، $2x^2-5x+4 \succ 0$ ($\Delta = -7 \prec 0$) ومنه : $g(x)-1 \succ 0$ ..... (0.25ن)

g قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$: $2g'(x) = (4x^2-2x-2)e^{x-2}$ ، $g''(x) = (2x^2+3x-2)e^{x-2}$

$$2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2} = (4x^2-2x-2-2x^2-3x+2+4)e^{x-2}$$

$$2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2} = (2x^2-5x+4)e^{x-2} = g(x)-1$$ ..... (0.5ن)

$$S = \int_1^2 (g(x)-1)dx = \left[2g(x) - g'(x) + 4e^{x-2}\right]_1^2 = \left[(2x^2-9x+13)e^{x-2}\right]_1^2$$

$$S = \int_1^2 (g(x)-1)dx = 3-6e^{-1}$$ ..... (0.25ن)

$S = (3-6e^{-1})cm^2$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y = 1$ ، $x = 1$ ، $x = 2$ . ..... (0.25ن)

1) – أ) –

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (2x-3)(e^{x-2}+1) = -e^{-1}-1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{\prec} 1} (x-1) = 0^{-1} \end{cases}$$ ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{\prec} 1} f(x) = +\infty$ ..... (0.25ن)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (2x-3)(e^{x-2}+1) = -e^{-1}-1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 1} (x-1) = 0^{+1} \end{cases}$$ ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 1} f(x) = -\infty$ ..... (0.25ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x = 1$ . ..... (0.25ن)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2x-3}{x-1}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x-2}+1) = 1 \end{cases}$$ ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ . ..... (0.25ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $y = 2$ بجوار $-\infty$ . ..... (0.25ن)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+1\right)=+\infty \end{cases}$$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ..... (0.25ن)

2)- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}\left(e^{x-2}+1\right)+\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)e^{x-2}$

$$f'(x)=\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x-3}{x-1}\right]e^{x-2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ ..... (0.5ن)

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}\succ 0$ ومنه: متزايدة تماما على $\mathbb{R}-\{1\}$ . ..... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة f : ..... (0.5ن)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3)- $(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)=3x-4$ ..... (0.25ن)

$f(0)=3\left(e^{-2}+1\right)\approx 3.40$ ، $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ . ..... (0.25ن) (0.25ن)

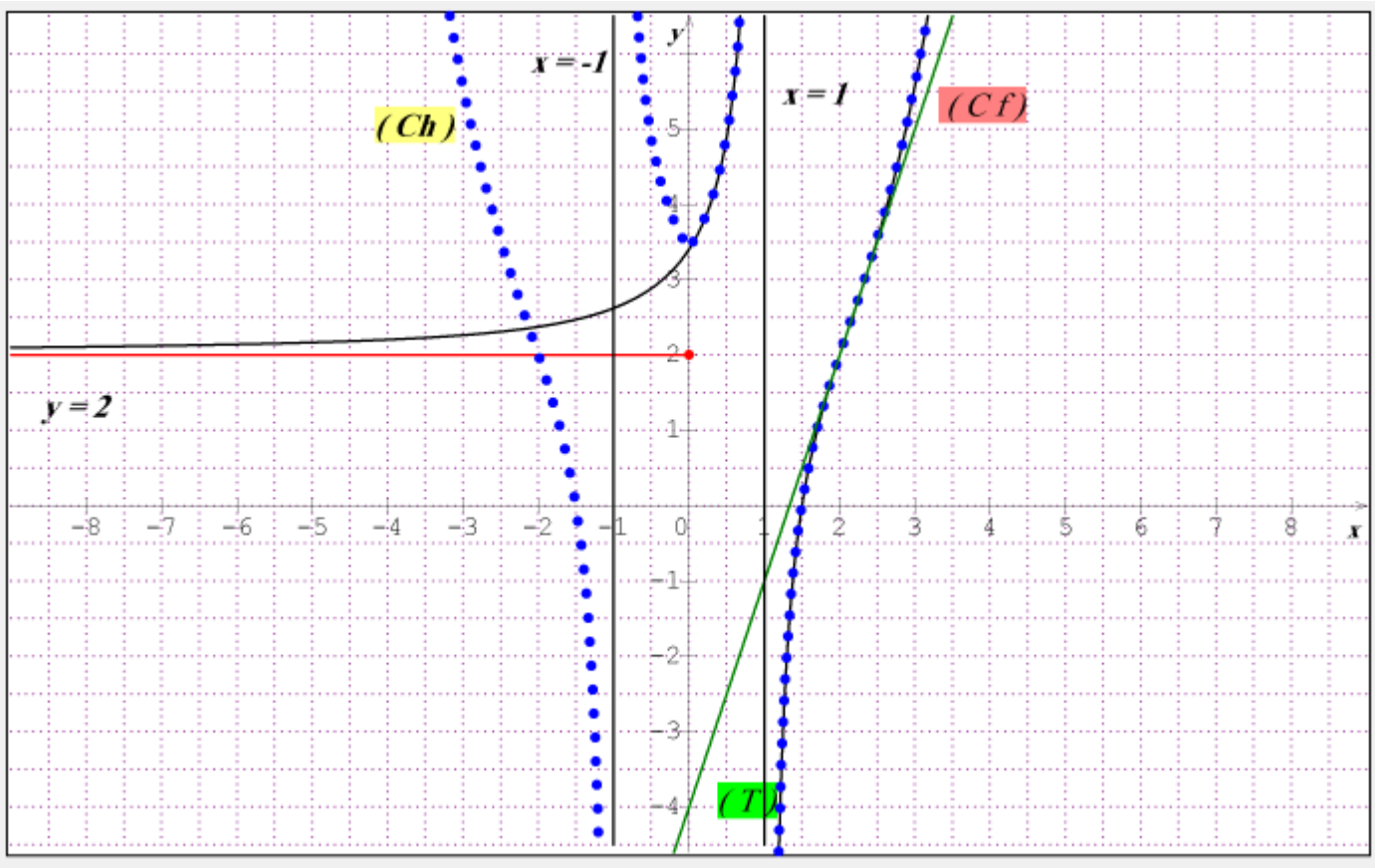
III)- 1)- من أجل كل x من D_h : $h(-x)=h(x)$ (لأن : $|-x|=|x|$) ومنه : الدالة h دالة زوجية..... (0.25ن)

2)- على المجال $[0,1[\cup]1,+\infty[$: $h(x)=f(x)$ و منه (C_h) يطابق (C_f) .

على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,0]$ بما ان الدالة h دالة زوجية فإن يقبل محور التراتيب كمحور تناظر : ..... (0.25ن)

نرسم نظير الجزء السابق بالنسبة لـ (yy')

3)- إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) : ..... (0.75ن)



الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط):

I)- 1)- $119 = 7\times 17$ ، $D_{119} = \{1,7,17,119\}$ ..... (0.25ن)

2)- نضع : $a = 17a'$ $b = 17b'$ حيث: $PGCD(a',b') = 1$

لدينا : $m = \dfrac{a\times b}{d}$ حيث : $d = PGCD(a,b)$ $m = PPCM(a,b)$ ومنه :

$\begin{cases} 17a'b' = 2023 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a'b' = 119 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$.

a'	1	119	7	17
b'	119	1	17	7

$S = \{(17,2023);(2023,17);(119,289);(289,119)\}$ ..... (1.25ن)

II)- 1)- $34 = 2\times 17$ ، $119 = 7\times 17$ ، ومنه : $PGCD(289,34) = 17$ ..... (0.25ن)

$17/2023$ ومنه : المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ . ..... (0.25ن)

2)- المعادلة (E) تكافئ : $17x-2y=119$.....(E) . $17x-2y=119$ معناه : $2y=17x-199$

$2y=17(x-7)$ لكن 2 و17 أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة غوص :

$17/y$ أي أن : y مضاعف 17 ..... (0.5ن)

$y=17k\ (k\in\mathbb{Z})$ ، نعوض y بما يساويه في المعادلة (E) نجد : $y=17k\ (k\in\mathbb{Z})$

$S=\{(2k+7,17k);(k\in\mathbb{Z})\}$ ..... (0.5ن)

3)- $x^2-y\le 52$ يكافئ : $4k^2+28k+49-17k\le 52$ ، $4k^2+11k-3\le 0$.

$\Delta=169$ ، $k_1=-3$ ، $k_2=\frac{1}{4}$ ومنه : $k\in\{-3,-2,-1,0\}$.

$S'=\{(1,-51);(3,-34);(5,-17);(7,0)\}$ ..... (0.5ن)

III)- n عددطبيعي فردي معناه : $n\equiv 1[2]$ ، باقي قسمته على 17 هو 16 معناه : $n\equiv 16[17]$

$\begin{cases}17n\equiv 17[34]\\2n\equiv 32[34]\end{cases}$ ، $15n\equiv -15[34]$ ، $n\equiv -1[34]$ ، $n\equiv 33[34]$ و منه :

باقي قسمة n على 34 هو 33 . ..... (0.5ن)

التمرين الثاني :(04 نقاط):

1)- عدد الحالات الممكنة للسحب : $C_{12}^2=66$

2ذهبية ← 40 ، 1 ذهبية + 1فضية ← 30 ، 1 ذهبية + 1 برونزية ← 10 ، 2 فضية ← 20 ، 1 فضية + 1 برونزية ← 0 .

$x_i\in\{,10,20,30,40\}$ ..... (0.5ن)

$P(X=0)=\frac{C_1^1\times C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{66}=\frac{2}{33}$ ، $P(X=10)=\frac{C_1^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{7}{66}$ ..... (0.25ن)(0.25ن)

$P(X=20)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$ ، $P(X=30)=\frac{C_4^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{28}{66}=\frac{14}{33}$ ..... (0.25ن)(0.25ن)

$P(X=40)=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$ ..... (0.25ن)

x_i	0	10	20	30	40
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{7}{22}$

$E(X)=0\times\frac{2}{33}+10\times\frac{7}{66}+20\times\frac{1}{11}+30\times\frac{14}{33}+40\times\frac{7}{22}$ ، $E(X)=\frac{85}{3}$ ..... (0.25ن)

2)– عدد الحالات الممكنة : $C_{38}^{3}=8436$.

$P(A)=\frac{C_{18}^{3}}{C_{38}^{3}}=\frac{816}{8436}=\frac{68}{703}$ ..... (0.5ن)

$P(B)=\frac{C_{18}^{1}\times C_{20}^{2}}{C_{38}^{3}}=\frac{3420}{8436}=\frac{15}{37}$ ..... (0.5ن)

$P(C)=\frac{C_{2}^{1}\times C_{36}^{2}+C_{2}^{2}\times C_{36}^{1}}{C_{38}^{3}}=\frac{1296}{8436}=\frac{108}{703}$ ..... (0.5ن)

$P(D)=\frac{C_{19}^{3}}{C_{37}^{3}}=\frac{969}{8436}=\frac{17}{148}$ ..... (0.5ن)

التمرين الثالث: (05 نقاط):

I)– 1)– أ)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1}=\frac{9U_n+72-70}{U_n+8}=\frac{9U_n+2}{U_n+8}$ ..... (0.25ن)

ب)– $P(n)$ ..... $0\le U_n\le 2$

من أجل $n=0$: $0\le\frac{1}{2}\le 2$ و منه : $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ معناه $0\le U_n\le 2$ ، نبرهن على صحة $P(n+1)$ معناه : $0\le U_{n+1}\le 2$

$0\le U_n\le 2$ ، $8\le U_n+8\le 10$ ، $\frac{1}{10}\le\frac{1}{U_n+8}\le\frac{1}{8}$ ، $\frac{-70}{8}\le\frac{-70}{U_n+8}\le\frac{-70}{10}$

$0\le\frac{1}{4}\le U_{n+1}\le 2$ ومنه : $P(n+1)$ محققة .

ومنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0\le U_n\le 2$ حسب مبدأ البرهان بالتراجع . ..... (0.5ن)

جـ)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1}-U_n=\frac{9U_n+2}{U_n+8}-U_n=\frac{-U_n^2+U_n+2}{U_n+8}=\frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{U_n+8}$

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le 2$ ومنه : $U_n + 1 \succ 0$ ، $U_n + 8 \succ 0$ ، $U_{n+1} - U_n \ge 0$ أي أن :

(U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ..... (0.5ن)

هـ)- (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بـ: 2 فهي متقاربة ..... (0.25ن)

2)- أ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 - U_{n+1} = 2 - \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} = \frac{2U_n + 16 - 9U_n - 2}{U_n + 8} = \frac{7(2 - U_n)}{U_n + 8}$

$U_n \ge 0$ ، $U_n + 8 \ge 8$ ، $\frac{1}{U_n + 8} \le \frac{1}{8}$ ، $\frac{7}{U_n + 8} \le \frac{7}{8}$ و منه : $2 - U_{n+1} \le \frac{7}{8}(2 - U_n)$ ..... (0.5ن)

ب)-

$$\begin{array}{l}
\cancel{2 - U_1} \le \frac{7}{8}(2 - U_0) \\
2 - U_2 \le \frac{7}{8}(\cancel{2 - U_1}) \\
\vdots \\
\vdots \\
2 - U_n \le \frac{7}{8}(\cancel{2 - U_{n-1}}) \\
\hline
0 \le 2 - U_n \le \left(\frac{7}{8}\right)^n (2 - U_0)
\end{array}$$

و منه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le 2 - U_n \le \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$ ..... (0.5ن)

$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$ ..... (0.25ن)

II)-1)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \frac{\frac{9U_n + 2}{U_n + 8} - 2}{\frac{9U_n + 2}{U_n + 8} + 1} = \frac{9U_n + 2 - 2U_n - 16}{9U_n + 2 + U_n + 8} = \frac{7(U_n + 2)}{10(U_n + 2)}$

$V_{n+1} = \frac{7}{10} V_n$ ومنه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{7}{10}$ وحدها الأول : $V_0 = \frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{1}{2} + 1} = -1$ ..... (0.5ن)

2)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = V_0 \times q^n = -\left(\frac{7}{10}\right)^n$ ..... (0.25ن)

$$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1} \text{ ، } V_n\left(U_n + 1\right) = U_n - 2 \text{ ، } V_n \times U_n - U_n = -V_n - 2 \text{ ، } U_n\left(V_n - 1\right) = -V_n - 2$$

$$U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n} = \frac{-\left(\frac{7}{10}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{7}{10}\right)^n}$$ ..... (0.5ن)

3)- $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ و منه : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$ ..... (0.25ن)(0.25ن)

4)- لدينا : $U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n}$ ، $U_n\left(1 - V_n\right) = V_n + 2$ ، $U_n\left(V_n - 1\right) = -V_n - 2 = \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2$

$10^n U_n\left(V_n - 1\right) = 7^n - 2 \times 10^n$ ، $S_n = \frac{1}{1-7}\left(1 - 7^{n+1}\right) - \frac{2}{1-10}\left(1 - 10^{n+1}\right)$ ومنه :

$$S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{6} - \frac{2(10^{n+1} - 1)}{9}$$ ..... (0.5ن)

التمرين الرابع (07 نقاط):

I)- $\begin{cases} Ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = Ln\left(\sqrt{a}\right) + Ln\left(\sqrt{a}\right) = 2Ln\left(\sqrt{a}\right) \\ Ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = Lna \end{cases}$ و منه : $2Ln\left(\sqrt{a}\right) = Lna$

أي أن : $Ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}Lna$ ..... (0.25ن)

II)-1)- $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ..... (0.25ن)(0.25ن)

2)- g قابلة للإشتقاق على D_g : $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2e}}{\frac{x-1}{2e}}\right) = \frac{1}{2(x-1)} \succ 0$ ..... (0.25ن)

ومنه : الدالة متزايدة ماما على D_g ..... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة g : ..... (0.25ن)

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3)- $g(3) = Ln\sqrt{\frac{2}{2e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}Ln\frac{1}{e} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ ..... (0.25ن)

إشارة $g(x)$: ..... (0.25ن)

x	0		3		$+\infty$
إشارة : $g(x)$		$-$	0	$+$	

III)-1)- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = -\infty$ ومنه: f غير قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين.. (0.25ن)(0.25ن)

- (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $W(1,0)$ ..... (0.25ن)

2)- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ..... (0.25ن)

3)- f قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right) + \frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{2} = g(x)$ ..... (0.25ن)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$:

f متناقصة تماما على المجال : $]-\infty,3[$ ، f متزايدة تماما على المجال : $]3,+\infty[$ ..... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة f : ..... (0.5ن)

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

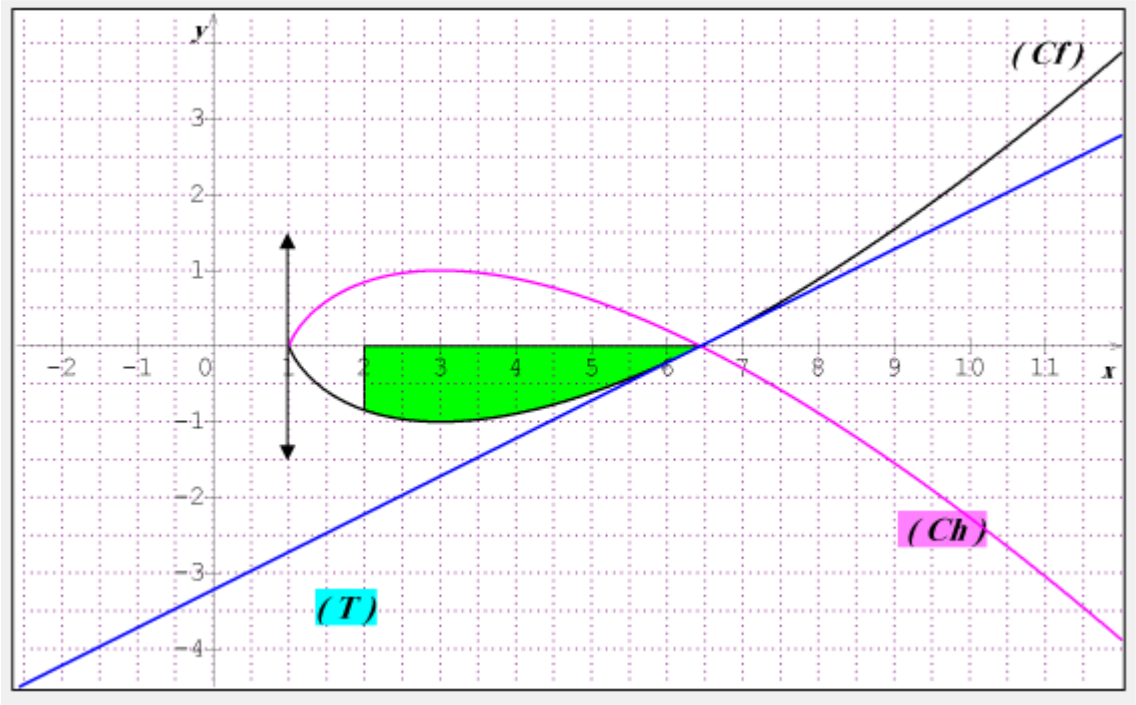
4)-أ)- $(x-1)Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}}=0$ معناه : $x-1=0$ أو $Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}}=0$

$x=1$ أو $Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}}=0$ ، $\frac{1}{2}Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right)=0$ ، $\frac{x-1}{2e}=1$ ، $x=1+2e$.

بما أن : $\alpha \succ 1$ فإن : $\alpha=1+2e$ ..... (0.25ن)

ب)- $(T): y=f'(1+2e)(x-1-2e)+f(1+2e)=\frac{1}{2}x-e-\frac{1}{2}$ ..... (0.25ن)

ج)- إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) : ..... (0.75ن)



5)- (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لـ (xx') على المجال $[1,+\infty[$ . ..... (0.25ن)

6)- أ)- $x-1-\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)-1}{x-1}=\frac{x^2-2x+1-1}{x-1}=\frac{x^2-2x}{x-1}$ ..... (0.25ن)

$$\int_2^{\alpha}\frac{x^2-2x}{x-1}dx=\int_2^{\alpha}\left[x-1-\frac{1}{x-1}\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}-x-Ln(x-1)\right]_2^{\alpha}$$

$\int_2^{\alpha}\frac{x^2-2x}{x-1}dx=2e^2-\frac{3}{2}-Ln2$ ..... (0.25ن)

$$U'(x)=\frac{x-1}{2} \qquad U(x)=\frac{x^2-2x}{4}$$

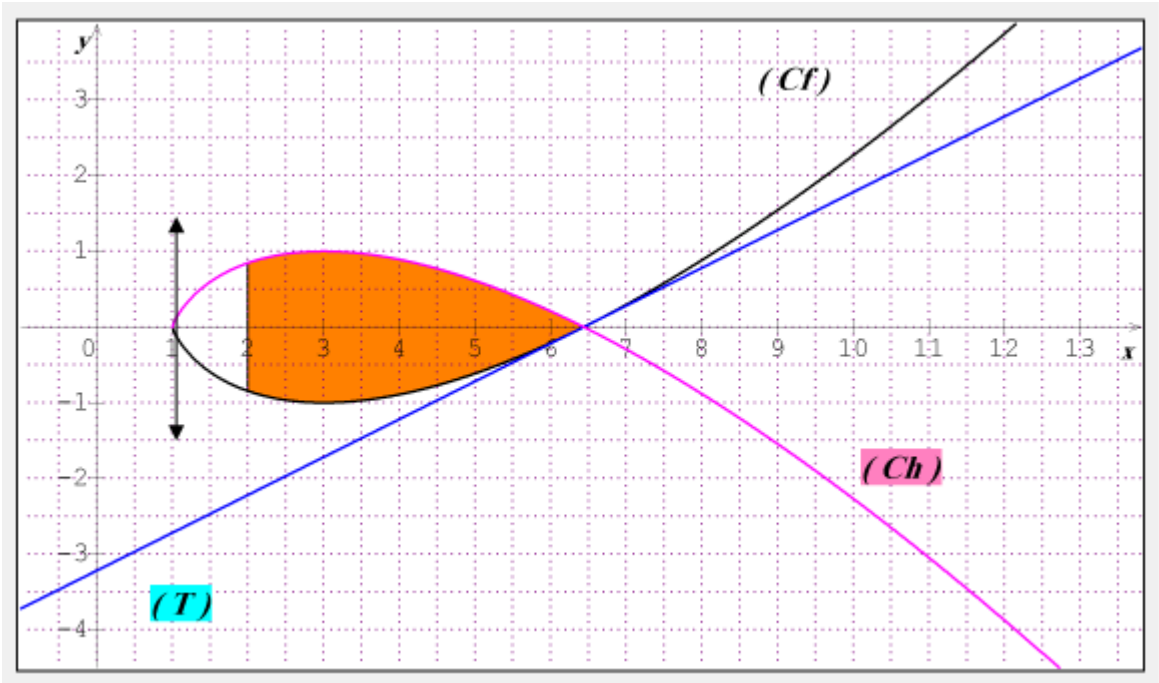
ب)- $$V(x)=Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right) \qquad V'(x)=\frac{1}{x-1}$$

$$\int_2^{\alpha} f(x)\,dx=\left[\left(\frac{x^2-2x}{4}\right)Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right)\right]_2^{\alpha}-\frac{1}{4}\int_2^{\alpha}\frac{x^2-2x}{x-1}\,dx$$

$$S=-\int_2^{\alpha} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\left(2e^2-\frac{3}{2}-Ln2\right) \qquad \int_2^{\alpha} f(x)\,dx=-\frac{1}{4}\left(2e^2-\frac{3}{2}-Ln2\right)$$

$S\approx 3.146cm^2$ ..... (0.75ن)

جـ)- $S'=\int_2^{\alpha} g(x)-f(x)\,dx=-2\int_2^{\alpha} f(x)\,dx\approx 6.292cm^2$ ..... (0.25ن)



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
المقاطعة الأولى -جيجل

إمتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: رياضيات
دورة: ماي 2023م

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 4 ساعات و30 دقيقة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

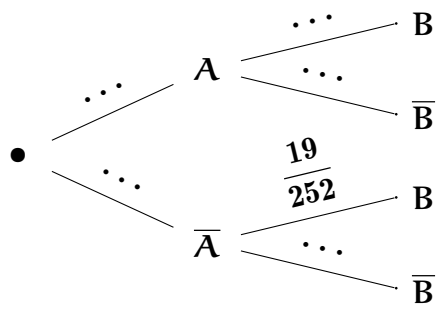
التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على 3 كريات حمراء وكريتين بيضاوين، ويحتوي كيس U_2 على كريتين حمراوين و 5 كريات بيضاء. لا نميز بين الكريات عند اللمس.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس U_1 ونضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الكيس U_2 . ونعتبر الحدثين: A : «سحب كريتين حمراوين من الكيس U_1».

B : «سحب كريتين حمراوين من الكيس U_2».

وليكن $\overline{A}$ و $\overline{B}$ الحدثين العكسيين للحدثين A و B .



1/ ا/ أُحسب الإحتمال $P(A)$ ثم $P_A(B)$ ، واستنتج $P_A(\overline{B})$.

ب/ بين أن $P(\overline{A} \cap B) = \frac{19}{360}$ ، ثم استنتج أن $P_{\overline{A}}(B) = \frac{19}{252}$.

2/ ا/ أُنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذا السحب.

ب/ بين أن $P(B) = \frac{37}{360}$ ثم أُحسب $P(A \cup B)$.

3/ علما أن الكريتين المسحوبتين من U_2 حمراوين، ما إحتمال أن تكون الكريتين المسحوبتين من U_1 غير حمراوين؟

4/ نقترح اللعبة التالية: عند القيام بالتجربة العشوائية يربح اللاعب 1 دج إذا تحقق الحدث A ويخسر 2 دج إذا لم يتحقق الحدث A ، ويخسر 2 دج إذا تحقق الحدث B ويربح 1 دج إذا لم يتحقق الحدث B .

ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن قيمة الربح أوالخسارة الإجمالية.

ا/ عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله . **ب/** أُحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2^n$ ، وليكن S_n المجموع المعرف بـ: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1/ أكتب S_n بدلالة u_n ، ثم استنتج أن S_n و u_n أوليان فيما بينهما.

2/ ا/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 7 .

ب/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد: $A = (u_{2024} + u_{1962} - S_{1444})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$ على 7 .

ج/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_{2n} مضاعفًا لـ 7 .

3/ نعتبر المعادلة (E) ... $4x - 7y = 3$ ذات المجهولين الصحيحين x و y .

ا/ بين أن الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ب/ بين أنه إذا كان $d = PGCD(x;y)$ فإن $d = 1$ أو $d = 3$.

4/ ليكن N العدد الطبيعي الذي يُكتب $\overline{1\alpha\alpha21\alpha}^4$ في النظام ذي الأساس 4 ، بحيث α عدد طبيعي .

- جد قيمة العدد الطبيعي α حتى يكون 7 قاسما للعدد N ، ثم أُكتب N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

I/ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $\overline{Z}^3 - 3\overline{Z}^2 + 3\overline{Z} + 7 = 0 \quad \cdots (E)$

1/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(\overline{Z}+1)\left(\overline{Z}^2 + a\overline{Z} + b\right) = 0$.

2/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

II/ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D ، لواحقها على الترتيب: $Z_A = -1$ ، $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = \overline{Z_B}$ و $Z_D = 3$.

1/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(Z_B - Z_A)^n$ حقيقيا سالبا.

2/ عين طبيعة المثلث ABC .

3/ ا/ أُكتب العدد $\dfrac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن A صورة D بتحويل نقطي يُطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ADC .

4/ ا/ نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة Z حيث: $Z + 1 = 2k\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ مع k يمسح المجال $[0;+\infty[$. عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)$ ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

ب/ عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة Z حيث:

$\arg\left(Z^2 - 1 - 4i\sqrt{3}\right) = \arg\left(Z - 2 - i\sqrt{3}\right) + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I/ لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2e^x$.

1/ أُدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2/ استنتج أنه: إذا كان: $0 < x < 1$ فإن: $g(x) < g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، وأنه إذا كان: $x > 1$ فإن: $g(x) > g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

II/ لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

و نعتبر h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق (مُوضح في **الملحق الصفحة 7**).

1/ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

2/ ا/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، ثم أُحسب $f'(1)$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ ا/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:
$0.5 < \alpha < 0.6$ و $1.5 < \beta < 1.6$.

ب/ أُدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

ج/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1، يُطلب تعيين معادلته.

4/ ا/ أنشئ (C_f) و (T) . (الإنشاء يكون على **الملحق الصفحة 7** ويُعاد مع ورقة الإجابة).

ب/ أوجد قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m بحيث تقبل المعادلة: $f(x) = f(m)$ حلين متمايزين.

5/ ا/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x (t^2 - 2t + 2)\, e^t dt = (x^2 - 4x + 6)\, e^x - 3e$.

ب/ ليكن λ عددا حقيقيا من المجال $]0;1]$. ولتكن $A(\lambda)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \lambda$ و $x = 1$.

- إستنتج $A(\lambda)$ ثم أُحسب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1/ نعتبر المعادلة $(E)\ \cdots\ 2022x - 1443y = 9$ ذات المجهولين الصحيحين x و y .

ا/ جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2022 و 1443، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) علما أن الثنائية $(5;7)$ حل لها.

ج/ استنتج قيم الأعداد الصحيحة λ التي تحقق الجملة: $\begin{cases} \lambda \equiv 1[674] \\ \lambda \equiv 4[481] \end{cases}$.

2/ ا/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $A = 1441^{2020} + 1442^{2021} + 1443^{2022}$ على 9 .

3/ α و β عددان طبيعيان يُكتبان في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل: $\alpha = \overline{31042}^5$ و $\beta = \overline{21233}^5$.

ا/ أُكتب العددين α و β في النظام العشري .

ب/ x و y عددان طبيعيان. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} \alpha x - \beta y = 9 \\ 7^{x+y} + 2n^2 \equiv 0[9] \end{cases}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقين غير شفافين بحيث: يحتوي الصندوق U_1 على 6 كريات تحمل الأرقام: 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ويحتوي الصندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام: 1 ، 1 ، 2 ، 2 . كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس. نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 10 بطاقات متماثلة مرقمة من 1 إلى 10 ، فإذا تحصلنا على عدد أولي نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع من الصندوق U_1 ، وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بالإرجاع من U_2 .

1/ نعتبر الأحداث التالية: A : «سحب كريتين تحملان رقمين فرديين».

B : «سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين».

C : «سحب كريتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى تحمل رقما زوجيا».

ا/ أُحسب: $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الأحداث: A ، B و C على الترتيب.

ب/ أُحسب $P_B(U_1)$ احتمال السحب من الصندوق U_1 شرط أن الرقمين المسحوبين زوجيين.

2/ نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد V ، ثم نسحب من الصندوق V عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب جداء الأرقام المسحوبة .

ا/ عين قيم المتغير العشوائي X .

ب/ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أُحسب أمله الرياضياتي .

ج/ أُحسب احتمال الحدث: « $\log(X-2) < \frac{1}{2}$ » .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين كما يلي: $u_0 = \alpha$ و $v_0 = \beta$ حيث: $0 < \alpha < \beta$ ،
ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq v_n$.

2/ ا/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha)$ ، واستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$.

3/ ا/ أُدرس إتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) على $\mathbb{N}$.

ب/ بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4/ نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = u_n \times v_n$.

ا/ أثبت أن المتتالية (w_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ ثم عين قيمتها بدلالة α و β .

ب/ بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l يُطلب تعيينها.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I/ لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & ; \quad x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ا/ برهن أن الدالة f مستمرة على يمين 0 .

ب/ هل الدالة قابلة للإشتقاق على يمين 0 ؟

ج/ لتكن h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{2}{x}$.

- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = \frac{2\ln(1 + h(x))}{h(x)}$ ، ثم بين أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

2/ ا/ من أجل كل x من $]0; +\infty[$ أُحسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.

ب/ أُدرس إتجاه تغير الدالة f' على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم عين $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

ج/ استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$.

3/ أُكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2) المماسين لـ (C_f) عند النقطة $A(2; f(2))$ وعند المبدأ O على الترتيب.

II/ لتكن u الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = \frac{2x}{x+2}$

و ليكن (γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق (الموضح الشكل أدناه).

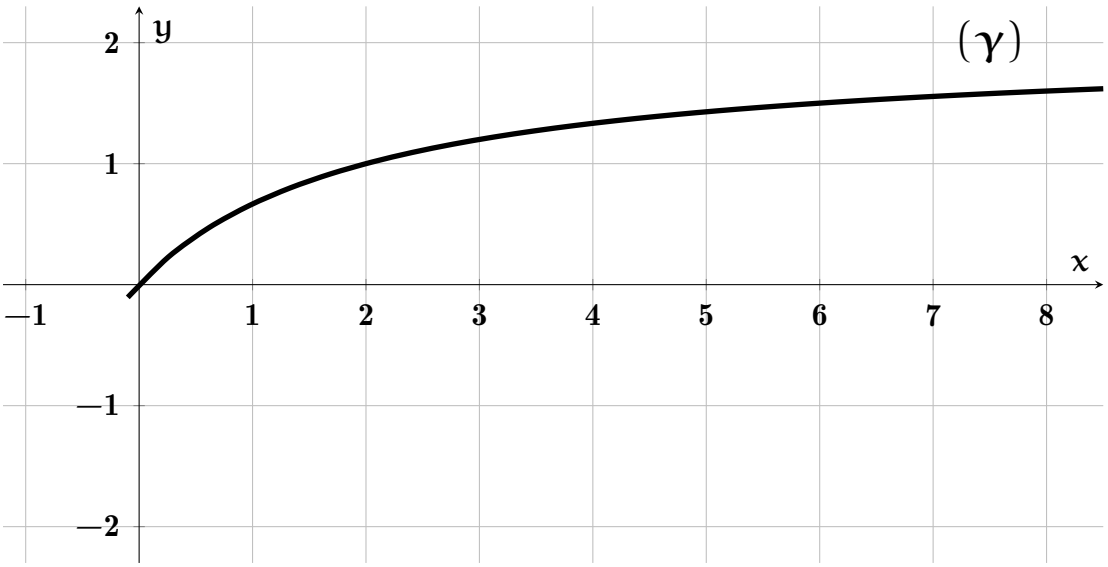
1/ ا/ شكل جدول تغيرات الدالة u .

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) - u(x) = xf'(x)$ واستنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) .

2/ علّم النقطة B من (γ) ذات الفاصلة 2 ، ثم أنشئ (C_f) و (T_2) .

3/ ا/ λ عدد حقيقي موجب تماما. بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة λ يقطع محور التراتيب في النقطة I التي ترتيبها $u(\lambda)$.

ب/ باستعمال المنحنى (γ) عين طريقة لإنشاء المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة λ ، ثم أنشئ المماس (T_1) .

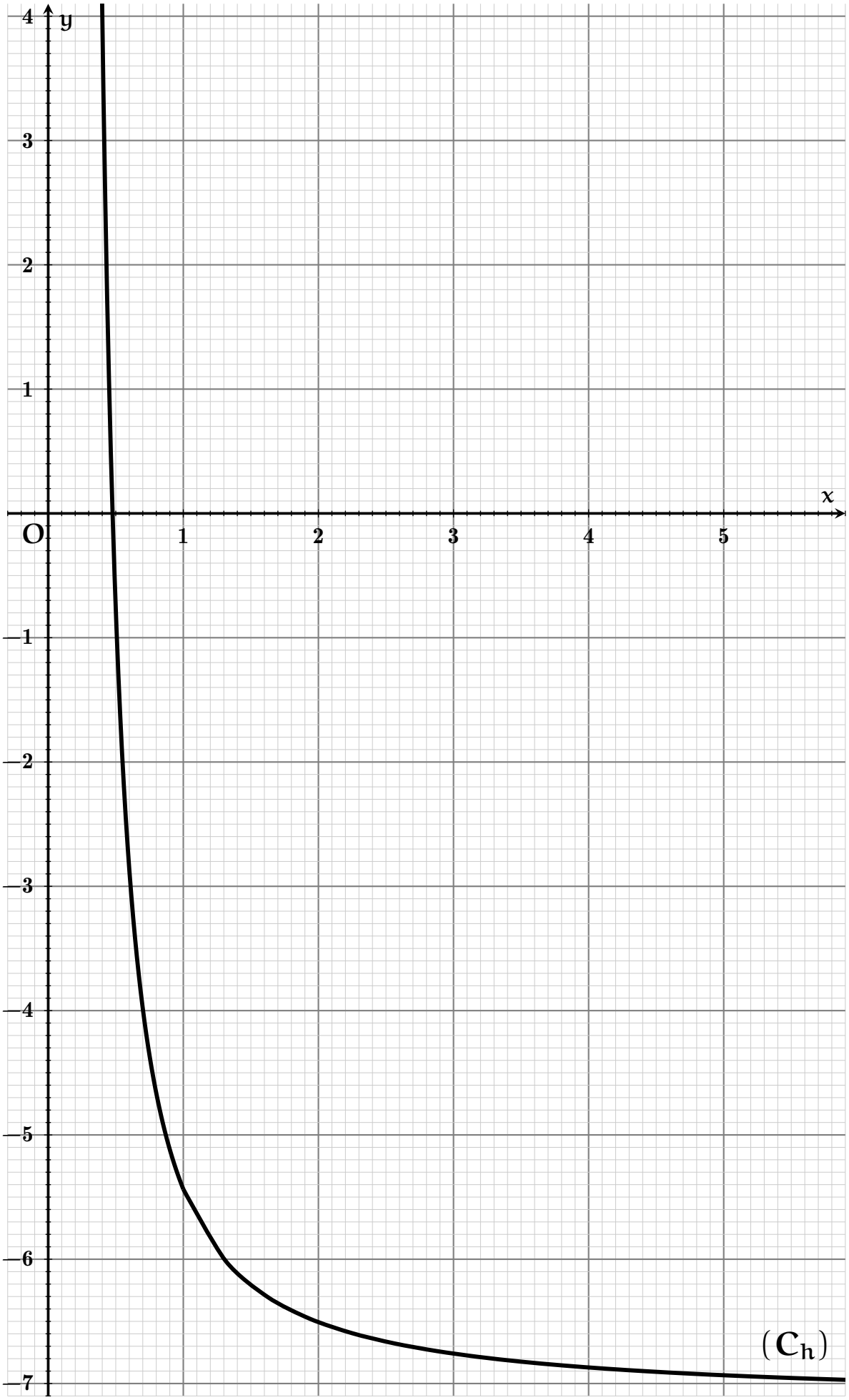


انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:

الإجابة النموذجية

☺☺بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا☺☺



الإسم:

.....

.....

.....

اللقب:

.....

.....

.....

الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية
في مادة الرياضيات

الشعبة: رياضيات. / 2022/2023

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (سحب في آن واحد) (04 ن)

U_2: $\boxed{2R ; 5B}$ U_1: $\boxed{3R ; 2B}$

• نرمز للأحمر بـ R وللأبيض بـ B.

A: " سحب كريتين حمراوين من الكيس U_1 "

B: " سحب كريتين حمراوين من U_2 "

1- أ/ حساب الاحتمالات :

• $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \boxed{\frac{3}{10} = P(A)}$ (0,25)

• $P_A(B)$: إحتمال سحب كريتين حمراوين من U_2 مع العلم أن الكريتين المسحوبتين من U_1 حمراوين أي يصبح: U_2: $\boxed{4R ; 5B}$

ومنه: (0,25)

$P_A(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6} = P_A(B)}$

• الاستنتاج: $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$ (0,25)

ب/ التبيان أن: $P(\bar{A} \cap B) = \frac{19}{360}$:

• $P(\bar{A} \cap B)$: هو احتمال سحب كريتين حمراوين من U_1 و سحب كريتين حمراوين من U_2 أي يسحب:

($2B$ من U_1 و $2R$ من U_2) $\boxed{2R ; 7B}$

أو ($1R$ ، $1B$ من U_1 و $2R$ من U_2) $\boxed{3R ; 6B}$

ومنه:

$P(\bar{A} \cap B) = \frac{C_2^2}{C_5^2} \times \frac{C_2^2}{C_9^2} + \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} \times \frac{C_3^2}{C_9^2}$

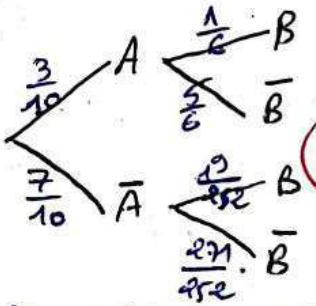
$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{36} + \frac{2 \times 3}{10} \times \frac{3}{36}$

$\boxed{P(\bar{A} \cap B) = \frac{19}{360}}$ (0,25)

• الاستنتاج: $P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{19}{360}}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{19}{360} \times \frac{10}{7}$

$\boxed{P_{\bar{A}}(B) = \frac{19}{252}}$ (0,25)

2- أ/



(0,5)

ب/ لدينا: $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

ومنه: $P(B) = \frac{19}{360} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{37}{360} = P(B)}$ (0,25)

• حساب:

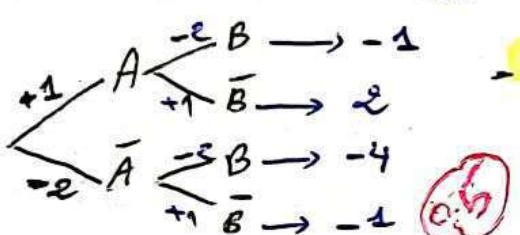
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{10} + \frac{37}{360} - \frac{3}{10} \times \frac{1}{6}$

$\boxed{P(A \cup B) = \frac{127}{360}}$ (0,25)

3- $P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{19}{360}}{\frac{37}{360}} = \boxed{\frac{19}{37}}$ (0,25)

4- أ/



(0,5)

X: المجموع

ومنه: $X(\Omega) = \{-4 ; -1 , 2\}$

• قانون الاحتمال لـ X :

• $P(X = -4) = \frac{7}{10} \times \frac{19}{252} = \frac{133}{2520} = \frac{19}{360}$

• $P(X = 2) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{90}{360}$

• $P(X = -1) = 1 - \frac{19}{360} - \frac{90}{360} = \frac{251}{360}$

ومنه:

$X = x_i$	-4	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{360}$	$\frac{251}{360}$	$\frac{90}{360}$

(0,75)

ب/ حساب الأمل :

$E(X) = -4 \times \frac{19}{360} - 1 \times \frac{251}{360} + 2 \times \frac{90}{360}$

$= \frac{-147}{360} \approx \boxed{-0,41 = E(X)}$ (0,25)

التمرين الثاني: (04 ن)

$u_n = 2^n$

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

1- S_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية ومنه:

$S_n = u_0\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = 2^{n+1}-1 = 2\times 2^n - 1$

ومنه: $\boxed{S_n = 2\times u_n - 1}$ 0,25

• ومنه: $2u_n - S_n = 1$

ومنه وجد $a=2$ و $b=-1$ بحيث $au_n + bS_n = 1$ 0,25

وحسب مبرهنة بيزو العددان: u_n و S_n أوليان فيما بينهما.

2- أ- دراسة بواقي القسمة:

$u_0 = 2^0 \equiv 1[7]$

$u_1 = 2^1 \equiv 2[7]$

$u_2 \equiv 2^2 \equiv 4[7]$

$u_3 = 2^3 \equiv [7]$

ومنه: 0,5

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$u_n \equiv$	1	2	4

ب- تعيين باقي قسمة العدد A على 7 حيث:

$A = (u_{2024} + u_{1962} - S_{1444})^{1954} - 2\times 6^{2022}$

لدينا: $6 \equiv -1[7]$ ومنه: $-2\times 6^{2022} \equiv -2[7]$

أي: $\boxed{-2\times 6^{2022} \equiv 5[7]}$ (1)

ولدينا: $u_{2024} \equiv 4[7]$ لأن: $2024 = 3\times 674 + 2$

و $u_{1962} \equiv 1[7]$ لأن: $1962 = 3\times 654$

ولدينا: $S_{1444} = 2\times u_{1444} - 1$

ومنه: $S_{1444} \equiv 2\times 1 - 1[7]$

أي: $S_{1444} \equiv 3[7]$

(لأن: $u_{1444} \equiv 2[7]$ لأن: $1444 = 3\times 481 + 1$)

ومنه نجد: $(u_{2024} + u_{1962} - S_{1444})^{1954} \equiv (4+1-3)^{1954}[7]$

$\equiv 2^{1954}[7]$

وبما أن: $1954 = 3\times 651 + 1$

فإن: $\boxed{(u_{2024} + u_{1962} - S_{1444})^{1954} \equiv 2[7]}$ (2)

من (1) و (2) نجد أن: $A \equiv 2+5[7]$ أي: $A \equiv 0[7]$ 0,75

ومنه باقي قسمة A على 7 هو 0.

جـ- تعيين قيم n بحيث S_{2n} مضاعف لـ 7

أي: $S_{2n} \equiv 0[7]$ ومنه: $2\times u_{2n} - 1 \equiv 0[7]$

ومنه: $2u_{2n} \equiv 1[7]$ أي: $2u_{2n} \equiv 8[7]$ وبما أن: $2\wedge 7 = 1$

فإن: $u_{2n} \equiv 4[7]$ من الجدول السابق

نجد أن: $2n \equiv 2[3]$ أي: $2n = 3k+2$ 0,5

ومنه: $n \equiv 1[3]$ ($2\wedge 3 = 1$ لأن)

ومنه: $\boxed{n = 3\alpha + 1 \ ; \ \alpha \in \mathbb{N}}$

3- $(E) \dots 4x - 7y = 3$

أ- لدينا: $S_2 = (2^3 - 1) - 1 = 6$

و $S_1 = 2^2 - 1 = 3$ 0,25

ولدينا: $4(6) - 7(3) = 24 - 21 = 3$

إذن: $(S_2 - 1 ; S_1)$ حل للمعادلة (E)

• حل المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases}$ و

ومنه بالطرح طرفا لطرف: $4(x-6) - 7(y-3) = 0$

ومنه تصبح: $4(x-6) = 7(y-3)$

أي $4 \mid 7(y-3)$ وبما أن: $7\wedge 4 = 1$

فإن: $4 \mid y-3$ ومنه: $\boxed{y = 4k+3 \ / \ k \in \mathbb{Z}}$

بالتعويض في المعادلة (E) نجد:

$x = 7k+6 \ ; \ k \in \mathbb{Z}$ 0,5

⇐ ومنه حلول المعادلة (E) هي:

$\boxed{(x,y) \in \{(7k+6 ; 4k+3) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

ب- $d = PGCD(x,y)$ معناه:

$d \mid x$ و $d \mid y$ ومنه: $d \mid 4x - 7y$

ومنه: $d \mid 3$ أي: $d \in \{1,3\}$ 0,25

إذن: $\boxed{d = 1 \text{ أو } d = 3}$

4- $\alpha \in \mathbb{N}$ و $N = \overline{1\alpha\alpha 21\alpha}^4$

• إيجاد α بحيث $7 / N$ معناه:

$N \equiv 0[7]$ أي:

$\alpha + 4 + 2\times 4^2 + \alpha\times 4^3 + \alpha\times 4^3 + 4^5 \equiv 0[7]$

ومنه: $\alpha(1+64+256) + (4+32+1024) \equiv 0[7]$

ومنه: $321\alpha + 1060 \equiv 0[7]$ 0,25

لدينا: $321 \equiv 6\ [7]$ و $1060 \equiv 3\ [7]$

أي: $321 \equiv -1\ [7]$.

ومنه: $321\alpha + 1060 \equiv -\alpha + 3\ [7]$

ومنه: $-\alpha + 3 \equiv 0\ [7]$

أي: $\alpha \equiv 3\ [7]$ ومنه: $\alpha = 7k+3$; $k \in \mathbb{N}$

ولدينا: $0 \leq \alpha < 4$ ومنه $\boxed{\alpha = 3}$ 0,25

• $N = 321\alpha + 1060 = 321(3) + 1060$

$\boxed{N = 2023}$ 0,25

التمرين الثالث: (4,5 نقاط)

(I): $(E): \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$

1) تعيين a و b حيث (E) تكافئ:

$(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 + a\bar{z} + b) = 0$

أي: $\bar{z}\bar{z}^2 + a\bar{z}\bar{z} + b\bar{z} + \bar{z}^2 + a\bar{z} + b = 0$

ومنه: $\bar{z}^3 + (a+1)\bar{z}^2 + (b+a)\bar{z} + b = 0$

بالمطابقة مع (E) نجد: $\boxed{b = 7}$ و $a + 7 = 3$

أي: $\boxed{a = -4}$ 0,25

أي (E) تكافئ: $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

2) حل المعادلة (E) في $\mathbb{C}$:

(E) تكافئ: $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

معناه: $\begin{cases} \bar{z} + 1 = 0 \\ \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0 \end{cases}$ أي:

$\bar{z} = -1$ أو:

حساب المميز: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7) = -12$ 0,75

$\Delta = (\sqrt{12}\, i)^2 = (2i\sqrt{3})^2$

ومنه للمعادلة (2) حلان مترافقان:

$\bar{z}_1 = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3} \Rightarrow z = 2 + i\sqrt{3}$

$\bar{z}_2 = 2 + i\sqrt{3} \Rightarrow z = 2 - i\sqrt{3}$.

ومنه حلول (E) هي: $\boxed{S = \{-1; 2 - i\sqrt{3}; 2 + i\sqrt{3}\}}$

(II): • $z_A = -1$ / • $z_B = 2 + i\sqrt{3}$

• $z_C = \overline{z_B} = 2 - i\sqrt{3}$

• $z_D = 3$

1) تعيين قيم n بحيث يكون العدد: $(z_B - z_A)^n$ حقيقيا سالبا معناه:

$\arg[(z_B - z_A)^n] = n \arg(z_B - z_A) = \pi + 2\pi k$

$z_B - z_A = 2 + i\sqrt{3} + 1 = 3 + i\sqrt{3}$

ومنه نضع: $\theta = \arg(z_B - z_A)$ فيكون:

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$ 0,5

لأن: $|z_B - z_A| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ومنه: $n \times \left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2\pi k$

ومنه: $\boxed{n = 12k + 6 \ ; \ k \in \mathbb{N}}$

2) تعيين طبيعة المثلث ABC:

$AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ 0,5

$BC = |z_B - z_C| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

بما أن: $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) أ/ $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$= \frac{-3 + 3i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3}{4} = i\sqrt{3}$

ومنه: $\boxed{\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}}$ 0,5

لأنه تخيلي صرف.

ومنه: $z_A - z_C = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C)$ 0,5

ومنه A صورة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\sqrt{3}$.

ب/ بما أن: $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن المثلث ACD قائم في C وبالتالي

وبالتالي الدائرة المحيطة بالمثلث ACD مركزها منتصف القطعة [AD] ونصف قطرها

$r = \frac{AD}{2}$

ومنه: $r = \frac{|z_D - z_A|}{2} = \frac{|3+1|}{2} = \boxed{2 = r}$

ومركزها النقطة I ذات اللاحقة 1

$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (0,5)

أي: $\boxed{I(1;0)}$

4- أ- تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \vec{AB})$:

$(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \equiv \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

• تعيين مجموعة النقط (Γ):

لدينا: $z + 1 = 2k\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

ومنه تكافئ: $z - z_A = k(z_B - z_A)$

ومنه: $\frac{z - z_A}{z_B - z_A} = k$ (0,5)

أي: $\begin{cases} (\vec{AB}, \vec{AM}) = 0 \\ AM = k \cdot AB \end{cases}$ و

أي مجموعة النقط (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A والشعاع $\vec{AB}$ توجيه له حيث: $(\vec{u}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{6}$ ما عدا النقطة A.

ب- تعيين مجموعة النقط (Δ):

$\arg(z^2 - 1 - 4i\sqrt{3}) = \arg(z - 2 - i\sqrt{3}) + k\pi$

تكافئ: $\arg(z^2 - z_B^2) = \arg(z - z_B) + k\pi$

ومنه: $\arg[(z - z_B)(z + z_B)] = \arg(z - z_B) + k\pi$

ومنه: $\arg(z + z_B) = k\pi$

أي: $\arg(z - (-z_B)) = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ (0,5)

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم (MB') حيث B' نظيرة B بالنسبة لـ I أي أنه هو موازي لحامل المحور الحقيقي، ما عدا النقطة B'.

التمرين الرابع: (4,5)

$g(x) = x^2 e^x ; D_g = \mathbb{R}_+^*$

(I): 1- دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و:

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$ (0,5)

لدينا: $x^2 + 2x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$

إذن: $g'(x) > 0$ على المجال $]0;+\infty[$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

2) • إذا كان $0 < x < 1$ فإن: $\frac{1}{x} > x$

وبما أن الدالة g متزايدة تماما فإن $g(x) < g(\frac{1}{x})$. (0,5)

• إذا كان: $x > 1$ فإن: $\frac{1}{x} < x$

وبما أن الدالة g متزايدة تماما فإن $g(\frac{1}{x}) < g(x)$

(II) $\begin{cases} f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e \\ h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e \end{cases}$

$D_f = D_h = \mathbb{R}_+^*$

1) - حساب النهايات:

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [\underbrace{(x^2 - 2x + 2)e^x}_{+\infty} + \underbrace{e^{\frac{1}{x}} - 3e}_{1 - 3e}]$

$= +\infty$ (0,5)

• $\lim_{x \to 0} [\underbrace{(x^2 - 2x + 2)e^x}_{2e} + \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{+\infty} - 3e] = +\infty$

التفسير الهندسي: حامل محور التراتيب مستقيم مقارب للمنحنى (C_f). (0,25)

2) - أ- تبيان أن: $f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})$:

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$= x^2e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ (0,5)

$\boxed{f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})}$;

• $f'(1) = g(1) - g(\frac{1}{1}) = \boxed{0 = f'(1)}$ (0,25)

ب- لدينا مما سبق:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	

(0,5)

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ (0,5)

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = e + e - 3e$

$\boxed{f(1) = -e}$

0,5

3- أ-

• لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1[$

ومستمرة و: $f(0{,}5) \simeq 1{,}3 > 0$

$f(0{,}6) \simeq -0{,}7 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا: $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

• ولدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ومستمرة: $f(1{,}5) = -0{,}6 < 0$

$f(1{,}6) = 0{,}4 > 0$

0,75

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $1{,}5 < \beta < 1{,}6$.

ومنه: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ و $1{,}5 < \beta < 1{,}6$.

ب- دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_h)

ندرس إشارة: $f(x) - h(x)$.

لدينا: $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

• إشارتها من إشارة $(x^2 - 2x + 2)$ لدينا:

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$ 0,5

إذن: $f(x) - h(x) > 0$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$

إذن: (C_f) يقع فوق (C_h).

جـ- بما أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة فاصلتها x من المجال $]0;+\infty[$ ومنه (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته:

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ 0,5

$f'(1) = 0$

$\boxed{(T): y = -e}$

4- أ/ الإنشاء (أنظر الشكل) 0,75

ب- المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلين متمايزين لما $f(m) \in]-e;+\infty[$ 0,25

أي لما $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

5- أ- لدينا:

$$\left[(x^2 - 4x + 6)e^x - 3e\right]' = (2x-4)e^x + (x^2 - 4x + 6)e^x$$
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x$$
$$= f(x) - h(x).$$

وبما أن: $(1)^2 - 4(1) + 6)e - 3e = 3e - 3e = 0$

إذن الدالة الأصلية للدالة $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

التي تنعدم عند 1 هي:

$x \longmapsto (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$ 0,5

إذن:

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t\,dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

ب-

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 (f(x) - h(x))\,dx$$
$$= \int_\lambda^1 (x^2 - 2x + 2)e^x\,dx$$
$$= -\int_1^\lambda (x^2 - 2x + 2)e^x\,dx$$

0,5

$$\boxed{A(\lambda) = -(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda + 3e}$$

• $\lim\limits_{\lambda \to 0^-} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 0^-} \left(3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda\right)$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0^-} A(\lambda) = 3e - 6}$$ 0,25

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (4 نقاط)

1- $(E) \text{ --- } 2022x - 1443y = 9$

أ- إيجاد: $PGCD(2022, 1443)$:

ط1 خوارزمية إقليدس:

$2022 = 1443 \times 1 + 579$

$1443 = 579 \times 2 + 285$

$579 = 285 \times 2 + 9$

$285 = 9 \times 31 + 6 \Rightarrow$

$9 = 6 \times 1 + \boxed{3}$

$6 = 3 \times 2$

0,25

$PGCD(2022, 1443) = 3$

ط2 التحليل إلى عوامل أولية:

$2022 = 2 \times 3 \times 337$

$1443 = 3 \times 13 \times 37$

ومنه: $\boxed{PGCD(2022; 1443) = 3}$

• الاستنتاج: لدينا $3 \mid 9$ إذن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ 0,25

ب- حل المعادلة (E)

المعادلة (E) تكافئ: $674x - 481y = 3$

وبما أن $(5;7)$ حلها فإن $674(5) - 481(7) = 3$

بالطرح طرفا لطرف نجد: $674(x-5) - 481(y-7) = 0$

ومنه: $674(x-5) = 481(y-7)$

ومنه $674 \mid 481(y-7)$ وبما أن

$PGCD(674; 481) = 1$

فإنه حسب غوص: $674 \mid y-7$

أي: $y - 7 = 674k$ إذن: $\boxed{y = 674k + 7 \quad k \in \mathbb{Z}}$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$674(x-5) = 481(674k + 7 - 7)$

ومنه: $x - 5 = 481k$ 0,25

أي: $\boxed{x = 481k + 5 \ / \ k \in \mathbb{Z}}$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات:

$\boxed{(x;y) \in \{(481k+5; 674k+7) \ / \ k \in \mathbb{Z}\}}$

جـ- حل الجملة:

$$\begin{cases} \lambda \equiv 1 \ [674] \\ \lambda \equiv 4 \ [481] \end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases} \lambda = 674k + 1 \\ \lambda = 481q + 4 \end{cases} \quad \text{و} \quad q, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه: $674k + 1 = 481q + 4$

أي: $674k - 481q = 3$

ومنه:

$$\begin{cases} k = 481t + 5 \\ q = 674t + 7 \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

إذن: $\lambda = 674(481t + 5) + 1$ 0,5

$\boxed{\lambda = 324194t + 3371 \ ; \ t \in \mathbb{Z}}$

2- أ- دراسة بواقي القسمة لـ 7^n على 9:

لدينا:

$$\begin{cases} 7^0 \equiv 1 \ [9] \\ 7^1 \equiv 7 \ [9] \\ 7^2 \equiv 4 \ [9] \\ 7^3 \equiv 1 \ [9] \end{cases}$$

ومنه

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$7^n \equiv$	1	7	4

0,5

ب- تعيين باقي قسمة العدد A على 9 حيث:

$A = 1441^{2020} + 1442^{2021} + 1443^{2022}$

لدينا:

• $1441 \equiv 1 \ [9] \Rightarrow \boxed{1441^{2020} \equiv 1 \ [9]}$ ...(1)

• $1442 \equiv 2 \ [9]$
$\equiv -7 \ [9]$ $\Big\} \Rightarrow 1442^{2021} \equiv (-7)^{2021} \ [9]$

وبما أن: $2021 = 3 \times 673 + 2$ فإن:

(2) --- $\boxed{1442^{2021} \equiv 4 \ [9]}$

• $1443 \equiv 3 \ [9] \Rightarrow 1443^{2022} \equiv 3^{2022} \ [9]$
$\equiv 3^{2 \times 1011} \ [9]$

أي: $1443^{2022} \equiv (3^2)^{1011} \ [9]$

إذن: (3) --- $\boxed{1443^{2022} \equiv 0 \ [9]}$ 0,75

بجمع (1) و(2) و(3) طرفا لطرف:

$A \equiv 1 + 4 + 0 \ [9]$ أي: $\boxed{A \equiv 5 \ [9]}$

• إذن باقي قسمة A على 9 هو 5.

3- أ- $\alpha = \overline{31042}^{5} = 2 + 4 \times 5 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^3 + 3 \times 5^4 = \boxed{2022 = \alpha}$ 0,25

$\beta = \overline{2n233}^{5} = 3 + 3\times5 + 2\times5^2 + 5^3 + 2\times5^4$

$= \boxed{1443 = \beta}$ (0,25)

ب- إيجاد قيم n بحيث:

$$\begin{cases} 2022x - 1443y = 9 & \text{---(1)} \\ 7^{x+y} + 2n^2 \equiv 0\ [9] & \text{---(2)} \end{cases}$$

من (1) نجد: $\begin{cases} x = 481k + 5 \\ y = 674k + 7 \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

ومنه (2) تصبح:

$7^{1155k+9} + 2n^2 \equiv 0\ [9]$

ومنه: $7^{3(385k+3)} + 2n^2 \equiv 0\ [9]$

إذن: $1 + 2n^2 \equiv 0\ [9]$

أي: $2n^2 \equiv -1\ [9]$

إذن: $2n^2 \equiv 8\ [9]$ ومنه $n^2 \equiv 4\ [9]$

(لأن: $2\wedge9 = 1$)

لدينا:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$n^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]

ومنه: $n = 9k+2$ أو $n = 9k+7$ مع $k \in \mathbb{N}$ (0,75)

$\boxed{n \in \{9k+2;\ 9k+7 \mid k \in \mathbb{N}\}}$

التمرين الثاني: (4,25)

U_2: $\{1, 1, 2, 2\}$ U_1: $\{1, 1, 2, 1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 6, 5, 10\}$

1- أ- حساب احتمالات الأحداث:

A: "سحب كريتين تحملان رقمين فرديين"

إما سحبهما من U_1 أو من U_2 ومنه:

$$\boxed{P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{2^2}{4^2} = \frac{31}{100}}$$ (0,25)

B: "سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين"

إما سحبهما من U_1 أو من U_2 ومنه:

$$P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} + \frac{6}{10} \times \frac{2^2}{4^2} = \boxed{\frac{53}{100} = P(B)}$$ (0,25)

C: "سحب كريتين إحداهما فردي والأخرى زوجي"

إما من الصندوق U_1 أو من الصندوق U_2 ومنه:

$$P(C) = \frac{4}{10} \times \frac{A_4^1 \times A_2^1 \times 2}{A_6^2} + \frac{6}{10} \times \frac{2^1 \times 2^1 \times 2}{4^2}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{16}{30} + \frac{3}{5} \times \frac{8}{16} = \boxed{\frac{77}{150} = P(C)}$$ (0,25)

ب- $P_B(U_1) = \dfrac{P(B \cap U_1)}{P(B)}$

$P(B \cap U_1)$ هو احتمال سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين من الصندوق U_1 معتمدة:

$$P(B \cap U_1) = \frac{4}{10} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2}{75}$$ (0,25)

ومنه:

$$P_B(U_1) = \frac{\frac{2}{75}}{\frac{53}{100}} = \boxed{\frac{8}{159} = P_B(U_1)}$$ (0,25)

2- أ-

$\{1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 3\}$ $\begin{cases} n = 10 \\ p = 3 \end{cases}$

1- قيم X:

$1\,1\,1 \to X = 1$

$1\,1\,2 \to X = 2$

$1\,2\,2 \to X = 4$

$1\,1\,3 \to X = 3$

$1\,2\,3 \to X = 6$

$2\,2\,2 \to X = 8$

$2\,2\,3 \to X = 12$

ومنه: $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ (0,5)

ب- قانون احتمال X:

$$P(X=1) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{40}{120} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^2 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$ (1,75)

$$P(X=6) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=8) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(X=12) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

ومنه:

$X=x_i$	1	2	3	4	6	8	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$

• حساب الأمل :

$$E(X)=1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{30}+12\times\frac{1}{20}$$ 0,25

$$=\frac{58}{15}\simeq \boxed{3,87\simeq E(X)}$$

جـ- حساب احتمال الحدث " $\log(X-2)<\frac{1}{2}$ "

لدينا $\log(X-2)<\frac{1}{2}$ معناه :

$0<X-2<10^{\frac{1}{2}}$

ومنه، $2<X<2+\sqrt{10}$ 0,25

$2<X<5,162\ldots$

ومنه، $X\in\{3,4\}$

ومنه،

$$P(\log(X-2)<\tfrac{1}{2})=P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}$$

$$\boxed{P(\log(X-2)<\tfrac{1}{2})=\frac{1}{3}}$$ 0,25

التمرين الثالث : (04,25 ن)

$$(u_n):\begin{cases}u_0=\alpha\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\end{cases}\qquad \boxed{0<\alpha<\beta}$$

$$(v_n):\begin{cases}v_0=\beta\\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<v_n$.

أي البرهان أن : $u_n-v_n\leq 0$ و $0<u_n$ و $0<v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $u_n-v_n\leq 0$ و $u_n>0$ و $v_n>0$ "

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

• من أجل $n=0$: لدينا : $u_0=\alpha$ و $v_0=\beta$

ومنه، $0<u_0<v_0$

ومنه $P(0)$ محققة .

• لتكن n عددًا طبيعيًا .

ولنفرض أن : $0<u_n\leq v_n$

ولنثبت أن : $0<u_{n+1}\leq v_{n+1}$.

لدينا : $u_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}>0$ لأن : $0<u_n$ و $0<v_n$

وكذلك : $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}>0$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-\frac{u_n+v_n}{2}$$

$$=\frac{4u_nv_n-(u_n+v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{4u_nv_n-u_n^2-v_n^2-2u_nv_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{-(u_n^2+v_n^2-2u_nv_n)}{2(u_n+v_n)}$$ 0,75

$$=\frac{-(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}\leq 0$$

لأن : $0<u_n\leq v_n$.

ومنه $P(n+1)$ محققة .

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0<u_n\leq v_n$.

جـ) أ/- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

لدينا: $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$

$= (u_n - v_n) \times \frac{1}{2} \times \frac{u_n - v_n}{(u_n+v_n)}$ (0,25)

إذن يكفي إثبات أن: $\frac{u_n - v_n}{(u_n+v_n)} \leq 1$

لدينا: $u_n > 0$ و $v_n > 0$

ومنه: $u_n - v_n \leq u_n + v_n$

ومنه: $\frac{u_n - v_n}{u_n+v_n} \leq 1$ (0,25)

ومنه: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

ب- لدينا مما سبق:

$0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1})$

و

$0 < v_2 - u_2 \leq \frac{1}{2}(v_1 - u_1)$

$0 < v_1 - u_1 \leq \frac{1}{2}(v_0 - u_0)$ (0,5)

ومنه بالضرب طرفا لطرفا الاختزال نجد:

$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

أي: $\boxed{v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha)}$

• إستنتاج النهاية:

لدينا: $0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha)$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ (0,25)

لأن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha) = 0$

3)- أ/ دراسة إتجاه تغير المتتاليتان:

لدينا:

• $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} - u_n$

$= \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n+v_n}$

$= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n+v_n} \geq 0$ (0,5)

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ولدينا:

• $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n$

$= \frac{u_n+v_n-2v_n}{2}$

$= \frac{u_n - v_n}{-2} \leq 0$ (0,5)

ومنه: المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- المتتالية (u_n) متزايدة تماما

والمتتالية (v_n) متناقصة تماما

ولدينا: $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

إذن: المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان (0,25)

4)- $w_n = u_n \times v_n$

أ- إثبات أن (w_n) ثابتة:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$w_{n+1} = u_{n+1} \times v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} \times \frac{u_n+v_n}{2}$

$= u_n \times v_n = w_n$ (0,25)

إذن المتتالية (w_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

• ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$w_n = w_0 = u_0 \times v_0 = \boxed{\alpha\beta = w_n}$ (0,25)

ب- بما أن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان فإنهما تتقاربان نحو (0,25) نفس النهاية l. ومنه:

$\lim_{n\to+\infty} w_n = l^2 = \alpha\beta > 0$

ومنه: $l = \sqrt{\alpha\beta}$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{\alpha\beta}}$ (0,25)

التمرين الرابع: (7,5 نقط)

$$(I): \begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ- البرهان أن f مستمرة على يمين 0:

لدينا: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} [x\ln(x+2) - x\ln x]$

$= 0 = f(0)$ (0,5)

ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.

ب- دراسة قابلية الإشتقاق:

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ (0,5)

$= +\infty$.

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين.

ج- $h(x) = \frac{2}{x}$.

لدينا: $f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (0,25)

$= \frac{2}{\frac{2}{x}} \times \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \frac{2\ln(1+h(x))}{h(x)}$

ومنه:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(1+h(x))}{h(x)}$ (0,25)

$= \lim_{h(x)\to 0} 2 \times \frac{\ln(1+h(x))}{h(x)} = 2$

2) أ- حساب المشتقة:

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0,+\infty[$

و: $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\left(\frac{x+2}{x}\right)} \cdot x$

$= \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} \times x$.

$\boxed{f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{(x+2)}}$ (0,5)

الدالة f' قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و:

$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$.

$= -\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$.

$= \frac{-2x-4+2x}{x(x+2)^2}$ (0,25)

$\boxed{f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}}$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f':

لدينا من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$

$f''(x) < 0$ (0,25)

ومنه الدالة f' متناقصة تماما على $]0,+\infty[$ - ولدينا:

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right]$ (0,25)

$= 0$

ج- بما أن الدالة f' متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ (0,25)

فإن من أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا: $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

* جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$ 2

(0,5)

3) كتابة معادلة المماسين (T_1) و (T_2):

(T_2) عند الطرف هو نصف مستقيم معادلته

$\boxed{(T_2): x=0}$ (0,25)

• (T_1) هو المماس عند النقطة $A(2, f(2))$

لدينا ،

$f(2) = 2\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 2\ln 2$

$f'(2) = \ln\left(\frac{4}{2}\right) - \frac{2}{4} = \ln(2) - \frac{1}{2}$

ومنه ،

$(T_1): y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$= \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)(x-2) + 2\ln 2$

$= \left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right)x - 2\ln 2 + 1 + 2\ln 2$

$\boxed{(T_1): y = \left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right)x + 1}$ 0,5

(II) $D_u = \mathbb{R}_+^*$; $u(x) = \frac{2x}{x+2}$

1) أ- الدالة u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$u'(x) = \frac{2(x+2) - 2x}{x+2}$

$= \frac{4}{x+2}$

بما أن : $u'(x) > 0$ فالدالة u متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا ،

$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+2} = 2$.

ومنه جدول تغيراتها كالتالي ،

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
$u(x)$	0 ↗	2

0,5

ب- التبيان :

لدينا من أجل كل x من $]0, +\infty[$:

$f'(x) - u(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2x}{x+2}$

$= x\left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right)$

$= x f'(x)$. 0,25

* الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) :

لدينا ، $f(x) - u(x) = x f'(x) > 0$

على المجال $]0, +\infty[$ 0,5

ومنه (C_f) يقع فوق (γ).

2)- الإنشاء : 0,75

3)- أ- المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة λ هي :

$y = f'(\lambda)(x - \lambda) + f(\lambda)$

$y = f'(\lambda)x - \lambda f'(\lambda) + f(\lambda)$

$= f'(\lambda)x + u(\lambda)$

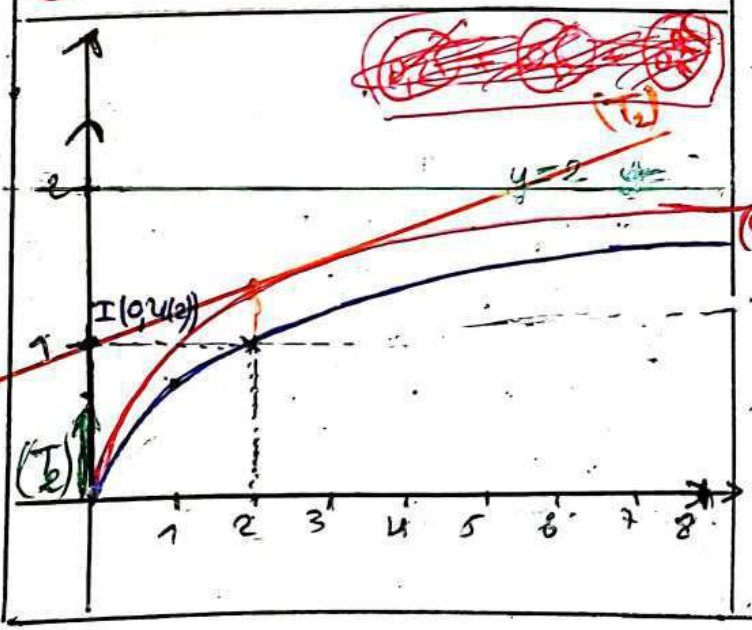
لأن ،

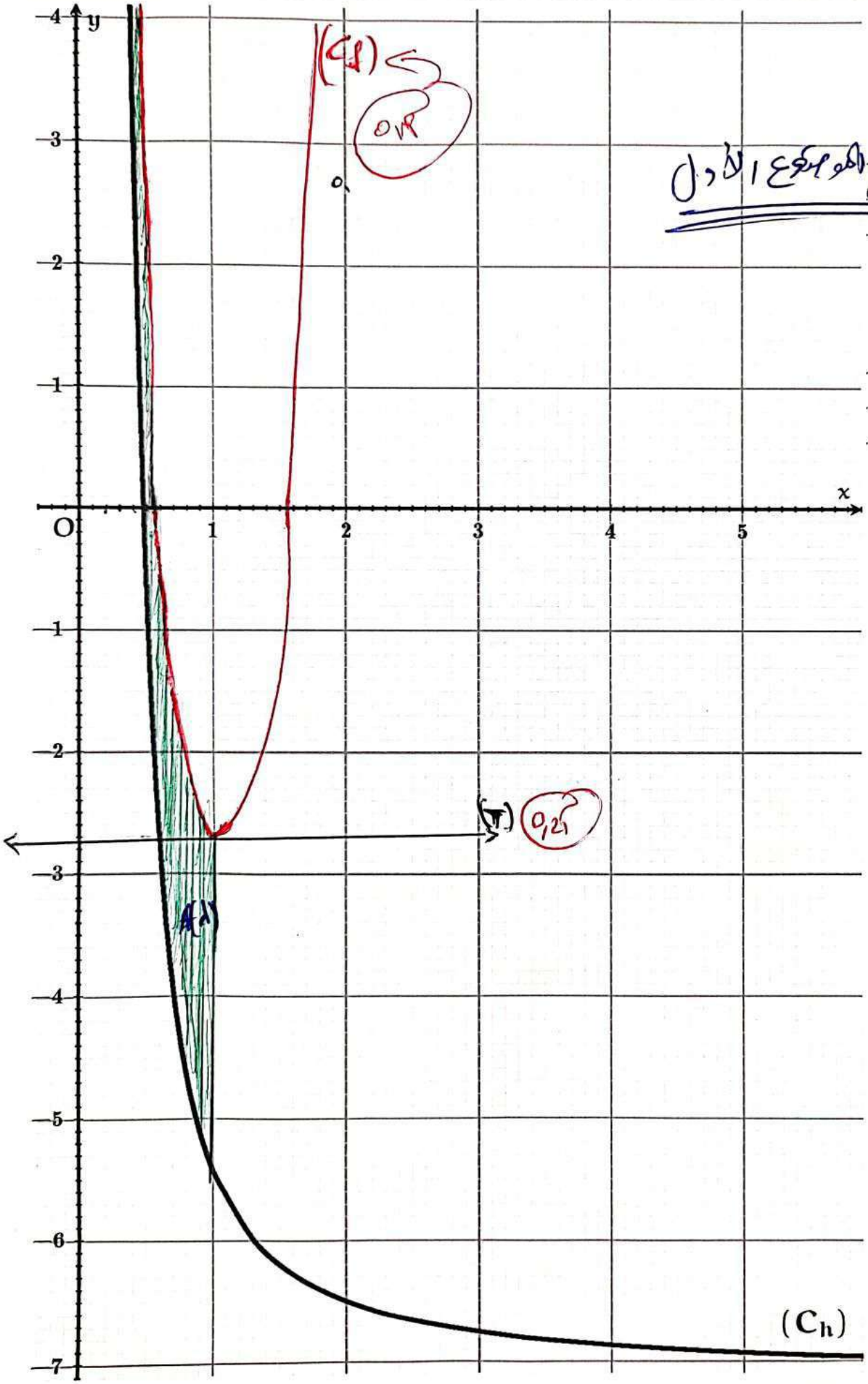
ومنه ، $u(\lambda) = f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)$

ومنه هذا المماس يقطع حامل محور التراتيب في النقطة I التي ترتيبها $u(\lambda)$. 0,5

ب- طريقة إنشاء المماس .

لإنشاء المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة λ يكفي إنشاء المستقيم الذي يصل النقطة من (C_f) ذات الفاصلة λ والنقطة $I(0, u(\lambda))$ 0,5 الإنشاء 0,25





الإسم:

التمثيل البياني الموضوع الأول

اللقب:

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غرداية — **ثانويات المقاطعة التفتيشية غرداية 02**

امتحان بكالوريا التجريبي — **دورة: ماي 2023**

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدّة: 04 سا و 30 د**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-4)(z^2+4z+16)=0$

2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب

$z_A=4$ ، $z_B=-2+2i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

• أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

3) نعتبر العدد المركب L حيث: $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

أ- أكتب العدد L على الشكل الأسي ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقي سالب.

د- ما طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C. أوجد عبارته المركبة.

ه- عين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتحويل r.

و- ما طبيعة الرباعي $ABCE$ ؟ علل إجابتك.

4) (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left|iz+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|z-4\right|$

أ- بين أن كلا من النقطتين E و B تنتميان إلى (γ)

ب- عين طبيعة المجموعة (γ).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر ثنائية $(x_0;q)$ حيث x_0 و q عددين طبيعيين غير معدومين و $p\gcd(x_0,q)=1$. (x_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول x_0 ، وتحقق من أجل كل عدد طبيعي n: $x_{n+1}+2x_{n+3}-44{x_0}^2q^n=0$

1) أ- بين أن: $q+2q^3=44x_0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $p\gcd\left(1+2q^2,4\right)=1$ ثم حدد قيمة كل من x_0 و q

2) نأخذ فيما يلي $(x_0;q)=(3;4)$ ونضع من أجل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n\equiv 0[3]$

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+1}=4S_n+3$ ، ثم حدد قيمة العدد: $p\gcd\left(S_{n+1};S_n\right)$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n\equiv 0[5]$

3) أ- حدد باقي قسمة العدد S_{27} على 17.

ب- استنتج ثلاثة قواسم أولية للعدد S_{27}

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على **5** كريات حمراء و**3** كريات صفراء وكريتين خضراوين. الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من الوعاء U.

A و B و C ثلاثة أحداث حيث:

- A : " الحصول على ثلاث كريات حمراء"
- B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"
- C : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A و B و C على الترتيب.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

3) نظيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع.

D و E حدثين حيث:

- D : " الحصول على كريتين حمراوين"
- E : " الحصول على كريتين من نفس اللون"

أ- برهن أن: $\mathrm{P}(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب- أحسب بدلالة n العدد $\mathrm{P}(E)$ احتمال الحدث E.

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x)=e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m$ حيث m وسيط حقيقي

(C_m) التمثيل البياني للدالة f_m في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

I. في هذا الجزء نضع: $m=1$

1) أدرس تغيرات الدالة f_1

2) أ- برهن أن المنحني (C_1) يقبل A_0 نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

ب- أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_1) عند النقطة A_0 ثم أنشئه.

ج- أنشئ المنحني (C_1)

II.

1) أ- بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها.

ب- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m وجود نقط تقاطع المنحني (C_m) مع حامل محور الفواصل.

2) أدرس تغيرات الدالة f_m ، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m).

3) أ- m_1 و m_2 عددين حقيقين حيث: $m_1 < m_2$ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_1}) و (C_{m_2})

ب- أنشئ (دون دراسة التغيرات) المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) في نفس المعلم السابق.

4) نعتبر y_m القيمة الحدية المحلية للدالة f_m التي تأخذها عند x_m أكتب كل من x_m و y_m بدلالة m.

استنتج معادلة مستقلة عن m للمنحني (P) مجموعة النقط $M(x_m;y_m)$ لما m يمسح $]-1;+\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: رياضات /البكالوريا التجريبي 2023

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

نعتبر المعادلة التالية: (E) ..... $7x-5y=11$ حيث x و y عددان صحيحان

1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

ج) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر تماما من 7 ، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}$ في النظام العشري

أ) تحقق أن $10^3\equiv -1[11]$

ب) عين قيمة العدد N إذا علمت أن باقي قسمته على 11 هو 4

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس U على 5 كريات بيضاء و3 كريات حمراء وكريتان خضراوان،الكريات متماثلة ولانفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس

1) أحسب إحتمال الحادثتين التاليتين :

A : " الكريات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B : " من بين الكريات الثلاثة المسحوبة توجد كرة واحدة فقط خضراء "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الألوان الظاهرة

أ) عين قانون احتمال المتغير X

ب) احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير العشوائي X

3) في تجربة مستقلة نعتبر الكيس U وكيس آخر V به كريتين بيضاوين وكريتين حمراوين وكرية خضراء

نرمي حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6، إذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس U

وإلا نسحب كرية من الكيس V

أ) بين أن احتمال سحب كرية بيضاء هو $\frac{5}{12}$

ب) علما أن الكرية المسحوبة بيضاء فما احتمال ان تكون من الكيس V

التمرين الثالث: (04 نقاط).

a عدد حقيقي موجب تماما

f الدالة المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) نفرض أن $0 < a < 1$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ب) بين أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

2) نضع $a \succ 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$

أ) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$

ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (w_n) كالآتي:

$w_0 = 0$ ومن أجل كل $n \succ 1$ ، $w_n = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$

- أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و a

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{w_n}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 2 - \ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية : $f(x) = \frac{1}{2}\left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ أحسب $f(-x) + f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\prec} 0} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) أ) أثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (C_f) يوازيان (Δ) يطلب تحديد معادلة كل منهما.

ب) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2 < \alpha < 2,1$ و $-0,5 < \beta < -0,4$

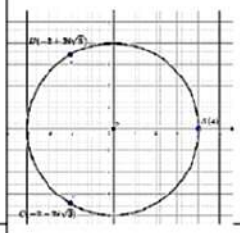
ج) أرسم كلاً من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f).

5) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e-2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا

6) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \alpha$

انتهى الموضوع الثاني

نموذج تصحيح بكالوريا تجريبية 2023

عناصر الإجابة	النقطة	
الموضوع الاول		
التمرين الأول: (6 نقاط)		
1 / $z^2+4z+16=0$ إمّا : $z-4=0$ أي $z=4$ أو $z^2+4z+16=0$ و $\Delta=-12$ أي $\Delta=12i^2$ أي: $z_1=-2+2i\sqrt{3}$ ، $z_2=-2-2i\sqrt{3}$ 	0.5 01	2
2 / كتابة كل من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسّي. $z_A=4e^{i0}$ ، $z_B=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_C=4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$. استنتاج خصائص الدائرة المحيطة بالمثلث ABC بما أنّ: $\lvert z_A\rvert=\lvert z_B\rvert=\lvert z_C\rvert=4$ فإنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O نصف قطرها 4.	0.5	0.5
3 / أ / $L=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ كتابة L على الشكل الأسي : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\lvert L\rvert=1$ و $Arg(L)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad /k\in\mathbb{Z}$ ومنه: $L=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ التفسير الهندسي للنتائج: $\lvert L\rvert=1$ معناه $\left\lvert\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right\rvert=1$ أي: $\frac{\lvert z_B-z_A\rvert}{\lvert z_C-z_A\rvert}=1$ أي: $\lvert z_B-z_A\rvert=\lvert z_C-z_A\rvert$ ومنه: $AB=AC$ و $Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}$ معناه: $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}$. ب / المثلّث ABC متقايس الأضلاع. ج / تعيين قيم n حتى يكون العدد المركّب L^n حقيقيا سالبا تماما. L^n حقيقي سالب تماما معناه: $Arg(L^n)=(2k+1)\pi \quad k\in\mathbb{Z}^-$ أي: $-\frac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi \quad / \ k\in\mathbb{Z}^-$ $-n=6k+3 \quad / \ k\in\mathbb{Z}^-$ أي: $n=-6k-3 \quad / \ k\in\mathbb{Z}^-$. د / إيجاد طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحوّل B إلى C. لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فإنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ التحويل دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$. أيجاد العبارة المركّبة للتحويل : $z'=az+b_r$ و $a=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $b=z_A(1-a)=z_A\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه $b=2-2i\sqrt{3}$ وتصبح العبارة المركّبة من الشكل: $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2-2i\sqrt{3}$.		

هـ / تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالدوران r. لدينا: $z_E=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+2-2i\sqrt{3}$.اي: $z_E=4-4i\sqrt{3}$.

و / الرباعي ABCE معيّن لأن المثلثين ABC وACE متقايسا الأضلاع ويشتركان في الضلع $[AC]$

4 / (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق : $\left|iz+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|z-4\right|$

أ / التبيين أنّ النقطتين B وE تنتميان إلى المجموعة (γ). $\left|iz_B+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|i\left(-2+2i\sqrt{3}\right)+2i-2\sqrt{3}\right|$ أي:

$\left|iz_B+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|-4\sqrt{3}\right|=4\sqrt{3}$ و $\left|z_B-4\right|=\left|-2+2i\sqrt{3}-4\right|=\left|-6+2i\sqrt{3}\right|=4\sqrt{3}$ أي: $B\in(\gamma)$

$$\left|iz_E+2i-2i\sqrt{3}\right|=\left|i\left(4-4i\sqrt{3}\right)+2i-2\sqrt{3}\right|$$

أي: $\left|iz_E+2i-2i\sqrt{3}\right|=\left|2\sqrt{3}+6i\right|=4\sqrt{3}$ و $\left|z_E-4\right|=\left|4-4i\sqrt{3}-4\right|=\left|-4i\sqrt{3}\right|=4\sqrt{3}$ أي: $E\in(\gamma)$.

$$\left|iz+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|z-4\right|$$

$$\left|i\left(z+2-\frac{2\sqrt{3}}{i}\right)\right|=\left|z-4\right|$$

$$\left|i\left(z+2+2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|z-4\right|$$

$$\left|i\right|\times\left|z+2+2i\sqrt{3}\right|=\left|z-4\right| \quad ; \quad \left|i\right|=1$$

$$\left|z-\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|z-4\right|$$

$$\left|z-z_C\right|=\left|z-z_A\right|$$

ب / تعيين طبيعة المجموعة (γ): لدينا:

$\left|z-z_C\right|=\left|z-z_A\right|$ معناه : $MC=MA$ ومنه المجموعة (γ): هي محور القطعة $[AC]$

أو بعبارة أخرى هي المستقيم (BE)

التمرين الثاني: (6 نقاط)

BACBLANC2023+CORRECTIONGHARDAIA2MATHS

الاجابة النموذجية مادة الرياضيات الشعبة: رياضيات بك 2023

	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
			التمرين الثاني (04 نقاط)
1	0,5	1,5	أ- لدينا: $x_{n+1}+2x_{n+3}=44x_n^2$ ؛ (x_n) هندسية أي $x_n=x_0q^n$ ومنه: $x_0q^{n+1}+2x_0q^{n+3}-44x_0^2q^n=0$ اذن: $q+2q^3=44x_0$
	0,5		ب- لدينا: $q(1+2q^2)=44x_0$ q يقسم $44x_0$ و أولي مع x_0 فهو يقسم 44 (حسب غوص) $q\in\{1;4;11;44\}$
	0,5		لما $q=1$ فان: $1+2q^2=3$ ؛ لما $q=4$ فان: $1+2q^2=33$ لما $q=11$ فان $1+2q^2=243$ لما $q=44$ فان: $1+2q^2=1937$ في كل الحالات: $PGCD(1+2q^2;4)=1$ * تحديد x_0 ، q: لما $q=1$ أو $q=11$ فان: $x_0\notin\mathbb{N}$ لما $q=4$ فان: $x_0=3$ ؛ لما $q=44$ فان $x_0=3873$
2	0,5	1,5	أ- لدينا: $(x_0,q)=(3,4)$ ؛ $S_n=x_0+x_1+\dots+x_n$ $S_n=x_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=3\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=4^{n+1}-1$ لدينا: $4\equiv1[3]$ ومنه $4^{n+1}\equiv1[3]$ ومنه $4^{n+1}-1\equiv0[3]$ اذن $S_n\equiv0[3]$
	0,5		ب- التحقق: $S_{n+1}=4^{n+2}-1=4\times4^{n+1}-4+3=4(4^{n+1}-1)+3=4S_n+3$ اذن $PGCD(S_{n+1};S_n)=3$
	0,5		جـ- لدينا: $S_n\equiv0[5]$ أي $4^{n+1}-1\equiv0[5]$ ومنه $4^{n+1}\equiv1[5]$ لدينا: $4\equiv-1[5]$ ومنه $4^{n+1}\equiv(-1)^{n+1}[5]$ ومنه $(-1)^{n+1}\equiv1[5]$ ومنه $n+1$ زوجي أي n فردي اذن قيم n حتى يكون $S_n\equiv0[5]$ هي n فردي أي $n=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

1	0,5	أ- باقي قسمة S_{28} على 17 : لدينا : $S_{28}=4^{28+1}-1=4^{29}-1$ لدينا: $4^{29}=4\times4^{28}$ أي $4^{29}=4\times(4^2)^{14}=4\times(16)^{14}$ نعلم أن $16\equiv-1[17]$ ومنه $(16)^{14}\equiv(-1)^{14}[17]$ أي $(16)^{14}\equiv1[17]$ ومنه $4\times(16)^{14}\equiv4[17]$ ومنه: $4\times(16)^{14}-1\equiv4-1[17]$ ومنه: $S_{28}\equiv3[17]$ اذن باقي قسمة S_{28} على 17 هو 3	3
	0,5	ب- استنتاج القواسم الثلاث الأولية للعدد S_{27} : لدينا: $S_{28}=4S_{27}+3$ و $S_{28}\equiv3[17]$ ومنه $4S_{27}+3\equiv3[17]$ أي $4S_{27}\equiv0[17]$ ومنه $S_{27}\equiv0[17]$ إذن: القواسم الأولية الثلاث المطلوبة لـ S_{27} هي 3 و 5 و 17	

(1

(2

التمرين الثالث: (6 نقاط)

(1 حساب الإحتمالات:

$p(A)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$ .0.5

$p(B)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$ . .0.5

$p(C)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$. .0.5

(2 قيم المتغير العشوائي هي: $X\in\{1;2;3\}$. 0.25

$$p(X=1)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}.$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_5^1+C_3^2\times C_2^1+C_2^2\times C_5^1+C_2^2\times C_3^1+C_5^2\times C_2^1+C_5^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}.$$

$$p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}.$$

قانون إحتمال المتغير العشوائي:

$(X=x_i)$	1	2	3

$p(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$		

0.75

الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=1\times\frac{11}{120}+2\times\frac{79}{120}+3\times\frac{30}{120}=0,87.$$

0.25

3) أ) البرهان أن $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$:

$$p(D)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

0.25

ب) حساب $p(E)$ بدلالة n :

$$p(E)=\frac{A_2^2+A_3^2+A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{2+6+\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{8+n(n-1)}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}.$$

0.5

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E)\geq\frac{1}{2}$:

$p(E)\geq\frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\frac{1}{2}$ أي $2n^2-2n+16\geq n^2+9n+20$.

وبالتالي: $n^2-11n-4\geq 0$ نحسب Δ

$\Delta=137$

$n_1=-0,35$.

$n_2=11,35$.

أي قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E)\geq\frac{1}{2}$ هي: $n\geq 12$

0.5

التمرين الرابع: (6 نقاط)

1.5

I) 1- لدينا : $f_1(x)=e^{-2x}-2e^{-x}+1$

دراسة تغيرات الدالة f_1 :

أ) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-2x}-2e^{-x}+1\right]=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}-2e^{-x}+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}\left(1-2e^{x}+e^{2x}\right)=+\infty$

0.5

ب) الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على وعبارة دالتها المشتقة هي :

$f_1'(x)=-2e^{-2x}+2e^{-x}$ أي $f_1'(x)=2e^{-2x}\left(e^{x}-1\right)$

0.25

اشارة $f_1'(x)$ من اشارة $e^{x}-1$ ومنه نلخص اشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$

أي f_1 متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

0.75

و f_1 متزايدة تمامل على المجال $[0;+\infty[$

و جدول تغيرات الدالة يكون :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1) أ- برهان أن المنحنى (C_1) يقبل نقطة انعطاف A_0 و حساب احداثياتها :

نحسب f_1'' : الدالة f_1' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f_1''(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$ أي

$f_1''(x) = 2e^{-2x}(2 - e^x)$

0.5 نضع $f_1''(x) = 0$ أى $2e^{-2x}(2 - e^x) = 0$ ومنه يكون إذا $2 - e^x = 0$ وبالتالي $x = \ln 2$

ويمكن تلخيص اشارة $f_1''(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$f_1''(x)$		$+$	0	$-$	

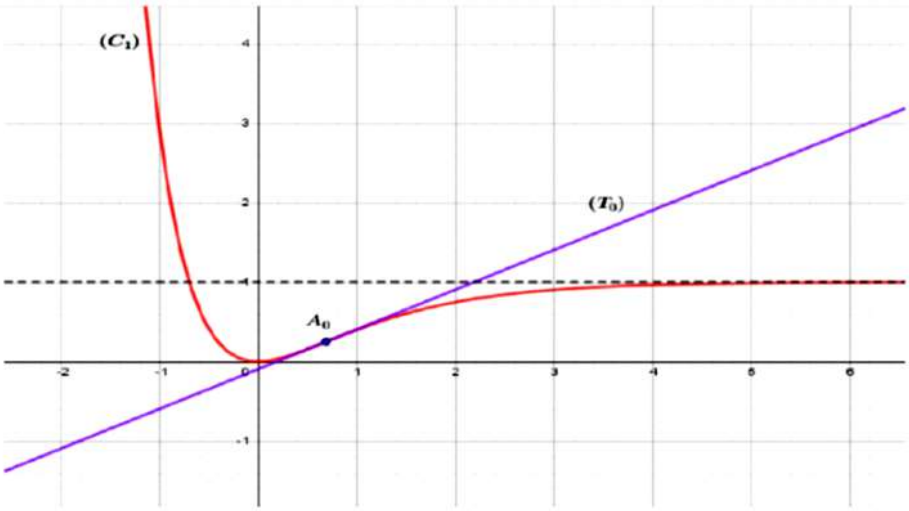
أي المشتقة الثانية للدالة f_1 تنعدم عند الفاصلة $\ln 2$ وتغير اشارتها

0.5 وبالتالي المنحنى (C_1) الممثل للدالة f_1 يقبل النقطة A_0 : $A_0(\ln 2; f_1(\ln 2))$ ومنة $A_0\left(\ln 2; \frac{1}{4}\right)$

ب – معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة هي : $(T) : y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$

1.25 0.05 أي : $(T) : y = \frac{1}{2}(x - \ln 2) + \frac{1}{4}$ و منه $(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4}$

0.5 جـ - الانشاء



II) 1) أ - برهان أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة و تعين احداثياتها :

نحل المعادلة $f_m(x) = f_{m'}(x)$ مع $(m \neq m')$ أ

0.25 $e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m = e^{-2x} - (1+m')e^{-x} + m'$ أي $(m' - m)e^{-x} = m' - m$ اذن $e^{-x} = 1$

0.75 أي $x = 0$ و بما أن من أجل كل عدد حقيقي m : $f_m(0) = 0$ اذن جميع المنحنيات تمر من النقطة الثابتة

0.5 هي المبدأ $O(0,0)$ (كما يمكن استعمال طريقة الكثير الحدود المعدوم)

ب- المناقشة حسب قيم m وجود نقط تقاطع المنحنى (C_m) مع حامل محور الفواصل :

نحل المعادلة $f_m(x) = 0$ أي $e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m = 0$ بوضع $e^{-x} = t$ تصبح المعادلة :

$t^2-(1+m)t+m=0$

نحسب المميز Δ نجد : $\Delta=(1+m)^2-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$ أي $\sqrt{\Delta}=|m-1|$

لما $m\rangle 1$: $t=\frac{1+m-(m-1)}{2}=1$ أو $t=\frac{1+m+(m-1)}{2}=m$ وبالتالي $x=0$ أو $x=-\ln m$

لما $m\langle 1$: $t=\frac{1+m-(1-m)}{2}=m$ أو $t=\frac{1+m+(1-m)}{2}=1$

- لما $0\langle m\langle 1$ نجد : $x=-\ln m$ أو $x=0$
- لما $m\le 0$ نجد : $t_1\langle 0$ مرفوض ولما $t=1$ نجد $x=0$
- لما $m=1$ نجد : $t=1$ أي نجد $x=0$

إذن - لما $m=1$ أو $m\le 0$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة هي المبدأ $O(0,0)$

- لما $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما المبدأ $O(0,0)$ والنقطة $B(-\ln m,0)$

2) دراسة تغيرات الدالة f_m وتعين معادلة للمستقيمات المقاربة :

0.5

أ- النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m\right]=m$

0.25

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(1-(1+m)e^{x}+me^{2x}\right)=+\infty$

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=m$ فإن المنحنيات (C_m) تقبل نستقيما مفاربا معادلته $y=m$ بجوار $+\infty$

: : الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وعبارة دالتها المشتقة هي :

0.75

$f'_m(x)=-2e^{-2x}+(1+m)e^{-x}$ أي $f'_m(x)=e^{-2x}\left[(1+m)e^{x}-2\right]$

اشارة $f'_m(x)$ من اشارة $(1+m)e^{x}-2$ أي نناقش حسب قيم m اشارة $f'_m(x)$

أ) لما $m=-1$ أي $m+1=0$ تكون $f'_m(x)\langle 0$ وبالتالي الدالة f_{-1} متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

ب) لما $m\langle -1$ أي $m+1\langle 0$: تكون $f'_m(x)\langle 0$ وبالتالي الدالة f_m متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

2

جـ) لما $-1\langle m$ أي $0\langle m+1$ نقول $(1+m)e^{x}-2=0$ نجد $e^{x}=\frac{2}{m+1}$ ومنه $x=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ وفي هذه الحالة نقول الدالة f_m متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty,\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)\right]$ ومتزايدة تمامل على المجال $\left[\ln\left(\frac{2}{m+1}\right);+\infty\right[$

جـ) جدول التغيرات :

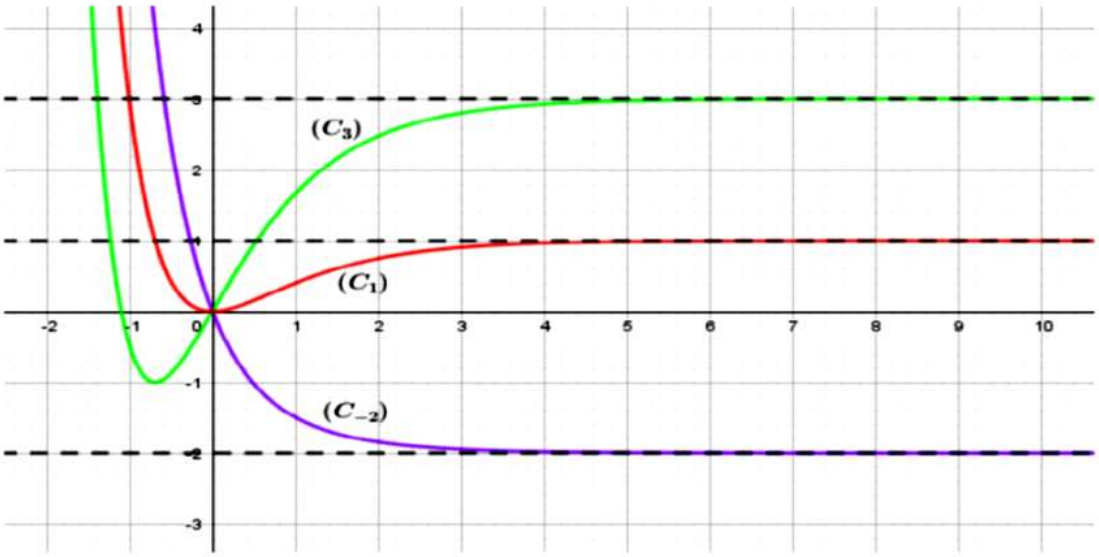
لما $m\le -1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m

لما $m\rangle -1$

0.5

x	$-\infty$		$ln(\frac{2}{1+m})$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(ln\frac{2}{1+m})$	$\nearrow$	m

0.5	0.5	3) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_2}) و (C_{m_1}) لتدرس اشارة الفرق : $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=e^{-2x}-(1+m_2)e^{-x}+m_2-e^{-2x}+(1+m_1)e^{-x}-m_1$ أي $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=-(m_2-m_1)e^{-x}+m_2-m_1$ وبالتالي $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=(m_2-m_1)(1-e^{-x})$ بما أن $m_2\rangle m_1$ أي $m_2-m_{11}\rangle 0$ فان اشارة الفرق تتبع اشارة $1-e^{-x}$ وبالتالي الوضعية تكون 1- لما $x\in]-\infty;0[$ المنحنى (C_{m_2}) يقع تحت المنحنى (C_{m_1}) 2- لما $x=0$ المنحنى (C_{m_2}) يقطع المنحنى (C_{m_1}) في النقطة $O(0,0)$ 3- لما $x\in]0;+\infty[$ المنحنى (C_{m_2}) يقع فوق المنحنى (C_{m_1})
0.5	0.25 0.25	4) الانشاء : يمكن الاعتماد على الدراسة السابقة في انشاء المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) 
0.5	0.25 0.25 0.25	5) كتابة كل x_m من و y_m بدلالة m للدالة f_m قيمة حدية محلية معناه $f_m(x)=0$ وحسب الأسئلة السابقة وجدنا أن لهذه المعادلة حلولا لما $m\rangle -1$ لدينا $f_m(x)=0$ أي أن $x_m=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ ومنه $y_m=f(x_m)=f\left(\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)\right)=e^{-2\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)}-(1+m)e^{-\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)}+m=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-\frac{(m+1)^2}{2}+m$ اذا $y_m=\frac{(m+1)^2-2(m+1)^2+4m}{4}=\frac{-(m+1)^2+4m}{4}=\frac{-m^2-2m+1+4m}{4}=\frac{-(m^2-2m+1)}{4}$ ومنه $y_m=\frac{-(m-1)^2}{4}$ إيجاد معادلة مستقلة m عن للمنحنى (p) لما يمسح m لمجال $]-1;+\infty[$ نعلم أن $x_m=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ فإن $e^{x_m}=\frac{2}{m+1}$ وبالتالي $m+1=\frac{2}{e^{x_m}}$ أي $m=2e^{-x_m}-1$ وبتعويض m في y_m نجد $y_m=\frac{-(2e^{x_m}-1-1)^2}{4}=\frac{-(2e^{x_m}-2)^2}{4}=\frac{-4(e^{x_m}-1)^2}{4}$

و بالتالي نحصل على معادلة للمنحنى (p) هي $y=-(e^x-1)$ لما يمسح m لمجال $]-1;+\infty[$		

عناصر الإجابة		النقطة
الموضوع الثاني		
التمرين الأول: (04 نقاط)		
نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: $7x-5y=11$ ..... (E)		
1) أ) الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $7x=5y+11$ ومنه $7x\equiv 1[5]$ ومنه $2x\equiv 1[5]$ ومنه $6x\equiv 3[5]$ إذن $x\equiv 3[5]$	0.5	1.5
ب) استنتاج حلول المعادلة (E): لدينا $x\equiv 3[5]$ معناها $x=5k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	0.5	
بالتعويض في (E) نجد: $y=7k+2$ إذن $k\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(5k+3;7k+2)$		
ج) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$		
من المعادلة (E) نستنتج أن $PGCD(x;y)$ يقسم 11 إذن $PGCD(x;y)=11$ معناه: $\begin{cases}x\equiv 0[11]\\ y\equiv 0[11]\end{cases}$	0.5	
ومنه $\begin{cases}7k+2\equiv 0[11]\\ 5k+3\equiv 0[11]\end{cases}$ ومنه $2k\equiv -10[11]$ ومنه: $k\equiv 6[11]$ معناه : $k=11k'+6$		
بالتعويض نجد: $k'\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(55k'+33;77k'+44)$.		
أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11		1.25

بواقي القسمة الاقليدية لـ: 7^n على 11

n	10k	10k+1	10k+2	10k+3	10k+4	10k+5	10k+6	10k+7	10k+8	10k+9
الباقي	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

بواقي القسمة الاقليدية لـ: 5^n على 11

n	5k	5k+1	5k+2	5k+3	5k+4
الباقي	1	5	3	4	9

0.5 0.5

ب) 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11 معناه: $5^n+7^{2023}\equiv 0[11]$ لدينا: $2023=202\times 10+3$ — 0.25

إذن: $5^n+2\equiv 0[11]$ ومنه : $5^n\equiv 9[11]$ إذن: $k\in\mathbb{N}$ $n=10k+8$

2) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر من 8، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}^{10}$	0.25	1.25
أ) التحقق : لدينا أن $10\equiv -1[11]$ ومنه $10^3\equiv(-1)^3[11]$ إذن: $10^3\equiv -1[11]$		

ب) العدد N باقي قسمته على 11 هو 4 معناه: $b \equiv a+5[11]$ إذن: $(a;b)=(1;6)$ أي $N=1016$ — 0.5

ج) العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11: $N=\overline{844}^{11}$ — 0.5

التمرين الثاني: (6 نقاط)

1) حساب احتمال الحدثين A و B

$$p(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$$ — 0.5

$$p(B)=\frac{C_2^1\times C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$ — 0.5

2)

- تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X: لدينا $X(\Omega)=\{1;2;3\}$. — 0.25

$p(X=1)=p(A)=\frac{11}{120}$ ،

$p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$ ،

$p(X=2)=\frac{79}{120}$ — 0.75

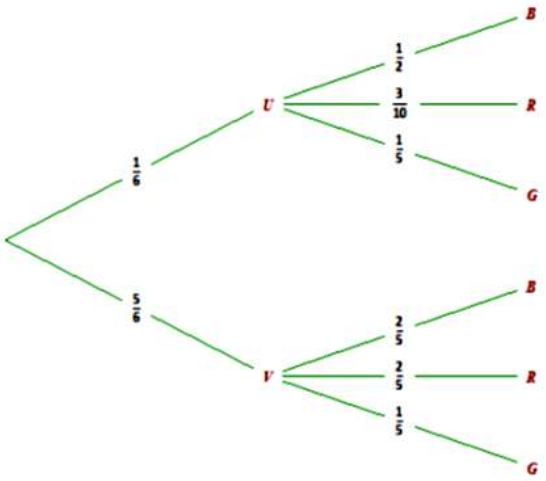
x	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

- حساب الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=\frac{11}{120}\times(1)+\frac{79}{120}\times(2)+\frac{30}{120}\times(3)=\frac{259}{120}\simeq 2,16$$ — 0.5

- حساب التباين:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i(x_i)^2-(E(X))^2=(\frac{11}{120}\times(1)^2+\frac{79}{120}\times(2)^2+\frac{30}{120}\times(3)^2)-(2,16)^2=4,97-4,66$$
$$\simeq 0,31$$ — 0.5



- تبيين أن $p(B)=\frac{5}{12}$: — 0.25

$$p(B)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

- حساب احتمال ان تكون الكرة المسحوبة من الكيس V علما انها بيضاء — 0.75

V هي الحدث سحب كرة من الكيس

$$P_B(V)=\frac{p(B\cap V)}{P(B)}=\frac{1/3}{5/12}=\frac{4}{5}$$

التمرين الثالث: (6 نقاط)

I. لدينا f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{2\alpha x}{2\sqrt{1+\alpha x^2}}=\frac{\alpha x}{\sqrt{1+\alpha x^2}}$ — 0.5

ولدينا من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $\alpha x\geq 0$ و $\sqrt{1+\alpha x^2}\succ 0$ ومنه $f'(x)$ موجبة على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ — 0.25

.II

.1

أ. لدينا: $u_0=0$ ومنه $0\le u_0\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ اذن الخاصية محققة من أجل $n=0$ — 0.25

- نفرض أن: $0\le u_n\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ونبين أن $0\le u_{n+1}\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

لدينا: $0\le u_n\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $f(0)\le f(u_n)\le f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ولدينا $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)=\sqrt{1+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ و $f(0)=1$ و $1\succ 0$

ومنه $0\le f(u_n)\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ وبالتالي $0\le u_{n+1}\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ — 0.75

اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

ب. لدينا(من أجل $n\neq 0$) : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+\alpha u_n^2}-u_n=u_n\left(\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\alpha}-1\right)$ — 0.25

ولدينا: $u_n\le \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\frac{1}{u_n^2}\ge 1-\alpha$ وبالتالي : $\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\alpha}-1\ge 0$ ولدينا $u_n\ge 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\ge 0$ اذن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، نستنتج أنها متقاربة — 0.5

لدينا مما سبق $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\lim u_n=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ — 0.25

التمرين الرابع: (6 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+2-\ln x$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجال فإن الدالة متزايدة تماما على المجال
- بما أن الدالة سالبة على المجال فإن الدالة متناقصة تماما على المجال
- ومنه جدول التغيرات:

2) الحساب: $g(1)=0$ انطلاقا من جدول التاغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

(c_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}\left(x+e+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=e$$

التفسير البياني: النقطة $\Omega\left(0;\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (c_f)

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

وبما أن النقطة $\Omega\left(0;\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (c_f) فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{\frac{2}{x}x-\ln(x^2)}{x^2}\right)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$

ت) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجالين فإن الدالة متزايدة تماما على المجالين
- ومنه جدول التغيرات:

3) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ (c_f) : لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{\ln(x^2)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{\ln(|x|)}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ (c_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ). $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}\right)=-\frac{\ln(x^2)}{x}$

4) أ) لإثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (c_f) يوازيان (Δ) يكفي حل المعادلة. $f'(x)=-\frac{1}{2}$

$\frac{x^2+2-\ln x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$ ومنه $\ln x^2=-2$ إذن $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

$(T):y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}e$ و $(T'):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}e$

ب) بين أن (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2<\alpha<2,1$ و $-0,5<\beta<-0,4$

أرسم كل من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق)

الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات

الشعبة :رياضيات المدة : أربع ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول(05ن)

1) أ) بيّـن أن 193عدد أولي .

ب) حلّـل 206 إلى جداء عوامل أولية .

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x وy حيث: $4x-193y=78$.

أ) جـد الثنائية الطبيعية$(a;b)$ التي تحقق : $\begin{cases} PPCM(a;b)=618 \\ PGCD(a;b)=3 \end{cases}$ و $4a-193b=78$

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

3) M وN عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب$\overline{\alpha 12\beta}$ و$\overline{5\beta 1\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس7 و$M\equiv N[193]$ حيث αو β رقمان طبيعيان كل منهما أصغر من 7.

أ) تحقّـق أن$44\alpha+48\beta\equiv 78[193]$.

ب) بيّـن أن$11\alpha+12\beta=116$.

جـ) عيّـنα وβ ثم أكتبM وN في النظام العشري.

التمرين الثاني (04ن)

يمتلك لاعب نردين A وB متماثلان من حيث الشكل إلا أن النردA مغشوش و فيه كل وجهين متقابلين منه يحملان نفس الرقم i حيث $i\in\{1;2;3\}$ (كل رقم من الأرقام الثلاثة مسجل على وجهين متقابلين)، أما النرد B ليس مغشوشا وفيه ثلاثة أوجه تحمل الرقم 1و ثلاثة أوجه تحمل الرقم2 . يرمي اللاعب أحد النردين و نرمز بـ P_iلاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i في الحالتين (رمي النرد Aأو رمي النردB)

1) يرمي اللاعب النرد A ، أحسبp_1 ، p_2، p_3علما أنها تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها$\frac{1}{4}$.

2) أحسبp_1 ، p_2. في حالة رمي النرد B

3) نرمي النردين في آن واحد ، و نعتبر المتغير العشوائي Xالذي يأخذ كقيم له مجموع رقمي الوجهين العلويين .

عـرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{U_n+1}}$ و $U_0 = 2$

1) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n+1} - \frac{2}{\sqrt{U_n+1}}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$

جـ) بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$

ب) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$

جـ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

د) استنتج نهاية (U_n).لمّـــــا $n \to \infty$

التمرين الرابع (07ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + lnx$

1) أدرس اتجاه تغير g على $]0;+\infty[$.

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} + 1 - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّـن أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = 0$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

3) أ) بيّـن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

4) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ت) شكّـــل جدول تغيرات الدالة f.

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة جد العدد الحقيقي: $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}}\, dx$

ب) أحسب مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = e^{-2}$ و x=1 .

III)) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$

1) بيّن انه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(e^x)$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4.5نقط)

a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 . نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$f(x)=\sqrt{1+a.x^2}$$

1.تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2. (u_n) متتالية معرفة $\mathbb{N}$ على بـ : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

I) نفرض أن : $0 \prec a \prec 1$

أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب) بين أن (u_n) متزايدة .

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .ثم عين نهايتها.

II)نضع $a \succ 1$:

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}^2-u_n^2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$.

ج)من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (S_n)كالآتي :

$S_0=0$ و من أجل كل $n \ge 1$ ، $S_n=1+a+a^2+a^3+.....+a^{n-1}$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$.

د) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\sqrt{S_n}$.ثم أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثاني:(4.5نقط)

1. a و b عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a=\overline{201}$ و $b=\overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2. x ، y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\ ;\ y)$التالية :

$$ax-by=3$$

أ)بين أنه إذاكانت الثنائية $(x\ ;\ y)$حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 0[3]$.

ب)إستنتج حلا خاصا $(x_0\ ;\ y_0)$حيث $0 \le x_0 \prec 5$.ثم حل المعادلة (E) .

3.نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\ ;\ y)$حل للمعادلة (E).

أ)ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) بين ان $p\gcd(x,y)=p\gcd(y,3)$.

ج)عين الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\frac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $u_0=2$ ، $v_0=5$

$u_{n+1}=u_n+19$ و $v_{n+1}=v_n+9$

–عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق ، $u_p=v_q$ و $|q-p|\leq 20$.

التمرين الثالث :(4نقط)

كيس فيه أربع كرات حمراء وكرتين سوداوين لا نفرق بينها عند اللمس.

العملية الأولى نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد .

نرمز بـ ، إلى الحوادث ، A_0 "لانحصل على أي كرة سوداء"

A_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط"

A_2 "الحصول على كرتين سوداوين"

أحسب كل من $p(A_0)$ ، $p(A_1)$ و $p(A_2)$.

2.بعد عملية السحب الأول ،يبقى في الكيس أربع كرات .نقوم بالسحب الثاني إذ نسحب كرتين في آن واحدأيضا.

نرمز إلى الحوادث : B_0 "لانحصل على أي كرة سوداءفي السحب الثاني"

B_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط في السحب الثاني "

B_2 "الحصول على كرتين سوداوين في السحب الثاني "

أ)أحسب كل من $p_{A_0}(B_0)$ ، $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$.ثم بين أن $p(B_0)=\frac{2}{5}$.

بـ)أحسب كل $p(B_1)$ و $p(B_2)$.

جـ)بإفتراض أننا على كرة سوداء في السحب الثاني.مإحتمال الحصول على كرة سوداءواحدة في السحب الأول؟

3. C نعتبر الحادثة "الحصول على كرتين سوداوين، بعد السحب الأول والإضرار إلى السحب الثاني " .

أحسب $p(C)$.

التمرين الرابع:(7نقط)

I) 1. لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x)=xe^x$

أدرس إتجاه تغير الدالة uثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x\geq -\frac{1}{e}$.

2. gدالة معرفة على $]-\infty;0]$ بـ : $g(x)=1-(x^2+x+1)e^x$

أ–باستعمال إتجاه تغير الدالة g بين أن من أجل كل x من $]-\infty;0]$ ، $g(x)\geq 0$.

(لايطلب حساب نهاية g عند $-\infty$)

II)لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{xe^x+1} & x\leq 0 \\ f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+1 & x\succ 0 \end{cases}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1.أ) أدرس إستمرارية f عند 0 ؟

بـ)أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 .فسر النتيجة بيانيا.

2. أ)أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب)بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0]$.

3 .أ)أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;0]$ ،ثم على المجال $]0;+\infty[$.

(يمكن ملاحظة أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]-\infty;0]$).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. I نقطة من المنحنى (C) فاصلتها -1 .

أ)بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة I هي : $y = \frac{e}{e-1}(x+1)$.

ب)أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) . (إستعن بالإجابة المنجزة في I 1).

5. أنشئ (T)، (Δ) و (C) .

6 . n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ و $x = 1$ و $x = n + 1$.

أ) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$ و المجموع $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n = A(n)$.

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة $A(n)$ بدلالة n .ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الإجابة النموذجية لموضوع بكالوريا تجريبي2022 في مادة الرياضيات / الشعبة : رياضيات

عناصر الإجابة(الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
التمرين الأول:(5 نقاط)		
1)أ) 193عددا أوليا لأن 193 لا يقبل القسمة على 2،3، 5 ، 7 ، 11 ، 13.$(\sqrt{193} \simeq 13.89)$	0.25	
ب) $206 = 2 \times 103$.	0.25	0.5
2)أ)		
$PGCD(a;b) = 3$ معناه $a = 3a'$ ، $b = 3b'$ و $PGCD(a';b') = 1$.	0.25	
$PPCM(a;b) = 618$: $618 \times 3 = 3a' \times 3b'$	0.25	
و منه $a' \times b' = 206$		
إذن $(a';b') \in \{(1;206),(206;1),(2;103),(103;2)\}$	0.5	
بالتالي $(a;b) \in \{(3;618),(618;3),(6;309),(309;6)\}$	0.5	
و $4 \times 309 - 193 \times 6 = 78$	0.25	
إذن $(a;) = (309;6)$		
ب)حل المعادلة ( ): $(x;y) = (193k + 309; 4k + 6)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$	0.5	2.25
1) $M = \overline{\alpha 12\beta} = 343\alpha + \beta + 63$	0.25	
$N = \overline{5\beta 1\alpha} = \alpha + 49\beta + 1722$	0.25	
أ) $N - M \equiv 0[193]$	0.25	
ب) $44\alpha + 48\beta = 193l + 78$ حيث $l \in \mathbb{Z}$		
$11\alpha + 12\beta = 193k + 309$ مع $0 \leq 11\alpha + 12\beta \leq 138$	0.25	
إذن $11\alpha + 12\beta = 116$.	0.25	
جـ) $\alpha = 4$ و $\beta = 6$		
$M = 1441$ و $N = 2020$	0.25*4	2.25
التمرين الثاني:(4 نقاط)		

1) p_1 ، p_2، p_3 تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$ مع و منه	0.25*2 0.25*3	1.25
2) $p_2 = \quad p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$		
3) قيم Xهي :$\{2; 3; 4; 5\}$ قانون الاحتمال لـ X	0.25*3 0.5	0.75

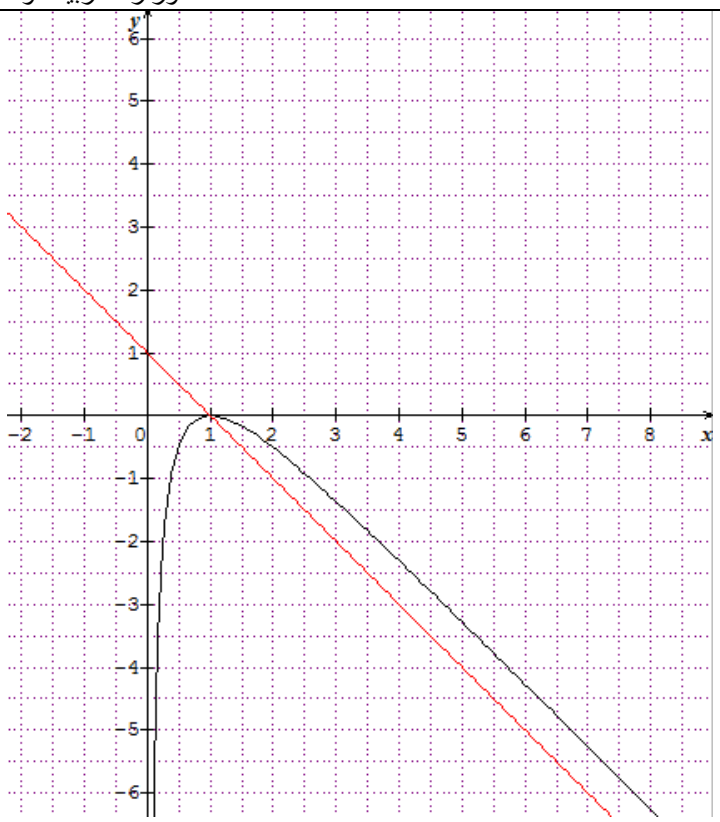
	2	3	4	5

	1	
	0.5	2

<u>التمرين الثالث:(4 نقاط)</u>

1) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n+1}}$،	0.25	
ب) $1 < U_0 < 3$	0.25	
نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$ نجد	0.5	
و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$		
جـ) $_{n+1} - U_n = \frac{U_n(2-\sqrt{u_n+1})}{\sqrt{U_n+1}}$ حيث من أجل كل عدد طبيعي n :	0.25	
$1 < U_n < 3$نجد أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما	0.5	
- المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 3 نستنتج أنها متقاربة .	0.25	2
2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$	0.75	
ب) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$	0.75	
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{3+U_{n+1}}(3 - U_n)$		

و $U_0 < U_1 < U_2 < \cdots < U_{n+1}$ إذن $2 < U_{n+1}$ فنجد أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$ جـ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$ د) من أجل كل عدد طبيعي n، $3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n < U_n < 3$ إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$	0.25 0.25	2
<u>التمرين الرابع:(7 نقاط)</u>		
I) نعتبر الدالة gالمعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + lnx$ 1) من أجلx من $]0;+\infty[$: $g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ و $g'(x) > 0$ إذن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$. 2) $g(1)=0$ وبما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن : $g(x) < 0$ على المجال $]0;1[$ و $g(x) > 0$ على المجال $]1;+\infty[$.	0.25*3 0.25*2	0.75 0.
II) نعتبر الدالة fالمعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} + 1 - x$ 1) بوضع $t = \sqrt{x}$ لما $x \to +\infty$: $t \to +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ln\,t^2}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2lnt}{t} = 0$ 2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ 3) أ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x + 1)] = 0$ إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f)بجوار$+\infty$. ب) (C_f) يقع أسفل (Δ) على المجال $]0;1[$و (C_f) يقع أعلى (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ 4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من$]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ جدول تغيرات الدالة f.	0.5 0.25*2 0.25 0.5 1 0.5 0.25+0.5	0.5 0.5 0.75 1.5 0.75

		
	0.75	
1		
	0.25	
0.25	0.25	
0.5	0.5	5) 6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}lnx\right]_{e^{-2}}^{1} - \int_{e^{-2}}^{1} \frac{2\sqrt{x}}{x} dx$ $\left[2\sqrt{x}lnx - 4\sqrt{x}\right]_{e^{-2}}^{1} = 8e^{-1} - 4$ ب) مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e^{-2}$: و x=1 هي $\int_{e^{-2}}^{1}[(-x+1) - f(x)]\, dx = \int_{e^{-2}}^{1} -\frac{lnx}{\sqrt{x}}\, dx = (-8e^{-1} + 4)u.a$ III)) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^{x} + 1$ 1) إثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(e^{x})$ 2) استنتاج جدول تغيرات الدالة h من أجل كل عدد حقيقي x: $h'(x) = e^{x} f'(e^{x})$. h متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$. $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022 **شعبة :الرياضيات**

الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول $f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}$ /1 ،من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)\geq 0$ 0.5..... . تقبل طرق أخرى $[0;+\infty[$ متزايدة تماما على		
$0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ ، n أ)برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $I)$ /2 **0.5.....** **ب) متزايدة .** **0.5 .....** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ 0.5..... **فهي متقاربة .نهايتها** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ **جـ)متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ** $a>1$ $II)$ **1.** (v_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول $v_0=1$ **.5..... ....** **2.** $v_n=v_0.a^n=a^n$ **ومنه** $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$ **.5.....** جـ) $S_n=1+a+a^2+a^3+.....+a^{n-1}$ ، $n\geq 1$ **و من أجل كل** $S_0=0$ **0.5** $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ ، $n\geq 1$ **و من أجل كل** $S_0=0$ $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ ، n **ومنه من أجل كل عدد طبيعي** $S_n=1+a+a^2+a^3+.....+a^{n-1}$ **د)** $S_n=u_1^2-u_0^2+u_2^2-u_1^2+u_3^2-u_2^2+.....+u_n^2-u_{n-1}^2$ $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ 01..... **و** $u_n=\sqrt{S_n}$ **وبالتالي** $u_n^2=S_n$ **ومنه**		04.5
التمرين الثاني: 1. $a=19$ **و** $b=9$ **0.5.....** 2. أ) $19x-9y=3$ **فإن** $x\equiv 0[3]$. **0.5.....** **ب) الحل الخاص** $(x_0;y_0)=(3;6)$ **0.25.....** **عدد صحيح.** **0.5.....** k **مع** $(x;y)=(9k+3;19k+6)$ **حلول المعادلة** 3. أ) $d\mid 3$ **ومنه** $d\in\{1,3\}$ **0.5.....** **ب) نضع** $p\gcd(x,y)=d$ **و** $p\gcd(y,3)=d'$ **0.75.....** **نجد** $d=d'$.	4.5	

		جـ) $\frac{y}{x}$ **كسر قابلا للإختزال يكافئ** $p\gcd(x,y)=3$ **0.5 .....** **عدد صحيح .** p **مع** $(x;y)=(27p+3;57p+6)$ .4 $u_p=2+19p$ **و** $v_q=5+9q$ **01. .....** $(p;q)=(9k+3;19k+6)$ **ومنه** $19p-9q=3$ **يكافئ** $u_p=v_q$ **ومنه** $(p;q)\in\{(3,6);(12,25)\}$
04		<u>التمرين الثالث:</u> /1 $p(A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$ ، $p(A_1)=\frac{8}{15}$ ، $p(A_2)=\frac{1}{15}$ 0.75.....
		(أ /2 $p_{A_0}(B_0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ ، $p_{A_1}(B_0)=\frac{1}{2}$ ، $p_{A_2}(B_0)=1$ 0.75 ..... ومنه $p(B_0)=\frac{2}{5}$ 0.5..... بـ) $p(B_1)=\frac{8}{15}$ و $p(B_2)=\frac{1}{15}$ 0.5+0.5..... جـ) $p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p(A_1)p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}$ نجد $p_{B_1}(A_1)=\frac{1}{2}$ 0.5 .....
		/3 $p(C)=p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)$ نجد $p(C)=\frac{1}{3}$ 0.5.....
العلامة		
مجموع	**مجزأة**	**عناصر الإجابة**
07		<u>التمرين الرابع:</u> I) الدالة متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ .... 0.25 $xe^x\geq-\frac{1}{e}$ ، x من أجل كل عدد حقيقي . 0.25..... .2 $g'(x)=-(x^2+3x+2)e^x$ 0.25..... $g(x)\geq0$ 0.25..... ، $]-\infty;0]$ من x ومنه من أجل كل

		$(II$ (أ/1 f عند مستمرة 0 0.5..... من اليسار 0 قابلة للإشتقاق عند f ب) معدوم $f_g^{'}(0)$ 0.25..... وعددها المشتق $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ 0.25..... من اليمين لأن 0 غير قابلة للإشتقاق عند f يقبل نصف مماس من اليمين يوازي حامل محور التراتيب ونصف مماس من البسار يوازي حامل محور الفواصل 0.25.....
		$(II$ (أ.2 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 2 .... x0.25 $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x)-(x+1)\right] = 0$ 0.25..... ب) $]-1;0]$ 0.5..... على (Δ) ويقع أعلى $]-\infty;-1[$ على (Δ) يقع أسفل (C) $A(-1,0)$ ويقطعه في النقطة
		$(II$ (أ.3 على $]-\infty;0]$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(xe^x+1)^2}$ ، f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ...0.25 على $]0;+\infty[$: $f'(x) = 1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ ، 0.25..... 0.5..... ب)جدول التغيرات
		$(II$ (أ.4 $(T): y = \frac{e}{e-1}(x+1)$ **0.25.....** **0.5.....** (T) **بالنسبة إلى المماس** (C) **ب) وضعية المنحنى**
		$(II$ .5 إنشاء (T) ، (Δ) و (C) **0.75.....**
		$S_n = \int_1^2 f(x) + \int_2^3 f(x) + ... + \int_n^{n+1} f(x)$ $(II$ (أ.6 $S_n = A(n)$ **0.25.....** **ب)** $A(n) = \left[4n + 2(n+1)^2\left[\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \ln(4e)\right] cm^2$ **5 .0.....** $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} A(n) = +\infty$ **0.25.....**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الجزائر شرق — مقترحات بكالوريا 2021

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: ماي 2021

الشعبة : رياضيات

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة: 04 سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $Z_p=10$ و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي Ω مركز الدائرة (Γ). نعتبر النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب $Z_A=5+5i$ ، $Z_B=1+3i$ و $Z_C=8-4i$.

1) بين أن النقط C,B,A تنتمي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).

2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $Z_D=2+2i$. بين ان النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC).

II. من اجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{20}{\bar{z}}$ علما أن $\bar{z}$ يرمز إلى مرافق z.

1) بين أن النقط O ، M و M' على استقامة واحدة.

2) ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x=2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z.

أ) تحقق أن: $z+\bar{z}=4$.

ب) عبر عن $z'+\overline{z'}$ بدلالة z و $\bar{z}$ ، ثم استنتج أن : $5(z'+\overline{z'})=z'\overline{z'}$.

ج) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M' في الشكل .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) تحقق أن $5^6\equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016}\equiv 1[7]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=1+5+5^2+\cdots+5^n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=5^{n+1}-1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

جـ) بين أن $4S_{2015}\equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم , نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(5\,,-4)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـــ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$.

1) بيّن أنّ : $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n و θ .

3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.

أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n|\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $1\,cm$).

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$

ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

جـ) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).

4) ارسم (d) , (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 2$ و $x = 0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2\times 2019^{6n+4}+2017^{4n+2}$ على 7 .

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (E)..... $343x-648y=76$.

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟ .

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d=76$.

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .

جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي: $P(z)=z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(3-2\sqrt{3}\right)z+6$.

أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z)=(z+2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$.

أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\overline{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}$.

3) أ) أكتب على الشكل الأسي العدد : $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.

ب) استنتج أن A صورة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

د) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$

1) أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ثم عين أساس المتتالية q.

2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$

4) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .

ب) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5.

ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+...+\ln 4^n\right]$

- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $f_n(x)=\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $1cm$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f_n'(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـــ : $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1) أكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ و $0\le x\le 1$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\le f_n(x)\le\frac{1}{(1+x)^n}$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]\le I_n\le\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) أ) إعتمادا على السؤال (II/1) بيّن أنّ : $I_n+nI_{n+1}=1-\frac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إستنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

ج) أحسب بـــ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الموسم الدراسي: 41-1442 هـ الموافق لـ 20-2021 م

الحل المفصل للبكالوريا التجريبي في مـادة الرياضيـات

للسنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

الموضـــــــــــــــــــــــــوع الأول

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) الأعداد المركبة	التنقيط
I) 1-) بما أن $\Omega A = \|5i\| = 5$ و $\Omega B = \|-4+3i\| = 5$ و $\Omega C = \|3-4i\| = 5$ اذن النقط A , B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات القطر $[OP]$.	0.75
* إنشاء الشكل : تمثيل النقط : Ω , A , B و C و الدائرة (Γ)	0.25
2-) لدينا من جهة $\overrightarrow{BC}\binom{7}{-7}$ و $\overrightarrow{DB}\binom{-1}{1}$ اذن $\overrightarrow{BC} = -7\overrightarrow{DB}$ و منه $D \in (BC)$ و من جهة ثانية : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BC} = 0$ أي $(OD) \perp (BC)$ نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)	0.75
II) 1- نفرض أن $M(x , y)$ نعلم أن $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)$ علما أن $Z' = \frac{20}{\bar{Z}}$ و بالتالي : $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = arg\left(\frac{20}{Z\bar{Z}}\right)$ حيث : $Z\bar{Z'} = x^2 + y^2$ أي $Z\bar{Z} \in \mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}} \in \mathbb{R}_*^+$ اذن $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : O , M , M ' على استقامة واحدة	0.25 0.75
2-)أ) بما أن $M \in (\Delta)$ فإن : $Z = 2 + iy$ ومنه $\bar{Z} = 2 - iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$	0.25
ب) لدينا : $Z' + \bar{Z'} = \frac{20}{\bar{Z}} + \frac{20}{Z} = \frac{20Z+20\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{20(Z+\bar{Z})}{Z\bar{Z}} = \frac{80}{Z\bar{Z}}$	0.5
*) حسب الجواب السابق : $5(Z' + \bar{Z'}) = 5\left(\frac{80}{Z\bar{Z}}\right) = \frac{400}{Z\times\bar{Z}} = \frac{20}{Z} \times \frac{20}{\bar{Z}}$ اذن $5(Z' + \bar{Z}) = Z' \times \bar{Z'}$	0.5
ج) من جهة حسب الجواب $II - 1)$ النقط O , M و M ' في استقامية و منه $M' \in (OM)$ من جهة ثانية : $\Omega M' = \|Z' - 5\|$ (علما أن $Z \times \bar{Z} = \|Z\|^2$. و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z' - 5)(\overline{Z' - 5})$ أي $\Omega M'^2 = Z'\bar{Z'} - 5(Z' + \bar{Z'}) + 25$ و بما أن $Z' + \bar{Z'} = 4$ و $Z' \times \bar{Z'} = 5(Z' + \bar{Z'})$ نحصل على : $\Omega M'^2 = 25$ أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$. و بالتالي M ' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .	01

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) الأعداد والحساب	التنقيط

-1

0.25

$5^6 = 15625$

$5^6 \equiv 1\ [7]$

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7

0.25

$5^0 \equiv 1[7] \quad ,5^1 \equiv 5[7] \quad ,5^2 \equiv 4[7]$

$5^3 \equiv 6[7] \quad ,5^4 \equiv 2[7] \quad ,5^5 \equiv 3[7]$

$5^6 \equiv 1[7]$

دورية و دورها $k = 6n$

0.25

$5^6 \equiv 1[7]$

$5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$

$2016 = 6 \times 336 = 6n$

-2 $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ ... + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1}$

لذلك نحسب

$S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \ ... 5^n$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$

0.25

$$S_n = 1\left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$$

و منه

$4S_n = 5^{n+1} - 1$

0.25

لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$

تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

0.25

يوجد (5, -4) بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

ومنه S_n 5^n , أوليان فيما بينهما

ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$

لدينا

$4S_n \equiv a\ [7]$

نضرب في 2

0.25

$8S_n \equiv 2a\ [7]$

$8 \equiv 1\ [7]$

ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$

العكس :

بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\ S_n \equiv a\ [7]$

لدينا

$S_n \equiv 2a\ [7]$

نضرب في العدد 4

$4S_n \equiv 8a\ [7]$

0.25

$8a \equiv a\ [7]$

$4\ S_n \equiv a\ [7]$

ي

	جـ) بين أن : $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$ باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه
0.25	$4\,S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$ $5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$ $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$ استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7
0.25	لدينا حسب ما سبق: $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$ فان $S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$ ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0
0.5	د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$ $5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$ $5^{n+1} \equiv 1\ [7]$ $5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$ $n+1 = 0,\quad n = -1,$ مرفوضة -1 وهو المطلوب $n+1 = 6,\quad n = 5$,
01	$S_n = \dfrac{5^{n+1} - 1}{4}$ 3- حلول المعادلة (E) هي : $(x, y) = (KS_n + 5\ , -K \times 5^n - 4)\ ,\quad K \in \mathbb{Z}$

التنقيط	الأعداد المركبة + المتتاليات	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)
01	$e^{i\theta} + 1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2})}[e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})}] = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})}$ -1	
0.75	2- نضع $z_n = ae^{ib}$ حيث a عدد حقيقي و $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ومنه $u_n = \arg(z_n) = b$ ومن جهة اخرى لدينا $u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n + \lvert z_n \rvert) = \arg(a(e^{ib}+1)) = \arg(2a\cos(\frac{b}{2})e^{i\frac{b}{2}}) = \frac{b}{2} = \frac{u_n}{2}$ وبالتالي u_n متتالية هندسية	
0.25	اساسها $\frac{1}{2}$ - $u_n = \theta \times (\frac{1}{2})^n$	
0.5	3- أ) $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}} = z_n + \lvert z_n \rvert - (\overline{z_n} + \lvert z_n \rvert) = z_n - \overline{z_n} = v_n$	

0.5 01	- نستنتج ان v_n متتالية ثابتة وان $v_n = v_0 = z_0 - \overline{z_0} = 2i\sin(\theta)$ ب) لدينا مما سبق $v_n = z_n - \overline{z_n} = 2i\sin(\theta)$ لكن $z_n = \lvert z_n \rvert e^{i\theta\times(\frac{1}{2})^n}$ وبالتالي $z_n - \overline{z_n} = \lvert z_n \rvert (2i\times\sin(\theta\times(\frac{1}{2})^n) = 2i\times\sin(\theta)$ اي $\lvert z_n \rvert (\sin(\frac{\theta}{2^n}) = \sin(\theta)$

حل التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x) = e^{x-2} - 1$ 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↗

0.25 0.25

2) اشارة : $g(x) \geq 0$ 0.25

II.

1) أ) النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0.25

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 0.25

ب)

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$ 0.25

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى (d) 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

2) حساب المشتقة : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25

3) أ) معناه نحل المعادلة : $f(x) = 0$ 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة. 0.5

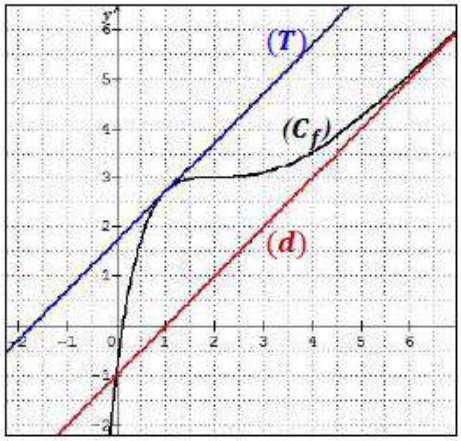
ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x) = 0$ 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d) هي: 0.5

$y = x - 1 + e$ 0.25

5) التمثيل البياني 0.25



0.5 0.25 0.25

5) المناقشة البيانية: $f(x) = x + m$

$m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا

$m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم

$-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما 0.5

$m = e - 1$ حلا واحدا موجبا

$m = e - 1$ ليس لها حلول

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع :

$U(x) = x$ و $V'(x) = e^{2-x}$ 0.5

$H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$

ب) حساب A:

$$A = \int_0^2 (f(x) - y)dx$$

$$A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}}dx = \int_0^2 xe^{2-x}\,dx$$ 0.5

$$A = [H(x)]_0^2$$

$$A = H(2) - H(0)$$

$$A = (e^2 - 3)\ cm^2$$

الموضـــــــــــــــــــــــــوع الثاني

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامـــــة مجزأة	العلامـــــة كاملة
التمرين الأول	1)أ) بواقي قسمة 3^n على 7 .		04 ن
	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} n= & 6k & 6k+1 & 6k+2 & 6k+3 & 6k+4 & 6k+5 \\ \hline 3^n\equiv & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{array}$	0.5 ن	
	ب) $2019\equiv 3[7]$ ومنه $2019^{6n+4}\equiv 4[7]$		
	$2017\equiv 1[7]$ ومنه $2017^{4n+2}\equiv 1[7]$		
	إذن $2\times 2019^{6n+4}+2017^{4n+2}\equiv 2[7]$.	0.5 ن	
	2) أ) $PGCD(343;648)=1$ و 1 يقسم 76 ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.	0.25 ن	
	ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).	0.75 ن	
	$(x;y)=(648k+4;343k+2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.		
	3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).		
	أ) d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $343x-648y$ أي d يقسم 76 ومنه $d\in\{1;2;4;19;38;76\}$.	0.5 ن	
	ب) $d=76$ معناه $\begin{cases}648k+4\equiv 0[76]\\343k+2\equiv 0[76]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}40k+4\equiv 0[76]\\39k+2\equiv 0[76]\end{cases}$		
	و منه $k\equiv 74[76]$ أي $k\equiv 76\alpha+74$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.	0.5 ن	
	ومنه $(x;y)=(49248\alpha+47956;26068\alpha+25384)$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.		
	4) $\begin{cases}\lambda=\beta\times 7^3+7^2+\alpha\times 7+\beta\\\lambda=\alpha\times 5^4+5^3+\alpha\times 5^2+\alpha\times 5+\beta\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda=344\beta+7\alpha+49\\\lambda=655\alpha+\beta+125\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$		
	أي $\begin{cases}343\beta-648\alpha=76\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$ ومنه $(\alpha;\beta)=(2;4)$.	0.75 ن 0.25 ن	
	كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 : $\lambda=1439=\overline{01355}^6$.		
التمرين الثاني	1) $P(z)=z^3+(2-\sqrt{3})z^2+(3-2\sqrt{3})z+6$.	0.25 ن	05 ن
	أ) $P(-2)=0$.	0.5 ن	

	$P(z)=(z+2)\left(z^2-\sqrt{3}z+3\right)$.	
	ب) $P(z)=0$ تكافئ $(z+2=0)$ أو $\left(z^2-\sqrt{3}z+3=0\right)$.	
	$z+2=0$ يكافئ $z=-2$.	
	$z^2-\sqrt{3}z+3=0$	
	$\Delta=-9=(3i)^2$ ، $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.	
	مجموعة الحلول: $S=\left\{-2;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$	0.5 ن
	2) $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$.	
	أ) كتابة كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي:	0.75 ن
	$z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2e^{\pi i}$.	
	الاستنتاج: لدينا $\lvert z_A\rvert=\lvert z_B\rvert=\lvert z_B\rvert=2$ أي $OA=OB=OC=2$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .	0.25 ن
	ب) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n\in\mathbb{R}$ معناه $e^{2in\frac{\pi}{3}}\in\mathbb{R}$ ومنه $2n\frac{\pi}{3}=k\pi$ و منه $2n=3k$ ونجد $n=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$.	0.5 ن
	ج) $\overline{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $z=ke^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $\left(\overline{u};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم $[OE)$ باستثناء النقطة O حيث $z_E=-1+i\sqrt{3}$.	0.5 ن
	3) أ) كتابة على الشكل الأسي العدد : $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$:	
	$L=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$	0.5 ن
	ب) لدينا $z_A-z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_C)$ ومنه A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	0.25 ن
	ج) طبيعة المثلث ABC : لدينا $\begin{cases}CB=CA\\(\overline{CB};\overline{CA})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ ومنه ABC متقايس الأضلاع .	0.5 ن
	د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ ومنه $z_D=z_C-z_B+z_A$ أي $z_D=-2+2i\sqrt{3}$.	0.5 ن

التمرين الثالث :	**04.5 نقطة**
لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$	
1) حساب u_2 ، u_1 و u_3 : لدينا : $u_1\times u_3=u_2^2$ لان u_2 هو الوسط الهندسي للحدين u_1 و u_3. ومنه : $u_2^2=256$ يكافئ $u_2=16$ أو $u_2=-16$ وبالتالي $u_2=16$ (لان حدود المتتالية موجبة)	
وبالتالي لدينا : $\begin{cases} u_1+32+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+u_3=68 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ إذن u_1 و u_3 هما حلي للمعادلة $x^2-68x+256=0$ حساب المميز $\Delta=(-68)^2-4\times256=3600$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{68-60}{2}=4$ و $x_1=\frac{68+60}{2}=64$ **بما أن المتتالية متزايدة فان $u_1=4$ و $u_3=64$**	3×0.25
حساب الأساس q : $q=\frac{16}{4}=4$	0.25
2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n : لدينا : $u_n=u_1\times q^{n-1}=4\times4^{n-1}=4^n$ أي $u_n=4^n$	0.25
3) حساب كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$ بدلالة n : لدينا : $S_n=u_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=4\times\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)=-\frac{4}{3}(1-4^n)=\frac{4}{3}\times4^n-\frac{4}{3}$	
$S_n=\frac{4}{3}\times4^n-\frac{4}{3}$	0.5
▪ **حساب الجداء :** $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n=4\times4^2\times...\times4^n=4^{1+2+...+n}$ أي $P_n=4^{\frac{n}{2}(1+n)}$	0.5
4) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n : لدينا : $7^0\equiv1[5]$ $7^1\equiv2[5]$ $7^2\equiv4[5]$ $7^3\equiv3[5]$ $7^4\equiv1[5]$ إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P=4$ من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :	2×0.5

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3

0.5	**ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5:** لدينا : $2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{1436}\equiv 1^{1436}[5]$ أي $2016^{1436}\equiv 1[5]$ و $49^{2n+1}\equiv (7^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $49^{2n+1}\equiv 7^{4n+2}[5]$ أي $49^{2n+1}\equiv 4[5]$ وكذلك لدينا : $5n-3\equiv -3[5]$ ومنه $5n-3\equiv 2[5]$ وبالتالي : $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv 1+4+2[5]$ أي $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv 2[5]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5 هو 2
0.5	**ج) حساب S_n' بدلالة n:** $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+\ldots+\ln 4^n\right]=\frac{1}{\ln 2}\ln\left(4\times 4^2\times\ldots\times 4^n\right)$ أي $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\times\ln P_n=\frac{1}{\ln 2}\times\ln 4^{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{1}{\ln 2}\times\ln(4)^{\frac{1}{2}\times(n^2+n)}$ ومنه : $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\times(n^2+n)\times\ln 2=n^2+n$ أي $S_n'=n^2+n$
0.25	▪ **تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$:** $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ يعني $n^2+n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ ومنه $n+5n^2+1\equiv 0[5]$ أي $n\equiv -1[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$ وبالتالي $n\equiv 5\alpha+4\ ,\ (\alpha\in\mathbb{N})$

التنقيط	الدوال	تصحيح التمرين الرابع 07 نقاط)
2x0.25		I- 1-ا) حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0,\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f_n(x)=+\infty$
0.5		ب) حساب المشتقة $f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n-e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$
0.5		لدينا المقدار $1+x+n>0$ لان $x>-1$ ومنه المشتقة سالبة تماما
0.5		ج) x: -1 … $+\infty$ $f'_n(x)$: $-$ $f_n(x)$: ↘
0.5		2- بما ان جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة نضع $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ وبالتالي $\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)}=\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2}\Leftrightarrow(1+x_0)(x_0)=0$ لكن $x\neq -1$ ومنه $x_0=0$ والنقطة هي $A(0,1)$

-3

01 ا) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (c_1) و (c_2) :

$$f_1(x)-f_2(x)=$$

$$\frac{e^{-x}}{(1+x)}=\frac{e^{-x}}{(1+x)^2}\Leftrightarrow e^{-x}[\frac{x}{(1+x)^2}]$$

ومنه من اجل $x<0$ (c_2) فوق (c_1)

ومن اجل $x=0$ (c_2) و (c_1) منطبقان

ومن اجل $x>0$ (c_1)فوق (c_2)

ب)

0.5

II-

-1

لدينا مما سبق

0.5

$$f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n-e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f'_n(x)=-\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}-\frac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}}=-(f_n(x)+n\times f_{n+1}(x))$$

$$f'_n(x)=-(f_n(x)+n\times f_{n+1}(x))$$

-2

0.25 ا) **لدينا** $I_{n+1}-I_n=\int_0^1[f_{n+1}(x)-f_n(x)]dx<0$ لان $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ من اجل $x>0$

0.25 **وبالتالي تكامل دالة سالبة هو عدد سالب ومنه** I_n متناقصة

ب) إستنتاج ان I_n متقاربة

-3

0.25 ا) $0\le x\le 1\Leftrightarrow e^{-1}\le e^x\le 1\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\le f_n(x)\le\frac{1}{(1+x)^n}$

	ب) مما سبق
0.25	$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(1+x)^n}dx \le \int_0^1 f_n(x)dx \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n}dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{1-n}[(1+x)^{1-n}]_0^1 \le I_n \le \frac{1}{1-n}[(1+x)^{1-n}]_0^1$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n-1}[1-\frac{1}{2^{n-1}}] \le I_n \le \frac{1}{n-1}[1-\frac{1}{2^{n-1}}]$
0.5	**ج) بإستعمال الحصر نجد النهاية** $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
	-4 ا)
0.5	$f'_n(x) = -(f_n(x) + n\times f_{n+1}(x)) \Leftrightarrow \int_0^1 f'_n(x).dx = -\int_0^1 [f_n(x) + nf_{n+1}(x)]dx$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{2^n} - 1 = -(I_n + n.I_{n+1}) \Leftrightarrow I_n + n.I_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$
0.25	ب) $\lim_{n\to+\infty} n.I_n = 1$
0.25	ج) حساب مساحة الحيز

صفحة إكاديمية الرياضيات

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطـــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضيـــر
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2020 / 2021
دورة جوان 2021

امتحان البكـــالوريـــا التجريـــــــبـــي
الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات — المـــــدة : 04 ساعات و نصف

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر v_1 و q عددان طبيعيان ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1.

I) عين v_1 و q علما أن v_1 و q أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.

II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

1) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441.

2) نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.

– أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

3) نعتبر α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) حلل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α,β) بحيث يكون: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$.

ج) نسجل قيم الحدود السته الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

– ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + ... + 1) \equiv 3[7]$.

3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7.

4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 .....(E)$.

أ) عين $PGCD\left(C_{10}^2 ; A_{12}^2\right)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x,y).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E).

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لـــ d حيث: $d = PGCD(x,y)$.

ب) عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر النقطتين M و M' التين لاحقتاهما z و z' على الترتيب . نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .

نذكر أن $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طويلة العدد المركب z .

1) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Re}\left(z'\overline{z}\right)=0$.

2) بين أن النقط O ، M و M' في استقامية إذا وفقط إذا كان $IM\left(z'\overline{z}\right)=0$.

3) لتكن N النقطة ذات اللاحقة z^2-1 . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين .

4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.

أ) بين أن $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها النقط O ، N و P في استقامية .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=x^2-\ln\left(x^2\right)$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y=x$، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـــ (Δ).

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}3<\alpha<0{,}4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

4) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f).

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h). (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $F(x)=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}(\ln x^2)^2+2\ln|x|\right]$ هي دالة أصلية لـــ f على $\mathbb{R}^*$.

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$. أحسب التكامل: $I=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.

2) أحسب احتمال سحب كريتان من نفس اللون .

3) أحسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان .

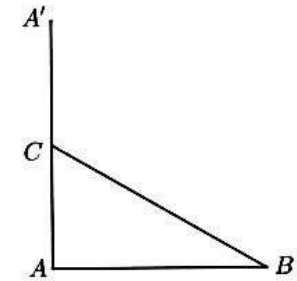
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I . ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C. ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B.

1) عين نسبة وزاوية التشابه S.

2) أنشئ D صورة A بواسطة S.

3) ليكن Ω مركز التشابه المباشر S.

أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان.

ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان.

جـ) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω.

II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث لاحقة B هي 1.

1) عين لاحقة كل من C و A' .

2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω.

3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

التمرن الثالث: (05 نقاط)

متتاليتا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) أ) احسب $\text{pgcd}(x_2; x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8; x_9)$

ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n.

3) أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n - y_n = 5$.

ب) أكتب y_n بدلالة n.

ج) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

4) نضع $d_n = \text{pgcd}(x_n; y_n)$.

أ) ما هي القيم الممكنة لـــــــ d_n.

ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــــــ: $g(x) = e^x(x-1) + 1$

1) أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

2) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II. لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t \, dt$

1) أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x) = e^x - (1+x)$

2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0; x]$ أن: $1 \leq e^t \leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$.

3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x; 0]$ أن: $e^x \leq e^t \leq 1$، ثم استنتج أن: $\frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

III. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــــ : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.

3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f.

4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أرسم (T) و (C_f).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطـــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامـــــة مجزأة	العلامـــــة كاملة
التمرين الأول	I) تعيين العددين v_1 و q: لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_2 = v_1.q$ و $v_4 = v_1.q^3$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1.q^3 - v_1.q$ أي: $2v_1^2 = v_1.q(q^2-1)$ ومنه: $\boxed{2v_1 = q(q^2-1)}$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2 (حسب مبرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1,2\}$. - في حالة $q=1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض). - في حالة $q=2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$. إذن نتحصل على: $\boxed{q=2}$ و $\boxed{v_1 = 3}$.	0.75 ن	04.5 ن
	II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$. 1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n): نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $\boxed{v_n = 3\times 2^{n-1}}$.	0.25 ن	
	*) تعيين كل الحدود المحصورة بين 2020 و 1441: لدينا: $1441 \le 3\times 2^{n-1} \le 2020$ أي: $481 \le 2^{n-1} \le 673$ أي نجد: $\ln 481 \le \ln 2^{n-1} \le \ln 673$ أي: $\ln 481 \le (n-1)\ln 2 \le \ln 673$ و منه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \le n-1 \le \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8,9 \le n-1 \le 9,39$ ومنه: $9,9 \le n \le 10,39$ ، إذن: $\boxed{n=10}$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو: $\boxed{v_{10} = 1536}$	0.75 ن	
	2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$. المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا. أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9\times\frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $\boxed{S_n = 3(4^n-1)}$. *) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3(4^n-1)\right] = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.	01 ن	

*) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$: $\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. — 0.25 ن

3) لدينا: α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$. — 0.25 ن

أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على: $\boxed{2304 = 2^8 \times 3^2}$. — 0.25 ن

ب) تعيين كل الثنائيات (α,β):

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3\times 2^{\alpha-1})(3\times 2^{\beta-1}) = 2^8\times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ ومنه:

$$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2}\times 3^2 = 2^8\times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$$

أي: $\begin{cases} \alpha+\beta = 10 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha' + 2\beta' = 10$ أي نجد:

$\boxed{\alpha' + \beta' = 5}$.

لكن لدينا: $\alpha < \beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha' < \beta'$.

أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha',\beta') = (1,4)$ و $(\alpha',\beta') = (2,3)$.

إذن الثنائيات (α,β) المطلوبة هي: $\boxed{(\alpha,\beta) = (2,8)}$ و $\boxed{(\alpha,\beta) = (4,6)}$. — 0.5 ن

4) الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3 ، 6 ، 12 ، 24 ، 48 ، 96 .

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3 .

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0 . — 0.5 ن

التمرين الثاني — 04 ن

1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

نجد: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي:

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

— 0.5 ن

ب) نعلم أن: $1440 \equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$. — 0.25 ن

*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6 : $2019 \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} \equiv 3^{2020}[6]$

لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{3^n \equiv 3[6]}$ و منه: $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي:

$2019^{2020} = 6k+3$.

إذن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3}[7]$ أي: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6 . — 0.25 ن

2) لدينا: $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)\equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه:

$4\left(1\times\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}\equiv 4[7]$

ومنه يكون: $n-1=6k+2$ إذن: $\boxed{n=6k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. **0.5 ن**

3) أ) لنبين أن: $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6$.

*) لنحسب $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2$:

$$2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2\times\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\times 2!}+\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$

$$=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

و منه: $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=(n+1)n+(n+3)(n+2)=n^2+n+n^2+2n+3n+6$

إذن: $\boxed{2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6}$ هو المطلوب. **0.5 ن**

ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2\equiv 0[7]$.

لدينا: $2n^2+6n+6\equiv 0[7]$ أي: $2\left(n^2+3n+3\right)\equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$n^2+3n+3\equiv 0[7]$ أي: $n^2+3n\equiv -3[7]$ و منه: $n^2+3n\equiv 4[7]$.

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7):

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n\equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^2+3n\equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

وبالتالي يكون: $n\equiv 1[7]$ أو $n\equiv 3[7]$ أي: $\boxed{n=7k+1}$ أو $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. **0.75 ن**

4) لدينا: $C_{10}^2x-A_{12}^2y=15$ .....(E).

أ) لنعين $PGCD\left(C_{10}^2;A_{12}^2\right)$:

نعلم أن: $C_{10}^2=\frac{10!}{8!\times 2!}=45$ و $A_{12}^2=\frac{12!}{10!}=132$ ومنه $PGCD\left(C_{10}^2;A_{12}^2\right)=3$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x-132y=15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ لأن: $PGCD(45,132)=3$ و 3 يقسم 15. **0.25 ن**

ب) لدينا: $45x-132y=15$ أي تصبح: $15x-44y=5$ أي: $44y=15x-5$ أي:

$44y=5(3x-1)$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غــوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y=5k$ أي: $\boxed{y\equiv 0[5]}$ هو المطلوب.

*) لنحل المعادلة (E): **0.25 ن**

نبحث أولا عن الحل الخاص أي: $y=5$ و منه: $44\times 5=5(3x-1)$ أي: $44=3x-1$ إذن:

		$x=15$. ومنه: $(x_0,y_0)=(5,15)$.	
		لدينا: $\begin{cases}15x-44y=5\\15(15)-44(5)=5\end{cases}$ بالطرح نجد: $15(x-15)=44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44	
		وحسب مبرهنة غوص نستنتج أن: $\begin{cases}x-15=44k\\y-5=15k\end{cases}$ إذن: $\boxed{x=44k+15}$ و $\boxed{y=15k+5}$.	
		ومنه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\in\square)$.	
	0.25 ن	5) أ) لدينا الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E) أي يكون: $15x-44y=5$ و بما أن:	
	0.25 ن	$PGCD(x,y)=d$ فإن: d يقسم $(15x-44y)$ و d يقسم 5 ، إذن قيم d هي: 1 ، 5 .	
		ب) لندرس حالة $d=5$ أي: $x\equiv 0[5]$ أي: $44k+15\equiv 0[5]$ أي: $4k\equiv 0[5]$ و منه: $k\equiv 0[5]$	
		أي يكون: $\boxed{k=5\alpha}$ مع $(\alpha\in\square)$.	
	0.25 ن	إذن: $d=5$ لما $k=5\alpha$ و بالتالي يكون: $d=1$ لما $k\neq 5\alpha$	التمرين الثالث
04 ن		و منه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\neq 5\alpha)$.	
		1) لدينا : $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ متعامدين معناه $xx'+yy'=0$.	
	0.75 ن	$z'\overline{z}=(x'+iy').(x-iy)=(xx'+yy')+i(xy'-yx')$.	
		ومنه : $xx'+yy'=0$ تكافئ $\mathrm{Re}(z'\overline{z})=0$.	
	0.75 ن	2) النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ مرتبطان خطيا أي $xy'+yx'=0$ وهذا يكافئ $IM(z'\overline{z})=0$.	
		3) لدينا : $(z^2-1)\overline{z}=\lvert z\rvert z-\overline{z}=(x^2+y^2)(x+iy)-(x-iy)$	
		$=x(x^2+y^2-1)+iy(x^2+y^2+1)$	
	01ن	$\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين يكافئ $\mathrm{Re}((z^2-1)\overline{z})=0$ أي $x(x^2+y^2-1)$ ومنه $x=0$ أو $x^2+y^2=1$.	
		مجموعة النقط M هي اتحاد محور التراتيب مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1	
	0.75 ن	4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.	
		أ) $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{-z^2}\right)\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-\overline{z}^2\left\lvert\frac{1}{z^2}-1\right\rvert^2$.	
		ب) O ، N و P في استقامية تكافئ $IM\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right)=0$ أي	
	0.75 ن	$IM\left(-\overline{z}^2\left\lvert\frac{1}{z^2}-1\right\rvert^2\right)=0$. أي $IM\left(-\overline{z}^2\right)=0$ ومنه $2xy=0$ أي $x=0$ أو $y=0$.	التمرين الرابع
07.5 ن		ومجموعة النقط M هي اتحاد محور الفواصل مع محور التراتيب باستثناء المبدأ O .	

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $g(x)=x^2-\ln(x^2)$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

*) الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$.

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x.(2x^2-2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون:

0.5 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$2x^2-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

0.25 ن

0.75 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

*) النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\underset{>}{\to}}0} g(x)=+\infty$.

0.25 ن

2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.

1) أ) حساب النهايات:

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{2}{x^2}+1+\frac{\ln(x^2)}{x^2}\right)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2}=0$

فبوضع: $x^2=t$

هذه الأخيرة تصبح: $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0}$.

0.5 ن

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانيا:

*) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$ و

0.5 ن

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=-\infty$.

0.25 ن

*) التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x=0$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي:

0.25 ن

$f'(x)=\frac{-2}{x^2}+1+\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}=\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}$ ، إذن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و هو المطلوب.

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f: نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f

0.25 ن

متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 ن

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f):

أي نحسب: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln(x^2)}{x}\right]=0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f). 0.25 ن

*) دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]=\frac{2+\ln(x^2)}{x}$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
x		$-$		$-$	‖	$+$	0	$+$	
$2+ln(x2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)	

0.25 ن

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f(x)+f(-x)=0$.

لدينا: $f(x)+f(-x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}-x-\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

إذن و بما أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر. 0.25 ن

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3<\alpha<0,4$. و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0,4$ و $-0,3$ أي يكون: $-0,4<\beta<-0,3$. 0.25 ن

4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x)=1$ ،

لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة.

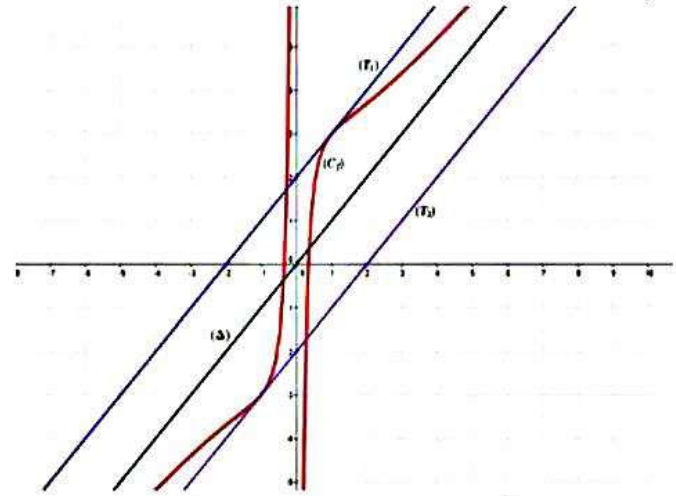
لدينا: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}=1$ أي: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}-1=0$ أي تصبح: $\frac{-\ln(x^2)}{x}=0$ أي:

$$\begin{cases}-\ln(x^2)=0\\ x^2\neq 0\end{cases}$$

هذا يكافئ: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيان للمستقيم (Δ). 0.25 ن

*) كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0=1$: $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T_1): y=x+2$. 0.25 ن

*) كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0=-1$: $(T_2): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه: 0.25 ن

		$(T_2): y = x-2$.	
		ب) الإنشاء: 	0.75 ن
		5) لدينا: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$ أي يكون: $h(x)=f(x+1)+2$.	
		إذن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.	0.25 ن
		6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$:	
		لدينا: $F'(x)=x+\frac{2}{4}\times\frac{2}{x}\times\ln x^2+\frac{2}{\lvert x\rvert}=x+\frac{\ln(x^2)}{x}+\frac{2}{\lvert x\rvert}$.	
		*) إذا كان $x>0$ فإن: $F'(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x<0$ فإن:	0.25 ن
		$F'(x)=\frac{-2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.	
		ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي:	0.25 ن
		$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\left[\ln(x)^2\right]^2+2\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2}$.	
		ج) حساب التكامل $I=\int_1^{\lambda} f(x)dx$ مع $\lambda>1$:	0.25 ن
		لدينا: $I=\int_1^{\lambda} f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^{\lambda}=F(\lambda)-F(1)$ و منه: $I=F(\lambda)$ لأن: $F(1)=0$.	0.25 ن
		*) التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=1$ و $x=\lambda$.	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطـــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

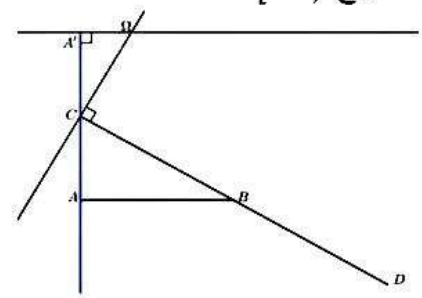
الموضوع الثاني

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامـــــة مجزأة	العلامـــــة كاملة
التمرين الأول	1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^2=90$.	0.5 ن	04 ن
	2)لتكن A حادثة سحب كريتان من نفس اللون: $P(A)=\frac{A_4^2+A_6^2}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$.	0.75 ن	
	3) لتكن B حادثة سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان : $P(B)=\frac{A_4^2}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.	0.75 ن	
	4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة . أ) قيم X الممكنة : $X(\omega)=\{0;1;2\}$.	0.75 ن	
	قانون احتمال X : $P(X=0)=\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$. $P(X=1)=\frac{A_4^1\times A_6^1\times C_2^1}{A_{10}^2}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$. $P(X=2)=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.	0.75 ن	

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

	ب) الأمل الرياضياتي: $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{12}{15}=0,8$.	0.5 ن	
التمرين الثاني	1) لدينا $\begin{cases}S(A')=C\\S(C)=B\end{cases}$ يعني $\begin{cases}CB=k\,A'C\\(\overline{A'C};\overline{CB})=\theta+2k\pi\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k=\frac{CB}{A'C}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\\\theta=(\overline{CA'};\overline{CB})+\pi=-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}\end{cases}$.	01.5 ن	04 ن
	2) بما أن C مصف $[AA']$ فإن B منتصف $[CD]$.	0.25 ن	
	أ) $C\Omega^2+CB^2=C\Omega^2+\left(\overline{C\Omega}+\overline{\Omega B}\right)^2$ $=2C\Omega^2+\Omega B^2-4\times\Omega C\times\Omega C\times\frac{1}{2}=\Omega B^2$ و منه $(C\Omega)$ يعامد (CB)	0.25 ن	
	ب) $A'\Omega^2+A'C^2=A'\Omega^2+\left(\overline{A'\Omega}+\overline{\Omega C}\right)^2$ $=2A'\Omega^2+\Omega C^2-4\times\Omega A'\times\Omega A'\times\frac{1}{2}=\Omega C^2$ و منه $(A'\Omega)$ يعامد $(A'C)$	0.25 ن	
	ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد (BC) في C مع المستقيم الذي يعامد $(A'C)$ في A'.		
	II. 1) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CA}{AB}$ إذن $CA=AB\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.25 ن	
	و منه $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $A'\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	0.5 ن	
	2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+b$ و بما أن $S(A')=C$ فإن $\frac{i\sqrt{3}}{3}=\left(1+i\sqrt{3}\right)\frac{2i\sqrt{3}}{3}+b$ إذن $b=\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ و منه $z_\Omega=\frac{6-i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}}=\frac{1}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0.75 ن	
	3) $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ يعني $\arg(z-z_{A'})=-\frac{\pi}{2}$ يعني $(\vec{u},\overline{A'M})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم	0.25 ن	

المفتوح $[A'A)$



التمرين الثالث — **05 ن**

1) $x_0 = 3 = 2^1 + 1$

لنفرض أن $x_n = 2^{n+1} + 1$ $n \geq 0$ إذن

$x^{n+1} = 2x_n - 1 = 2\left(2^{n+1}+1\right) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$ — **01 ن**

و منه من أجل كل طبيعي n $x_n = 2^{n+1} + 1$ — **0.25 ن**

2) أ) $p\gcd(x_2; x_3) = p\gcd(7;17) = 1$ — **0.25 ن**

$\text{pgcd}(x_8; x_9) = \text{pgcd}(513;1025) = 1$ — **0.25 ن**

ب) $2x_n - x_{n+1} = 2^{n+2} + 2 - 2^{n+2} - 1 = 1$ و منه حسب بيزو فإن x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما — **01 ن**

3) أ) $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$ لنفرض أن $2x_n - y_n = 5$ — **0.25 ن**

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - 2y_n - 3 = 2(2x_n - y_n) - 5 = 2\times 5 - 5 = 5$

و منه من أجل كل طبيعي n $2x_n - y_n = 5$

ب) $y_n = 2x_n - 5$ يعني $y_n = 2^{n+2} - 3$

ج) لدينا $2 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^4 \equiv 1[5]$ و منه من أجل كل p من $\square$ $2^{4p} \equiv 1[5]$ ، $2^{4p+1} \equiv 2[5]$ ، $2^{4p+2} \equiv 4[5]$ ، $2^{4p+3} \equiv 3[5]$ — **01 ن** — **0.25 ن**

4) أ) بما أن $2x_n - y_n = 5$ فإن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ 0.5

ب) $d_n = 5$ يكافئ $\begin{cases} x_n \equiv 0[5] \\ y_n \equiv 0[5] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0[5] \end{cases}$ — **0.5 ن**

يعني $\begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3[5] \end{cases}$ يعني $n = 4p+1$ 0.5 — **0.25 ن**

أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان y_n و x_n و أخيرا يكون

$n = 4p+3$ أو $n = 4p+2$ أو $n = 4p$

التمرين الرابع	I . 1) من أجل كل x من $\square$ $g'(x)=xe^x$	0.25 ن	07 ن
	g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.	0.25 ن	
	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline xe^x & & - & 0 & + & \end{array}$	0.25 ن	
	2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0)=0$ نستنتج أن g موجبة على $\square$		
	II . 1) حساب $I(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$		
	نضع $\left.\begin{array}{l} u(t)=x-t \\ v'(t)=e^t\,dt \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} u'(t)=-dt \\ v(t)=e^t \end{array}\right\}$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد	01 ن	
	$I(x)=\left[(x-t)e^t\right]_0^x+\int_0^x e^t\,dt=\left[(x-t)e^t+e^t\right]_0^x=e^x-x-1=e^x-(x+1)$		
	2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0;x]$ معناه $0\le t\le x$ أي		
	$1\le e^t\le e^x$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^t(x-t)\le e^x(x-t)$ واخيرا		
	بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_0^x (x-t)\,dt\le\int_0^x e^t(x-t)\,dt\le\int_0^x e^x(x-t)\,dt$		
	يعني $\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le I(x)\le\left[e^x\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^x$ يعني $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^x}{2}$.	0.5 ن	
	3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x;0]$ معناه $x\le t\le 0$ أي		
	$e^x\le e^t\le 1$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^t(x-t)\le e^x(x-t)$		
	لأن $(x-t)$ **سالب** واخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى		
	$\int_x^0 (x-t)\,dt\le\int_x^0 e^t(x-t)\,dt\le\int_x^0 e^x(x-t)\,dt$ لأن x **حقيقي سالب** يعني		
	$\left[\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0\le -I(x)\le\left[e^x\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0$	0.5 ن	
	يعني $-\frac{x^2}{2}\le -I(x)\le -\frac{x^2e^x}{2}$ و منه $\frac{x^2e^x}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$.		
	4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^x}{2}$ أي		
	$\frac{x^2}{2}\le e^x-(1+x)\le\frac{x^2e^x}{2}$ و منه		
	من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2}\le\frac{e^x-(1+x)}{x^2}\le\frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$ فإن		
	$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}...(1)$		
	من أجل كل x سالب $\frac{x^2e^x}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$ أي $\frac{x^2e^x}{2}\le e^x-(1+x)\le\frac{x^2}{2}$ و منه		
	من أجل كل x سالب		

تماما $\frac{1}{2} \le \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} ...(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ **0.5 ن**

III . 1) حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$ **0.25 ن**

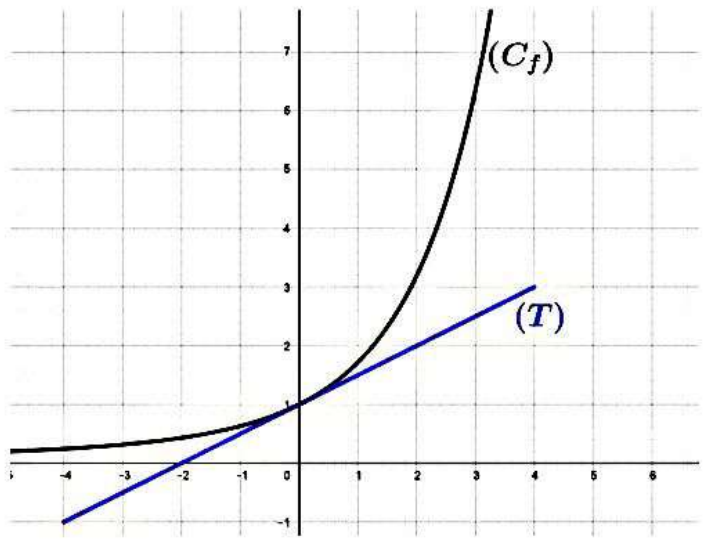
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\left(1-e^{-x}\right) = +\infty$$ **0.25 ن**

2) من السؤال II. 4نجد $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ **0.75 ن**

و منه f قابلة للاشتقاق 0 عند و $f'(0) = \frac{1}{2}$.

من أجل كل x من $\square^*$ فإن $f'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f' > 0$ على $\square$. إذن f متزايدة تماما على $\square$. **01 ن**

$$(T): y = \frac{1}{2}x+1$$ **0.5 ن**



01 ن

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الموقع الالكتروني للامتحانات والمسابقات — تحضير امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: رياضيات — دورة: 2020

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

نعتبر صندوقا به ثلاث كريات سوداء وكرية واحدة بيضاء لا نفرق بينها باللمس، ونعتبر قريصة متجانسة تماما من وجهين، وجه أسود والآخر أبيض. نقوم بالتجربة التالية:

نرمي القريصة، فإذا سقطت على الوجه الأبيض نضيف كرية بيضاء إلى الصندوق، وإذا سقطت على الوجه الأسود نضيف كرية سوداء إلى الصندوق، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.

1) لتكن الأحداث E_0، E_1 و B التالية:

E_0 : «لا تظهر كرية بيضاء من بين الكريات الثلاث المسحوبة»

E_1 : «تظهر كرية بيضاء واحدة فقط من بين الكريات الثلاث المسحوبة»

B : «تسقط القريصة على الوجه الأبيض»

أ- أحسب $P(E_0 \cap B)$ و $P(E_0 \cap \overline{B})$ ثم استنتج $P(E_0)$.

ب- ما هو احتمال أن تسقط القريصة على الوجه الأسود علما أنه لا تظهر كرية بيضاء من بين الكريات الثلاث المسحوبة؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء من بين الكريات الثلاث المسحوبة.

أ- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

3) نعيد التجربة السابقة أربع مرات متتالية وبنفس القواعد السابقة في كل مرة.

أحسب احتمال الحصول مرة واحدة على الأقل على كرية بيضاء واحدة فقط.

التمرين الثاني: (04,5 نقاط)

1) n عدد صحيح.

- بين أن العددين $14n+3$ و $5n+1$ أوليان فيما بينهما.

2) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية: $(E) \ldots 87x+31y=2$.

أ- تحقق دون حساب القاسم المشترك الأكبر، أن العددين 87 و 31 أوليان فيما بينهما.

ب- عين الثنائية $(u\,;v)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث: $87u+31v=1$، ثم استنتج حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (E).

جـ- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E).

3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $87x-31y-2=0$.

- عين جميع النقط M من (Δ) والتي فواصلها محصورة بين 0 و 100.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث: $z_A=1+i$ و $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

ولتكن $(\mathcal{C})$ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

1) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

2) لتكن M نقطة من $(\mathcal{C})$ لاحقتها $z=e^{i\alpha}$ حيث $\alpha\in[0\,;2\pi]$.

وليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من $(\mathcal{C})$ العبارة $f(M)$ حيث: $f(M)=MA\times MB$.

أ- بين من أجل كل عدد حقيقي α أن: $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

ب- بين أن: $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

جـ- استنتج أن: $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3) بين وجود نقطة وحيدة M من الدائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين إحداثييها بحيث يكون $f(M)$ أعظميا محددا قيمتها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) & ;\ x\neq 0\\ 1 & ;\ x=0\end{cases}$$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- بين أن الدالة f مستمرة عند 0.

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

2) أ- أحسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65<\alpha<0{,}7$.

4) أ- أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

جـ- أدرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T).

5) أنشئ (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

6) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_n - \alpha| \leq \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على كرتين بيضاء و $(n-2)$ كرية حمراء متماثلة و غير قابلة للتمييز حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 4$.

نسحب عشوائيا كرية من الصندوق بدون إرجاع لنسجل لونها و نكرر نفس التجربة مرات متتالية (أي يبقى السحب المتتالي بدون إرجاع) إلى أن نحصل لأول مرة على كرية بيضاء فنوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة .

1) أ – حدد قيم المتغير العشوائي X .

ب – أحسب $P(X=K)$ حيث $K=\{1;2;3\}$.

2) أ – بين أن $P(X=K)=\dfrac{2(n-K)}{n(n-1)}$ مهما يكن K من مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب – برهن أنه من أجل $m \in \mathbb{N}$ فإن $\sum_{i=0}^{i=m} i^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

ج – استنتج أن $E(X)=\dfrac{n+1}{3}$.

3) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق عند الحصول على أول كرية بيضاء .

– أحسب $E(Y)$ و أوجد علاقة بين $E(Y)$ و $E(X)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الهدف من هذا التمرين برهان أنه يوجد عدد طبيعي n حيث الكتابة العشرية لمكعب هذا العدد تنتهي بـ 2009 أي أن :

$n^3 \equiv 2009[10000]$.

الجزء الأول :.

1) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 .

2) استنتج أن : $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

الجزء الثاني :.

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية بـ : $U_0=2009^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$U_{n+1}=(U_n+1)^5-1$.

1) أ– بين أن U_0 يقبل القسمة على 5 .

ب– بين باستعمال دستور ثنائي الحد أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$U_{n+1}=U_n\left[U_n^{\,4}+5(U_n^{\,3}+2U_n^{\,2}+2U_n+1)\right]$$

ج – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن الحد U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} .

2) أ– تحقق أن $U_3=2009^{250}-1$ ثم استنتج أن $2009^{250} \equiv 1[625]$.

ب– برهن أن $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.

الجزء الثالث :.

1) باستعمال مبرهنة غوص و النتائج المحصلة عليها في الأسئلة السابقة بين أن : $2009^{8001}-2009 \equiv 0[10000]$.

2) استنتج عددا طبيعيا حيث الكتابة العشرية لمكعبه تنتهي بـ 2009 .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ليكن n عددا طبيعيا و نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة العبارة التالية ذات المتغير الحقيقي θ حيث :

$$E = 1 + C_n^1\cos(\theta) + C_n^2\cos(2\theta) + C_n^3\cos(3\theta) + ... + C_n^{n-1}\cos((n-1)\theta) + \cos(n\theta)$$

أ – بين أن : $E = \mathrm{Re}\left[\left(1+e^{i\theta}\right)^n\right]$.

ب – بين أن : $1+e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ (علما أن $e^{i\theta}\times e^{i(-\theta)} = 1$) .

ج – استنتج أن : $E = 2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})$.

2) ليكن Z عددا مركبا . أوجد Z بحيث تكون النقط ذات اللواحق التالية : Z ، iZ و i على استقامة واحدة.

3) نريد حل جملة المعادلات الثلاثة التالية في $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \\ |Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1 \\ Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 1 \end{cases}$$

أ – بين أنه يمكن أن نضع $Z_1 = e^{i\theta_1}$ ، $Z_2 = e^{i\theta_2}$ و $Z_3 = e^{i\theta_3}$ حيث θ_1 ، θ_2 و θ_3 هي عمدات الأعداد المركبة الثلاثة على الترتيب Z_1 ، Z_2 و Z_3 .

ب – بين أن : $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$.

ج – بين أن θ_1 و θ_2 تحقق جملة المعادلتين التالية :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

د – استنتج أن : $\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 = 0$.

هـ – بين أن الأعداد المركبة Z_1، Z_2 و Z_3 هي 1 ، i و $-i$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

.الجزء الأول : نعتبر الدالتين f_0 و f_1 المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_0(x) = \frac{1}{e^x+1}$ و $f_1(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ و ليكن (C_0) و (C_1) تمثيلاهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $2\,\text{cm}$) .

1) أدرس تغيرات كلا من الدالتين f_0 و f_1 .

2) أ) بين أنه من أجل $x, -x \in \mathbb{R}$ فإن $f_0(-x) = f_1(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أن القيمة $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ثابتة من أجل $x \in \mathbb{R}$ يطلب تعيينها و فسر النتيجة بيانيا .

ج) ماذا تستنتج من السؤالين السابقين بخصوص (C_0) و (C_1) ؟

3) أنشئ المنحنيين (C_0) و (C_1) .

.الجزء الثاني : α عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.

نعتبر الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_\alpha(x)=\frac{\alpha e^x+1-\alpha}{1+e^x}$ و (C_α) تمثيلها البياني .

1) أدرس حسب قيم الوسيط α تغيرات الدالة f_α .

2) أ) بين أن كل المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة Ω يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) بين أن النقطة Ω هي مركز تناظر و نقطة انعطاف للمنحنى (C_α) .

3) β عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.

أ) بين أنه إذا كان $f_\alpha(-x)=f_\beta(x)$ فإن $\alpha+\beta=1$ و فسر النتيجة هندسيا .

ب) أثبت أنه إذا كان $\alpha+\beta=1$ فإن المنحنيين (C_α) و (C_β) متناظران بالنسبة إلى مستقيم آخر مواز لمحور الفواصل يطلب تعيينه .

ج) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x و $\alpha+\beta=1$ فإن $f_\alpha(x)=\frac{1-2\alpha}{1-2\beta}f_\beta(x)+\frac{\alpha-\beta}{1-2\beta}$ و فسر النتيجة بيانيا مبينا العلاقة بين المنحنيين .

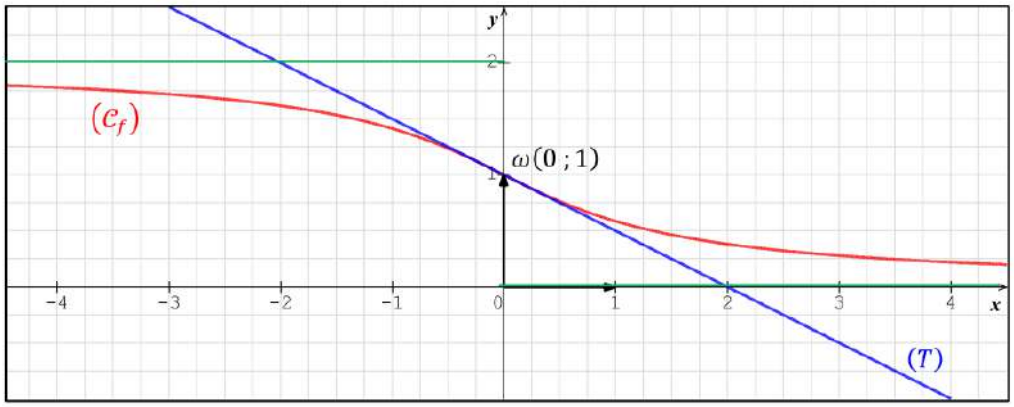
انتهـــــــى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: (04,5 نقاط)		
1) أ- حساب $P(E_0 \cap B)$ و $P(E_0 \cap \overline{B})$ ثم استنتج $P(E_0)$:		
$P(E_0 \cap B) = P(B) \times P_B(E_0) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{20}$	0,50	2,0
$P(E_0 \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(E_0) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{1}{5}$	0,50	
$P(E_0) = P(E_0 \cap B) + P(E_0 \cap \overline{B}) = \frac{1}{4}$	0,50	
1) ب- حساب $P_{E_0}(\overline{B})$:		
$P_{E_0}(\overline{B}) = \frac{P(E_0 \cap \overline{B})}{P(E_0)} = \frac{4}{5}$	0,50	
2) أ- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:		
$P(X=0) = P(E_0) = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$	0,25	1,75
$P(X=1) = P(E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^3} + \frac{1}{2} \times \frac{C_1^1 \times C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$	0,50	
$P(X=2) = P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{20}$	0,50	
2) ب- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:		
$E(X) = \frac{9}{10}$	0,50	
3) حساب احتمال الحصول مرة على الأقل على كرية بيضاء واحدة فقط:		
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{E_1})^4 = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{609}{625}$	0,75	0,75

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الثاني: (04,5 نقاط)		
1) نبين أن العددين $14n+3$ و $5n+1$ أوليان فيما بينهما:		
مبرهنة بيزو: $(14n+3)(5)+(5n+1)(-14)=1$	0,50	0,75
ومنه: $PGCD(14n+3\,;5n+1)=1$	0,25	
ملاحظة: يمكن الاستعانة بسلسلة القسمات المتتالية لخوارزمية إقليدس.		
2) أ- التحقق دون حساب القاسم المشترك الأكبر، أن العددين 87 و 31 أوليان فيما بينهما:		
من السؤال **1)** نكتب: $(14\times 6+3)(5)+(5\times 6+1)(-14)=1$		
أي: $87(5)+31(-14)=1$ ومنه: $PGCD(87\,;31)=1$ (حسب مبرهنة بيزو)	0,50	2,0
2) ب- تعيين الثنائية $(u\,;v)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث $87u+31v=1$:		
لدينا من **2)** أ- : $87(5)+31(-14)=1$ ومنه: $(u\,;v)=(5\,;-14)$	0,25	
استنتاج حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (E): $(x_0\,;y_0)=(10\,,-28)$	0,25	
2) جـ- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E):		
حسب مبرهنة غوص: $(x\,;y)=(-31k+10\,;87k-28)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	2×0,50	
3) تعيين جميع النقط M من (Δ) والتي فواصلها محصورة بين 0 و 100:		
لدينا: $(\Delta)\,:\,87x+31(-y)-2=0$ معناه: الثنائية $(x\,;-y)$ حل للمعادلة (E)		
ومنه: $(x\,;-y)=(-31k+10\,;-87k+28)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	0,25	1,75
ولدينا: $0\le x\le 100$ أي: $k\in\{-2\,;-1\,;0\}$	3×0,25	
ومنه: النقط هي $(72\,;202)$، $(41\,;115)$ و $(10\,;28)$	3×0,25	

التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي: $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	2×0,50	1,0
2) أ- تبيان من أجل كل عدد حقيقي α أن: $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}\sin\alpha$	0,50	1,5
2) ب- تبيان أن: $f(M)=\left\lvert e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right\rvert$	0,50	
2) جـ- استنتاج أن: $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$	0,50	
3) تبيان وجود نقطة وحيدة M من الدائرة $(\mathcal{C})$ بحيث يكون $f(M)$ أعظميا:		1,5
$f(M)$ أعظمي يعني: $\sin\alpha=-1$ نجد: $M(0\,;-1)$ و $f(M)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.	3×0,50	

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) أ- تبيان أن الدالة f مستمرة عند 0: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$، ومنه: f مستمرة عند 0. **1)** ب- دراسة قابلية اشتقاق f عند 0: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2} = f'(0)$ ومنه: f قابلة للاشتقاق عند 0.	0,25 0,25	0,5
2) أ- حساب الدالة المشتقة: f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$ **2)** ب- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\lvert f'(x)\rvert \le \frac{1}{2}$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2 \ge 0$ ومنه: $\sqrt{1+x^2} \ge 1$ و $1+\sqrt{1+x^2} \ge 2$. أي: $\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) \ge 2$ أي: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} \le \frac{1}{2}$. أي: $\left\lvert\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\right\rvert \le \frac{1}{2}$ ومنه: $\lvert f'(x)\rvert \le \frac{1}{2}$. **2)** جـ- جدول تغيرات الدالة f: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$ ومنه: f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. x: $-\infty$ ... $+\infty$ $f'(x)$: $-$ $f(x)$: $2 \searrow 0$	0,5 0,5 2×0,25 0,50	2,0
3) تبيان أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65 < \alpha < 0{,}7$: نضع: $h(x) = f(x) - x$، دالتها المشتقة $h'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) - 1$. لدينا من **2)** ب- : $\lvert f'(x)\rvert \le \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{1}{2} \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \le f'(x) - 1 \le -\frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \le h'(x) \le -\frac{1}{2}$ ومنه: $h'(x) < 0$، (h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$) مبرهنة القيم المتوسطة: الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0{,}65\,;0{,}7[$ و $h(0{,}65)\times h(0{,}7) = 0{,}053\times(-0{,}015) < 0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ $(f(x) = x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65 < \alpha < 0{,}7$ مع: $f(\alpha) = \alpha$.	0,25 0,25	0,5

1,75	0,25 0,5 0,25 3×0,25	**4)** أ- حساب $f(-x)+f(x)$: من أجل x من $\mathbb{R}$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}$: $f(-x)+f(x)=2$. التفسير الهندسي: النقطة $\omega(0\,;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f. **4)** ب- معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 0: $(T): y=-\frac{1}{2}x+1$ **4)** جـ- دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T): $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{x^3}{2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2}$ الوضعية: • $x<0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (أسفل) (T). • $x=0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقطع (يخترق) (T) في النقطة $\omega(0\,;1)$. • $x>0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (أعلى) (T).
0,75	0,75	**5)** إنشاء (T) و $(\mathcal{C}_f)$: 
1,0	0,5 0,5	**6)** أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\lvert u_{n+1}-\alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x: $\lvert f'(x)\rvert \le \frac{1}{2}$. وعليه: $\lvert f(u_n)-f(\alpha)\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$ $\lvert u_{n+1}-\alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$; $f(\alpha)=\alpha$ **6)** ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\lvert u_n-\alpha\rvert \le \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $\lvert u_1-\alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_0-\alpha\rvert$ $\lvert u_2-\alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_1-\alpha\rvert$ ... $\lvert u_n-\alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_{n-1}-\alpha\rvert$ $\lvert u_n-\alpha\rvert \le \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$

6) جـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها: متتالية متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ (باستعمال النهايات بالمقارنة).	2×0,25	0,5

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة المجزأة	العلامة المجموع
التمرين الأول : (4 نقاط)		
1) أ) تحديد قيم المتغير العشوائي X : $X=\{1;2;3;....;n-2;n-1\}$	0.5	01
ب) حساب $P(X=K)$ بحيث $K=\{1;2;3\}$: $P(X=1)=\frac{A_2^1}{A_n^1}=\frac{2}{n}$ $P(X=2)=\frac{A_{n-2}^1A_2^1}{A_n^2}=\frac{(n-2)2}{n(n-1)}$ $P(X=3)=\frac{A_{n-2}^2A_2^1}{A_n^3}=\frac{2(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2(n-3)}{n(n-1)}$	0.5	
2) أ) تبيين أن $P(X=K)=\frac{2(n-K)}{n(n-1)}$ مهما يكن K من مجموعة قيم المتغير العشوائي X : K هو ترتيب الكرية البيضاء في السحب أي أنه مهما يكن K من مجموعة قيم المتغير العشوائي X فإننا نكون قد سحبنا $K-1$ كرية حمراء قبل الكرية البيضاء الأولى في السحب المتتالي بدون إرجاع أي أننا نكون قد سحبنا من الصندوق K كرية .	0.5	
$P(X=K)=\frac{A_{n-2}^{K-1}A_2^1}{A_n^K}$ $P(X=K)=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-K-1)!}\times\frac{2!}{1!}}{\frac{n!}{(n-K)!}}=\frac{2(n-2)!(n-K)!}{n!(n-K-1)!}=\frac{2(n-2)!(n-K)(n-K-1)!}{n(n-1)(n-2)!(n-K-1)!}$ $P(X=K)=\frac{2(n-K)}{n(n-1)}$	0.5	
ب) البرهان أنه من أجل $m\in\mathbb{N}$ فإن $\sum_{i=0}^{i=m}i^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$: $P(\mathrm{i}=m)$:(البرهان بالتراجع) .نتحقق من صحة المساواة من أجل $i=0$: $0^2=0$ $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6}=0$		

إعداد و كتابة : غريب عصام

		و منه المساواة محققة من أجل $i=0$.
		.نفرض صحة $P(\mathrm{i}=m)$ ثم نبرهن صحة $P(\mathrm{i}=m+1)$:
		لدينا : $\sum_{i=0}^{i=m+1} i^2=\sum_{i=0}^{i=m} i^2+(m+1)^2$
	0.5	$\sum_{i=0}^{i=m+1} i^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2=(m+1)(\frac{m(2m+1)+6(m+1)}{6})=(m+1)(\frac{2m^2+7m+6}{6})$
		و لدينا : $\frac{(m+1)(\mathrm{m}+2)(2m+3)}{6}=\frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$
		بمساواة الطرفين السابقين نجد أن $\sum_{i=0}^{i=m+1} i^2=\frac{(m+1)(\mathrm{m}+2)(2m+3)}{6}$
		و منه $P(\mathrm{i}=m+1)$ صحيحة .
1.75		حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل $m\in\mathbb{N}$ فإن $\sum_{i=0}^{i=m} i^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.
		ج) استنتاج أن $E(X)=\frac{n+1}{3}$:
		لدينا : $E(X)=\sum_{K=1}^{K=n-1} K\times P(X=K)$
	0.25	$E(X)=\sum_{K=1}^{K=n-1} K\frac{2(n-K)}{n(n-1)}=\sum_{K=1}^{K=n-1}\frac{2(nK-K^2)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\left[n\sum_{K=1}^{K=n-1}K-\sum_{K=1}^{K=n-1}K^2\right]$
		حسب السؤال السابق $E(X)=\frac{2}{n(n-1)}\left[n\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=n-\frac{2n-1}{3}=\frac{3n-2n+1}{3}$
		و منه $E(X)=\frac{n+1}{3}$
	0.25	3) حساب $E(\mathrm{Y})$ للمتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق عند الحصول على أول كرية بيضاء : – قيم المتغير العشوائي Y : $Y=\{0;1;2;....;n-2\}$ – إيجاد عبارة $P(Y=m)$ بحيث m يأخذ قيمه من مجموعة قيم المتغير العشوائي :

إعداد و كتابة : غزيل عصام

1.25	0.25	$P(Y=0)=\frac{A_{n-2}^{n-2}A_2^1}{A_n^{n-1}}=\frac{\frac{(n-2)!}{0!}2}{\frac{n!}{(n-n+1)!}}=\frac{(n-2)!2}{n!}=\frac{2(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!}=\frac{2}{n(n-1)}=P(X=n-1)$ $P(Y=1)=\frac{A_{n-2}^{n-3}A_2^1}{A_n^{n-2}}=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-n+3)!}2}{\frac{n!}{(n-n+2)!}}=\frac{2\frac{(n-2)!}{1!}}{\frac{n!}{(n-n+2)!}}=\frac{4}{n(n-1)}=P(X=n-2)$ $P(Y=2)=\frac{A_{n-2}^{n-4}A_2^1}{A_n^{n-3}}=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-n+4)!}2}{\frac{n!}{(n-n+3)!}}=\frac{2\frac{(n-2)!}{2!}}{\frac{n!}{(3)!}}=\frac{6}{n(n-1)}=P(X=n-3)$ $P(Y=3)=\frac{A_{n-2}^{n-5}A_2^1}{A_n^{n-4}}=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-n+5)!}2}{\frac{n!}{(n-n+4)!}}=\frac{2\frac{(n-2)!}{3!}}{\frac{n!}{(4)!}}=\frac{8}{n(n-1)}=P(X=n-4)$ . . . $P(Y=n-3)=\frac{A_{n-2}^{1}A_2^1}{A_n^{2}}=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-1)!}2}{\frac{n!}{(n-2)!}}=\frac{2\frac{(n-2)!}{(n-3)!}}{n(n-1)}=\frac{2(n-2)}{n(n-1)}=P(X=2)$ $P(Y=n-2)=\frac{A_{n-2}^{0}A_2^1}{A_n^{1}}=\frac{2}{\frac{n!}{(n-1)!}}=\frac{2}{\frac{n!}{n(n-1)!}}=\frac{2}{n}=P(X=1)$
	0.25	و منه نجد : $P(Y=m)=P(X=n-1-m)=\frac{2(m+1)}{n(n-1)}\quad;\quad m\in\{0;1;2;3;...;n-2\}$
	0.25	-حساب $E(Y)$: $E(Y)=\sum_{m=0}^{m=n-2} m\times P(Y=m)$ $E(Y)=\sum_{m=1}^{m=n-2} m\frac{2(m+1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\left[\sum_{m=0}^{m=n-2}m^2+\sum_{m=0}^{m=n-2}m\right]=\frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]$ $E(Y)=\frac{(n-2)(2n-3)}{3n}+\frac{n-2}{n}=\frac{2n^2-4n-3n+6+3n-6}{3n}=\frac{2n^2-4n}{3n}=\frac{2}{3}n-\frac{4}{3}$
	0.25	- إيجاد علاقة بين $E(Y)$ و $E(X)$: لدينا $E(Y)=\frac{2}{3}n-\frac{4}{3}$ و $E(X)=\frac{n+1}{3}\Rightarrow n=3E(X)-1$ وبالتالي : $E(Y)=\frac{2}{3}\left(3E(X)-1\right)-\frac{4}{3}=E(X)-\frac{2}{3}$

إعداد و كتابة : غريب عصام

		التمرين الثاني : (4 نقاط)
		.الجزء الأول :
0.5	0.25	1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 : لدينا $2009 \equiv 9[16]$ ومنه $2009^2 \equiv 81[16]$ و $81 \equiv 1[16]$ إذن $2009^2 \equiv 1[16]$ أي أن باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1 .
	0.25	2) استنتاج أن $2009^{8001} \equiv 2009[16]$: لدينا $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009$ و $2009^{8000} = (2009^2)^{4000}$ وبما أن $2009^{8000} \equiv (2009^2)^{4000} \equiv 1^{4000} \equiv 1[16]$ فإن $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.
		.الجزء الثاني :
2.25	0.25	1) أ- تبيين U_0 يقبل القسمة على 5 : لدينا $2009 \equiv 4[5]$ ومنه $2009^2 \equiv 16 \equiv 1[5]$ وبالتالي $2009^2 - 1 \equiv 0[5]$ أي أن U_0 يقبل القسمة على 5 .
	0.5	ب) تبيين باستعمال دستور ثنائي الحد أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_{n+1} = U_n\left[U_n{}^4 + 5(U_n{}^3 + 2U_n{}^2 + 2U_n + 1)\right]$ لدينا باستعمال دستور ثنائي الحد : $U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1 = \sum_{K=0}^{K=5} C_5^K (U_n)^{5-K} (1)^K - 1 = \sum_{K=0}^{K=5} C_5^K (U_n)^{5-K} - 1$ $U_{n+1} = U_n^5 + 5U_n^4 + 10U_n^3 + 10U_n^2 + 5U_n + 1 - 1 = U_n(U_n^4 + 5U_n^3 + 10U_n^2 + 10U_n + 5)$ $U_{n+1} = U_n\left[U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)\right]$
	0.25 0.25 0.25	ج) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن الحد U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} : ($P(K=n): U_n = 5^{n+1}m; m \in \mathbb{N}$) *لدينا من السؤال (أ) U_0 يقبل القسمة على 5 أي أن $P(K=0)$ محققة . *نفرض صحة الخاصية $P(K=n)$ و نبرهن صحتها من أجل $K = n+1$: لدينا $U_n = 5^{n+1}m; m \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = 5^{n+1}m\left[5^{4n+4}m^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)\right] = 5^{n+1}m\left[5(5^{4n+3}m^4 + (U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1))\right] = 5^{n+2}m'$ حيث $m' = m\left[(5^{4n+3}m^4 + (U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1))\right] \in \mathbb{N}$ و منه الخاصية محققة من أجل $K = n+1$ ، حسب البرهان بالتراجع فإن الحد U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n .

إعداد و كتابة : غريب عصام

	0.5	2) أ- التحقق أن $U_3 = 2009^{250} - 1$ و استنتاج أن $2009^{250} \equiv 1[625]$: *لدينا $U_0 = 2009^2 - 1$ ومنه $U_0 + 1 = 2009^2$ وبالتالي $U_1 + 1 = (U_0+1)^5 = 2009^{10}$ ، $U_2 + 1 = (U_1+1)^5 = 2009^{50}$ و $U_3 + 1 = (U_2+1)^5 = 2009^{250}$ إذن $U_3 = 2009^{250} - 1$. *لدينا U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} ومنه U_3 يقبل القسمة على $5^{3+1} = 5^4 = 625$ و من هذا نستنتج أن $U_3 \equiv 2009^{250} - 1 \equiv 0[625]$ و بالتالي $2009^{250} \equiv 1[625]$.
	0.25	ب- البرهان أن $2009^{8001} \equiv 2009[625]$: لدينا $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009 = (2009^{250})^{32} \times 2009$ وبما أن $2009^{250} \equiv 1[625]$ فإن $2009^{8000} \equiv 1[625]$ وبالتالي $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.
.الجزء الثالث :		
1.25	0.25 0.25 0.25	1) باستعمال مبرهنة غوص و النتائج المحصلة عليها في الأسئلة السابقة نبين أن $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$: لدينا سابقا $2009^{8001} \equiv 2009[16]$ و $2009^{8001} \equiv 2009[625]$ أي أن العدد $E = 2009^{8001} - 2009$ مضاعف لكل من العددين 16 و 625 وحسب خاصية الأعداد الأولية (**إذا كان عدد مضاعف لعددين أوليين في آن واحد فهو مضاعف لجدائهما**) و بما أن العددان 16 و 625 أوليان فيما بينهما لأن حسب نظرية بيزو $(*)...1 = 16 \times (-39) + 625 \times (1)$ يوجد عددين صحيحين U و V يحققان العلاقة (*) و منه العدد E يقبل القسمة على جدائهما $16 \times 625 = 10000$ أي أن $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$.
	0.5	2) استنتاج عدد طبيعي حيث الكتابة العشرية لمكعبه تنتهي بـ 2009 : لدينا $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$ أي أن $2009^{8001} \equiv 2009[10000]$ بحيث $8001 = 3 \times 2667$ ومنه نجد $(2009^{2667})^3 \equiv 2009[10000]$ أي أن الكتابة العشرية لمكعب العدد 2009^{2667} تنتهي بـ 2009 .

التمرين الثالث : (5 نقاط)		
	0.5	1)أ) تبيين أن $E = \mathrm{Re}\left[\left(1+e^{i\theta}\right)^n\right]$: لدينا حسب منشور ثنائي الحد $(1+e^{i\theta})^n = \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K (1)^{n-K} (e^{i\theta})^K ; \forall m \in \mathbb{N} : 1^m = 1$ $(1+e^{i\theta})^n = \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K e^{iK\theta} = C_n^0 e^{i0\theta} + C_n^1 e^{i\theta} + C_n^2 e^{i2\theta} + ... + C_n^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + C_n^n e^{in\theta}$ و حسب دستور موافير $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow e^{iK\theta} = \cos K\theta + i\sin K\theta ; \forall K \in \mathbb{Z}$ $(1+e^{i\theta})^n = C_n^0 + C_n^1(\cos\theta + i\sin\theta) + C_n^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + ... + C_n^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ $(1+e^{i\theta})^n = \left[C_n^0 + C_n^1\cos\theta + C_n^2\cos 2\theta + ... + C_n^n\cos n\theta\right] + i\left[C_n^1\sin\theta + C_n^2\sin 2\theta + ... + C_n^n\sin n\theta\right]$

إعداد و كتابة : عريب عصام

		$(1+e^{i\theta})^n = E + i\sum_{K=0}^{K=n} C_n^K \sin K\theta = \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K \cos K\theta + i\sum_{K=0}^{K=n} C_n^K \sin K\theta$ و منه $E = \mathrm{Re}\left[\left(1+e^{i\theta}\right)^n\right]$.
1.25	0.5	ب – بين أن : $1+e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$: $1+e^{i\theta} = e^{i0}+e^{i\theta} = e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})}+e^{i\frac{2\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})$ و لدينا $e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ و منه $1+e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$
	0.25	ج – استنتاج أن : $E = 2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})$: انطلاقا مم سبق فإن $E = \mathrm{Re}\left[\left(1+e^{i\theta}\right)^n\right] = \mathrm{Re}\left[(2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}})^n\right] = \mathrm{Re}(2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{n\theta}{2}})$ و حسب دستور موافير فإن $E = 2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})$.
1.25	01 0.25	2)إيجاد العدد المركب Z حتى تكون النقط ذات اللواحق التالية على الترتيب Z ، iZ و i على استقامة واحدة : * تذكير : $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \overline{Z} \\ \mathrm{Im}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = K\pi; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$ نضع $M(Z)$ ، $M'(iZ)$ و $A(i)$. M ، M' و A على استقامة واحدة معناه : $\frac{Z-iZ}{Z-i} = \frac{Z(1-i)}{Z-i}\times\frac{\overline{Z}+i}{\overline{Z}+i} = \frac{\lvert Z\rvert^2(1+i)+Z(1+i)}{\lvert Z-i\rvert^2}; Z \neq i$ $\frac{Z-iZ}{Z-i} = \frac{(x^2+y^2)(1-i)+(x+iy)(1+i)}{x^2+y^2+1-2y} = \frac{x^2+y^2-i(x^2+y^2)+x-y+i(x+y)}{x^2+y^2+1-2y}$ $\frac{Z-iZ}{Z-i} = \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+y^2+1-2y}+i\frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+y^2+1-2y}$ $\frac{Z-iZ}{Z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-y = 0 \\ Z \neq i \Leftrightarrow (x;y) \neq (0;1) \end{cases} \Rightarrow x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+y^2-2\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = 0$ $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 > 0$ أي أن $M(Z)$ تنتمي إلى الدائرة إحداثيات مركزها هي $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ و نصف قطرها $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ والنقطة ذات الإحداثيات $(0;1)$ لأنه في حالة أخذنا $Z = i$ نجد اللواحق $i, i, -1$ و هي على استقامة واحدة لانطباق نقطتين فوق بعضها . $(\overrightarrow{MM'} = 0\overrightarrow{MA})$

إعداد و كتابة : غريب عصام

		<u>– الطريقة التحليلية :</u>
		
		نضع $M(Z)$ ، $M'(iZ)$ و $A(i)$. M ، M' و A على استقامة واحدة معناه : $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AM'}$ أي أنهما مرتبطان خطيا ، لدينا :
		
		$\begin{cases} Z = x+iy \to M(x;y) \\ iZ = i(x+iy) = -y+ix \to M'(-y;x) \\ i = 0+1i \to A(0;1) \end{cases}$
		$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix};\overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix} -y \\ x-1 \end{pmatrix}$
		
		*تذكير : $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}//\vec{U'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab'-ba'=0$
		
		$\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow x(x-1)-(y-1)(-y)=0$
		$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-y=0$
		$\Leftrightarrow x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+y^2-2\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$
		$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2>0$
		
		أي أن $M(Z)$ تنتمي إلى الدائرة إحداثيات مركزها هي $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ و نصف قطرها $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

	0.5	3) أ – تبيين أنه يمكن أن وضع $Z_1=e^{i\theta_1}$ ، $Z_2=e^{i\theta_2}$ و $Z_3=e^{i\theta_3}$ حيث θ_1 ، θ_2 و θ_3 هي عمدات الأعداد المركبة الثلاثة على الترتيب Z_1 ، Z_2 و Z_3 : أي عدد مركب غير معدوم يقبل شكلا أسيا ($Z=\lvert Z\rvert e^{i\arg(Z)}$) و حسب المعادلة الثانية يمكن وضع الأعداد المركبة من الشكل التالي : $Z_1=e^{i\theta_1}$ ، $Z_2=e^{i\theta_2}$ و $Z_3=e^{i\theta_3}$ حيث أنه من أجل هذه الأعداد المركبة فإن المعادلتين الأولى والثالثة تقبل حلولا غير منتهية $(\theta_1;\theta_2;\theta_3)\in\mathbb{R}^3$.
	0.25	ب) تبيين أن $\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$: لدينا $Z_1\times Z_2\times Z_3=1$ بحيث $Z_k=e^{i\theta_k}$ و $k=\{1;2;3\}$ تحقق المعادلة التالية : $Z_1\times Z_2\times Z_3=1 \Rightarrow e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}\times e^{i\theta_3}=e^{i0} \Rightarrow e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=e^{i0}$ و منه $\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$.

إعداد و كتابة : عريب عصام

2.5	0.5	ج – بين أن θ_1 و θ_2 تحقق جملة المعادلتين : انطلاقا من السؤال السابق فإن $\theta_1+\theta_2+\theta_3 \Leftrightarrow \theta_3=-(\theta_1+\theta_2)...(*)$ بتعويض العلاقة (*) في المعادلة الأولى نجد : $Z_1+Z_2+Z_3=1 \Rightarrow \cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)+\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin\left[-(\theta_1+\theta_2)\right]$ $Z_1+Z_2+Z_3=1 \Rightarrow \cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)+i\left[\sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1+\theta_2)\right]=1$ $Z_1+Z_2+Z_3=1 \Rightarrow \begin{cases}\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)=1\\ \sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1+\theta_2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)=1-\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)=\sin(\theta_1+\theta_2)\end{cases}$ و هو المطلوب .
	0.5	د– استنتاج أن $\cos\theta_1\times\cos\theta_2=0$: لدينا $\begin{cases}\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)=1-\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)=\sin(\theta_1+\theta_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)\right]^2=\left[1-\cos(\theta_1+\theta_2)\right]^2\\ \left[\sin(\theta_1)+\sin(\theta_2)\right]^2=\sin^2(\theta_1+\theta_2)\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}\cos^2(\theta_1)+\cos^2(\theta_2)+2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)=1+\cos^2(\theta_1+\theta_2)-2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin^2(\theta_1)+\sin^2(\theta_2)+2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)=\sin^2(\theta_1+\theta_2)\end{cases}$ بجمع المعادلتين نجد : $2+2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)=2-2\cos(\theta_1+\theta_2) \Rightarrow \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)=-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)-\cos(\theta_1+\theta_2)$ $\Rightarrow \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)=-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)-\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \Rightarrow 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)=0$ و منه $\cos\theta_1\times\cos\theta_2=0$.
	0.25 0.25	هـ– تبيين أن الأعداد المركبة Z_1 ، Z_2 و Z_3 هي 1 ، i و $-i$: لدينا مما سبق $\cos\theta_1\times\cos\theta_2=0$ معناه إما $\begin{cases}\cos(\theta_1)=0 \Rightarrow \theta_1\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ \text{و}\\ \cos(\theta_2)=0 \Rightarrow \theta_2\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ و إما $\begin{cases}\cos(\theta_1)=0 \Rightarrow \theta_1\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\\ \text{أو}\\ \cos(\theta_2)=0 \Rightarrow \theta_2\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}$ بحيث أن الثنائية $(\theta_1;\theta_2)$ تقبل التبديل لوجود التناظر فندرس احتمالين فقط و في الحالة الأولى (كلاهما معدوم) أخذنا العمدتين مختلفتين تماما حتى تتحقق جملة المعادلتين السابقة و يتحقق الشرط $\theta_3=-(\theta_1+\theta_2)$ و منه نجد أن $\theta_3=\{0;\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\}$ ، نكتفي بدراسة حالة واحدة لأن الثلاثية $(\theta_1;\theta_2;\theta_3)$ قابلة للتبديل فالجداء و الجمع تبديليان : *نكتفي بدراسة الحالة :

إعداد و كتابة : عريب عصام

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)=0\Rightarrow\theta_1\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ \text{و}\\ \cos(\theta_2)=0\Rightarrow\theta_2\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(-\frac{\pi}{2})=0\\ 1-\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=1-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2})+\sin(-\frac{\pi}{2})=1-1=0\\ \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=\sin(0)=0\end{cases}\end{cases}$$

و منه جملة المعادلتين ذات المجهولين $(\theta_1;\theta_2)$ محققة .

*استنادا إلى العلاقة $\theta_3=-(\theta_1+\theta_2)$ نجد أن $\theta_3=0$.

و منه $(\theta_1;\theta_2;\theta_3)=\left\{(0;\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2});(0;-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2});(\frac{\pi}{2};0;-\frac{\pi}{2});(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2};0);(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};0);(-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2})\right\}$. 0.25

إذن : $(Z_1;Z_2;Z_3)=\{(1;i;-i);(1;-i;i);(i;1;-i);(i;-i;1);(-i;i;1);(-i;1;i)\}$.

<u>*التحقق :</u>

$$\begin{cases}i-i+1=1\\ |i|=|-i|=|1|=1\\ i\times(-i)\times1=-i^2\times1=1\end{cases}$$

<u>طريقة أخرى :</u>**

0.25

نعتبر كثير الحدود المركب $P(Z)=Z^3+aZ^2+bZ+c$ و لتكن Z_1 ، Z_2 و Z_3 حلول المعادلة $Z_1+Z_2+Z_3=1$

معناه $(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)=0$.

0.25

بالنشر و المطابقة نجد : $\begin{cases}a=-(Z_1+Z_2+Z_3)=-1\\ b=Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3=1\\ c=-(Z_1\times Z_2\times Z_3)=-1\end{cases}$

ومنه $Z^3-(Z_1+Z_2+Z_3)Z^2+(Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3)Z-Z_1\times Z_2\times Z_3=0$

و لدينا مما سبق $Z_1+Z_2+Z_3=1$ و $Z_1\times Z_2\times Z_3=1$ إذا نحسب $Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3$:

لدينا $Z_1Z_2Z_3(Z_1+Z_2+Z_3)=\overline{Z_2Z_3}|Z_1|^2+\overline{Z_1Z_3}|Z_2|^2+\overline{Z_1Z_2}|Z_3|^2=|Z_1|^2(\overline{Z_1Z_2}+\overline{Z_2Z_3}+\overline{Z_1Z_3})=1$

0.25

ومنه : $\overline{Z_1Z_2}+\overline{Z_2Z_3}+\overline{Z_1Z_3}=\frac{1}{|Z_1|^2}\Leftrightarrow\overline{\overline{Z_1Z_2}+\overline{Z_2Z_3}+\overline{Z_1Z_3}}=\overline{\frac{1}{|Z_1|^2}}\Leftrightarrow Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3=\frac{1}{|Z_1|^2}$

و لدينا $Z_1Z_2Z_3=1\Leftrightarrow|Z_1Z_2Z_3|=1\Leftrightarrow|Z_1||Z_2||Z_3|=1\Leftrightarrow|Z_1|=|Z_2|=|Z_3|=1$

و منه نجد أن $Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3=1$.

تصبح المعادلة $P(Z)=0\Leftrightarrow Z^3-Z^2+Z-1=0\Leftrightarrow(Z-1)(Z^2+1)=0\Leftrightarrow(Z-1)(Z^2-i^2)=0$

إعداد و كتابة : غريب عصام

	0.25	$(Z-1)(Z-i)(Z+i)=0 \Rightarrow (Z_1;Z_2;Z_3)=(1;i;-i)$ و الثلاثية $(Z_1;Z_2;Z_3)$ قابلة للتبديل .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

.الجزء الأول :

1)دراسة تغيرات كلا من الدالتين f_0 و f_1 :

.النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}:FI\to\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1$$

0.25

.دراسة اتجاه التغير للدالتين f_0 و f_1 :

الدالة f_0 معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها :

$$f'_0(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0;\forall x\in\mathbb{R}$$

الدالة f_0 متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

0.25

الدالة f_1 معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها :

$$f'_1(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0;\forall x\in\mathbb{R}$$

الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

0.25

.جدول التغيرات للدالتين f_0 و f_1 :

01

إعداد و كتابة : غريب عصام

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$	
$f_0(x)$	$1 \searrow$	0
$f_1'(x)$	$+$	
$f_1(x)$	$0 \nearrow$	1

	0.25	2)أ) تبيين أنه من أجل $x,-x\in\mathbb{R}$ فإن $f_0(-x)=f_1(x)$:
	0.25	$\forall x,-x\in\mathbb{R}: f_0(-x)=\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x+1}=f_1(x)$
	0.25	*تفسير النتيجة بيانيا : المنحنيان (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب (yy') أي المستقيم ذي المعادلة $x=0$.
1.5		ب) تبيين أن القيمة $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ثابتة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ مع تعيينها :
	0.25	$\forall x\in\mathbb{R}: \frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}=\frac{\frac{1}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}}{2}=\frac{1+e^x}{2(e^x+1)}=\frac{1}{2}$
		و منه القيمة $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ثابتة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.
	0.25	*تفسير النتيجة بيانيا : المنحنيان (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم الأفقي ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}$.
	0.5	ج) انطلاقا من السؤالين السابقين نستنتج أن المنحنيان (C_0) و (C_1) يقبلان النقطة ذات الإحداثيات $(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر .
01	1	3) إنشاء المنحنيين (C_0) و (C_1) : (انظر آخر التصحيح)
		.الجزء الثاني : α عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.
		1) دراسة حسب قيم الوسيط الحقيقي α تغيرات الدالة f_α : $f_\alpha(x)=\frac{\alpha e^x+1-\alpha}{1+e^x}$ $D_{f_\alpha}=\mathbb{R}$

إعداد و كتابة : غريب عصام

01

0.25

.النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha e^x+1-\alpha}{1+e^x}=1-\alpha : \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha e^x+1-\alpha}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(\alpha+\frac{1}{e^x}-\frac{\alpha}{e^x})}{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha+\frac{1}{e^x}-\frac{\alpha}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}=\alpha$$

.اتجاه التغير : الدالة f_α معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها :

0.25

$$f'_\alpha(x)=\frac{\alpha e^x(1+e^x)-e^x(\alpha e^x+1-\alpha)}{(1+e^x)^2}=\frac{\alpha e^x+\alpha e^{2x}-\alpha e^{2x}-e^x+\alpha e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{2\alpha e^x-e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x(2\alpha-1)}{(1+e^x)^2}$$

*إشارة المشتق $f'_\alpha(x)$ من إشارة $2\alpha-1$:

0.25

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2\alpha-1$	$-$	0	$+$
$f'_\alpha(x)$	$-$	‖	$+$

0.25

.لما $\alpha<\frac{1}{2}$ فإن $f'_\alpha(x)<0$ وبالتالي فإن الدالة f_α متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

.لما $\alpha>\frac{1}{2}$ فإن $f'_\alpha(x)>0$ وبالتالي فإن الدالة f_α متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

0.5

2) أ) تبيين أن جميع المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة Ω يطلب تعيين إحداثياتها :

$$y_\Omega=\frac{\alpha e^{x_\Omega}+1-\alpha}{e^{x_\Omega}+1}=\frac{\alpha(e^{x_\Omega}-1)+1}{e^{x_\Omega}+1}$$

نلاحظ أن y_Ω تكون مستقلة عن α من أجل $x_\Omega=0$:

$$y_\Omega(x_\Omega=0)=\frac{\alpha(e^0-1)+1}{e^0+1}=\frac{1}{2}$$

و منه جميع المنحنيات (C_α) تمر من النقطة الثابتة $\Omega(0;\frac{1}{2})$.

ب) تبيين أن النقطة Ω هي مركز تناظر و نقطة انعطاف للمنحنى (C_α) :

*تبيين أن النقطة Ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_α) :

$$\forall x, 2x_\Omega-x\in D_{f_\alpha} : f_\alpha(2x_\Omega-x)+f_\alpha(x)\overset{?}{=}2y_\Omega$$

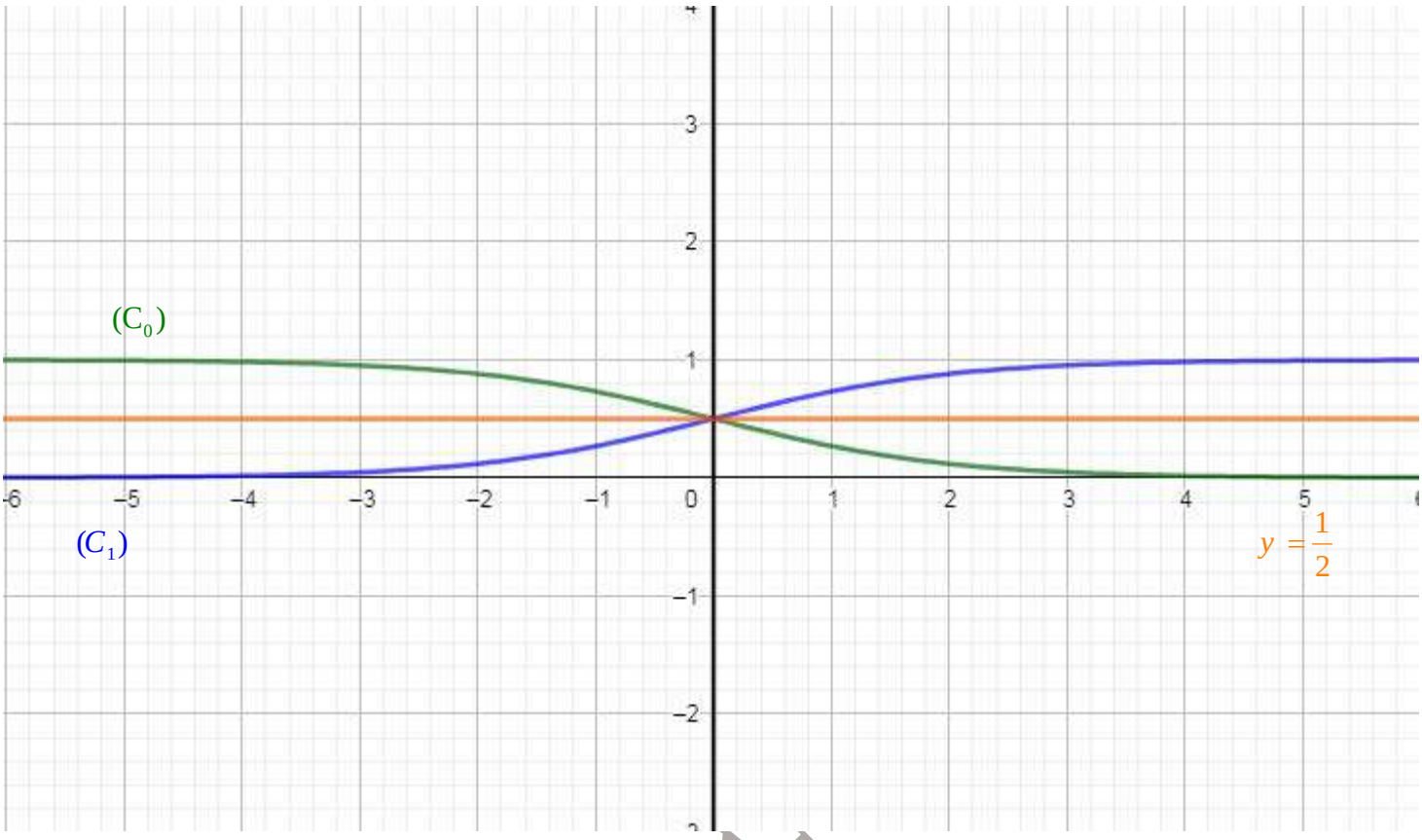
إعداد و كتابة : غريب عصام

01	0.25	$f_\alpha(2x_\Omega - x)+f_\alpha(x)=f_\alpha(-x)+f_\alpha(x)=\frac{\alpha e^{-x}+1-\alpha}{e^{-x}+1}+\frac{\alpha e^{x}+1-\alpha}{e^{x}+1}=\frac{\alpha\frac{1}{e^x}+1-\alpha}{\frac{1}{e^x}+1}+\frac{\alpha e^{x}+1-\alpha}{e^{x}+1}$ $f_\alpha(2x_\Omega - x)+f_\alpha(x)=\frac{\frac{\alpha+e^x-\alpha e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}+\frac{\alpha e^{x}+1-\alpha}{e^{x}+1}=\frac{\alpha+e^x-\alpha e^x+\alpha e^x+1-\alpha}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}=1=2(\frac{1}{2})$ و منه النقطة $\Omega(0;\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_α) .
	0.25	*تبيين أن النقطة $\Omega(0;\frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_α) : أي أن $f''_\alpha(0)=0$ الدالة f'_α معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها : $f''_\alpha(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}(e^x+1)(2\alpha-1)}{(e^x+1)^4}=\frac{(2\alpha-1)e^x(1+e^{2x}+2e^x-2e^x-2e^{2x})}{(e^x+1)^4}$ $f''_\alpha(x)=\frac{(2\alpha-1)e^x(1-e^{2x})}{(e^x+1)^4}$ $f''_\alpha(0)=\frac{(2\alpha-1)e^x(1-e^{2\times 0})}{(e^x+1)^4}=0$ و منه النقطة $\Omega(0;\frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_α) .
	0.25 0.25	3) β عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$. أ) تبيين أنه إذا كان $f_\alpha(-x)=f_\beta(x)$ فإن $\alpha+\beta=1$: $\forall x,-x\in\mathbb{R}: f_\alpha(-x)=f_\beta(x)\Leftrightarrow\frac{\alpha e^{-x}+1-\alpha}{e^{-x}+1}=\frac{\beta e^x+1-\beta}{e^x+1}\Rightarrow\frac{\alpha+e^x-\alpha e^x}{e^x+1}=\frac{\beta e^x+1-\beta}{e^x+1}$ $\forall x,-x\in\mathbb{R}: f_\alpha(-x)=f_\beta(x)\Rightarrow\alpha+e^x-\alpha e^x=\beta e^x+1-\beta\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}:(-\alpha-\beta+1)e^x+\alpha+\beta-1=0$ $\forall x,-x\in\mathbb{R}: f_\alpha(-x)=f_\beta(x)\Rightarrow\begin{cases}-\alpha-\beta+1=0\\ \text{و}\\ \alpha+\beta-1=0\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=1$ *تفسير النتيجة بيانيا : المنحنيان (C_α) و (C_β) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب (yy') من أجل $\alpha+\beta=1$.
		ب) إثبات أنه إذا كان $\alpha+\beta=1$ فإن المنحنيين (C_α) و (C_β) متناظران بالنسبة إلى مستقيم آخر مواز لمحور الفواصل يطلب تعيينه: لدينا $\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\beta=1-\alpha$ $\forall x\in\mathbb{R},\beta=1-\alpha:\frac{f_\alpha(x)+f_\beta(x)}{2}=\frac{f_\alpha(x)+f_{1-\alpha}(x)}{2}=\frac{\frac{\alpha e^x+1-\alpha}{e^x+1}+\frac{(1-\alpha)e^x+1-(1-\alpha)}{e^x+1}}{2}$

إعداد و كتابة : غريب عصام

	0.25 0.25	$\forall x \in \mathbb{R}, \beta = 1-\alpha : \frac{f_\alpha(x)+f_{1-\alpha}(x)}{2} = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha + e^x - \alpha e^x + 1 - 1 + \alpha}{2(e^x+1)} = \frac{e^x+1}{2(e^x+1)} = \frac{1}{2}$ و منه المنحنيان (C_α) و (C_β) متناظران بالنسبة إلى المستقيم الأفقي ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}$ من أجل $\alpha+\beta=1$.
1.5	0.25 0.25 0.25 0.25	ج) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x و $\alpha+\beta=1$ فإن $f_\alpha(x) = \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta}$: $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = (\frac{1-2\alpha}{1-2\beta}) \frac{\beta e^x + 1 - \beta}{e^x+1} + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta}$ $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{1-2\beta} (\frac{\beta e^x + 1 - \beta - 2\alpha\beta e^x - 2\alpha + 2\alpha\beta + \alpha e^x + \alpha - \beta e^x - \beta}{e^x+1})$ $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{1-2\beta} \left[\frac{2\alpha\beta(-e^x+1) - \alpha(-e^x+1) - 2\beta + 1}{e^x+1} \right] = \frac{1}{1-2\beta} \frac{-\alpha(-e^x+1)(-2\beta+1) - 2\beta + 1}{e^x+1}$ $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{1-2\beta} \frac{(-2\beta+1)(\alpha e^x - \alpha + 1)}{e^x+1} = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x+1} = f_\alpha(x)$ من أجل الشرط المعطى فإن : $\alpha+\beta=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} = \frac{1-\alpha-\alpha}{1-\beta-\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} = -1 \\ \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta-\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1 \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha+\beta=1 : \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = -f_\beta(x) + 1 = f_\alpha(x)$ *تفسير النتيجة بيانيا : من أجل $\alpha+\beta=1$ فإن كل نقطة $M(x;y)$ من المنحنى (C_α) ترفق بالنقطة $M'(x';y')$ من المنحنى (C_β) أي أن المنحنى (C_β) يستنتج من المنحنى (C_α) بالتحويل النقطي : $T : \begin{cases} T(M) = M' \\ (x;y) \to (x';y') = (x;-y+1) \end{cases}$

إعداد و كتابة : غريب عصام



إعداد و كتابة : غريب عصام

رابط الصفحة :

https://www.facebook.com/114087136978542/البكالوريا-التجريبية-دورة-2020-مادة-الرياضيات

بـ : غريب عصام

شِعار العمل في هذا الموسم الدراسي { 2023 - 2024 } :

تعبُ المُراجعةْ أَفضَلُ مِنْ ألمِ السُّقُوطْ

صُنعُ تاجْ الامتياز الذهبي نحو بكالوريا 2024

بالتوفيق و النَّجاح لجُموع التلاميذ الشُّرفاء

@NAFI3_BAC_DZ_1954

https://www.facebook.com/okba.bac.2010