**المسألة رقم 04 :**

**الجزء 1-**

**ليكن كثير الحدود** $h(x)$ **المعرف بـ :** $h(x)=x^3+x^2-7x+2$

**1) أحسب** $h(2)$ **و أعط تحليلا لكثير الحدود** $h(x)$ .

**2) حل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $h(x)=0$

**الجزء 2-**

**نعتبر الدالتين** $g$ **و** $f$ **المعرفتين على** $\mathbb{R}$ **و** $\mathbb{R}-\{1\}$ **على الترتيب بـ :**

$g(x)=x^2+2x-3$ **و** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ **و ليكن** $(C_g)$ **و** $(C_f)$ **تمثيليهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**1) عين فواصل نقط تقاطع** $(C_f)$ **و** $(C_g)$ .

**2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي** $x$ **فإن :** $g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ **حيث** $\alpha$ **و** $\beta$ **عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتج كيفية إنشاء التمثيل البياني** $(C_g)$ **إنطلاقا من المنحنى الممثل للدالة مربع .**

**3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي** $x$ **يختلف عن** $1$ **فإن :** $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$ **بحيث** $a$ **و** $b$ **عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتج كيفية إنشاء التمثيل البياني** $(C_f)$ **إنطلاقا من المنحنى الممثل للدالة مقلوب .**

**4) أ- بين أن المستقيم** $x=-1$ **محور تناظر للمنحنى** $(C_g)$ .

**ب- بين أ** $\omega\ 1;2$ $C$

## الجزء 3-

نعتبر الدالتين $f_1$ و $f_2$ المعرفتين بـ : $f_1(x)=|f(x)|$ و $f_2(x)=f(|x|)$

1) عين مجموعة تعريف الدالة $f_1$ ثم أكتب الدالة $f_1$ دون رمز القيمة المطلقة .

2) إستنتج كيفية إنشاء $(C_{f_1})$ التمثيل البياني للدالة $f_1$ .

3) أ- عين مجموعة تعريف الدالة $f_2$ ثم بين أن $f_2$ دالة زوجية .

ب- إستنتج كيفية إنشاء $(C_{f_2})$ التمثيل البياني للدالة $f_2$ .

## حل مقترح :

1) حساب $h(2)$ و إعطاء تحليلا لكثير الحدود $h(x)$ :

$h(2)=2^3+2^2-7\times 2+2=0$ و منه نستنتج أن $2$ جذر لكثير الحدود $h(x)$ .

بما أن $2$ جذر لكثير الحدود $h(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ من الدرجة الثانية يحقق : $h(x)=(x-2)g(x)$ .

نضع : $g(x)=ax^2+bx+c$ و نعين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ :

أ- طريقة النشر و المطابقة :

$h(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$ و منه نجد :

$h(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$ ؛ إذن بالمطابقة نتحصل على :

أي $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=1 \\ c-2b=-7 \\ c=2 \end{cases}$ و منه نجد : $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}$ $g(x)=x^2+3x-1$

**إذن :** $h(x)=(x-2)(x^2+3x-1)$

**ب- طريقة القسمة الإقليدية : ( أكثر إختصارا من طريقة النشر و المطابقة )**

| | |
|---|---|
| $x^3+x^2-7x+2$ | $x-2$ |
| $-x^3+2x^2$ | $x^2+3x-1$ |
| $3x^2-7x+2$ | |
| $-3x^2+6x$ | |
| $-x+2$ | |
| $x-2$ | |
| $0$ | |

**و منه نجد :** $g(x)=x^2+3x-1$ **و بالتالي يكون :** $h(x)=(x-2)(x^2+3x-1)$

**2) حل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $h(x)=0$

$h(x)=0$ **معناه :** $(x-2)(x^2+3x-1)=0$ **و منه يكون :** $x-2=0$ **أو** $x^2+3x-1=0$

**أي** $x=2$ **أو** $x^2+3x-1=0$ **و لإيجاد حلول المعادلة** $x^2+3x-1=0$ **نحسب المميز** $\Delta$ **:**

$\Delta=3^2-4\times1\times(-1)$ **أي** $\Delta=13$ ؛ **نلاحظ أن :** $\Delta\succ0$ **و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين**

**هما :** $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ؛ $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ .

**نتيجة :** **حلول المعادلة** $h(x)=0$ **هي :** $S=\left\{2\,,\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\,,\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\}$

**الجزء 2-**

1) تعيين فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ و $(C_g)$ :

من أجل ذلك نبحث عن حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ :

من أجل كل $x\neq 1$ : $\dfrac{2x+1}{x-1}=x^2+2x-3$ تكافئ : $2x+1=(x-1)(x^2+2x-3)$ أي

$2x+1=x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3$ أي $x^3+x^2-7x+2=0$ معناه $h(x)=0$ .

إذن حسب السؤال السابق نستنتج أن $(C_f)$ و $(C_g)$ يتقاطعان في النقط التي فواصلها

$2$ ، $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ .

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن : $g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث $\alpha$ و $\beta$

عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتاج كيفية إنشاء التمثيل البياني $(C_g)$ إنطلاقا

من المنحنى الممثل للدالة مربع :

<u>الطريقة الأولى</u> : نستعمل النشر ثم المطابقة فنتحصل على :

$g(x)=x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta$ و منه نجد : $\begin{cases}2\alpha=2\\ \alpha^2+\beta=-3\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\end{cases}$

<u>إذن</u> : $g(x)=(x+1)^2-4$

<u>الطريقة الثانية</u> : نستعمل الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $x^2+2x-3$ :

$\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)$ أي $\Delta=16$ و منه الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $x^2+2x-3$

هو : $x^2+2x-3=1\left[\left(x+\dfrac{2}{2\times 1}\right)-\dfrac{16}{4\times 1^2}\right]$ أي $x^2+2x-3=(x+1)-4$ و منه يكون :

$\alpha=1$

$+1)^2-4$

أي أن $g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ نكتب من الشكل $g(x)=k(x+\alpha)+\beta$ بحيث :

$k(x)=x^2$ و $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\end{cases}$ ؛ إذن : $(C_g)$ هو صورة $(P)$ التمثيل البياني للدالة مربع

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ .

3) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن $1$ فإن : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$ بحيث $a$

و $b$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتاج كيفية إنشاء التمثيل البياني $(C_f)$

إنطلاقا من المنحنى الممثل للدالة مقلوب :

**الطريقة الأولى :** نوحد المقامات ثم نطابق مع عبارة $f(x)$ :

$f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{ax-a+b}{x-1}$ و منه نتحصل على : $ax-a+b=2x+1$ ؛ إذن نجد :

$\begin{cases}a=2\\ -a+b=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$ و بالتالي يكون : $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$

**الطريقة الثانية :** نحول الكتابة من الشكل : من أجل كل $x\neq 1$ لدينا

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2x-2+2+1}{x-1}=\dfrac{2x-2}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}$ أي $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}$ و منه

نجد $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$ ؛ إذن يكون : $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$

$f(x)$ نكتب من الشكل $f(x)=u(x+a)+b$ بحيث : $u(x)=\dfrac{3}{x}$ و $\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$ ؛ إذن :

$(C_g)$ هو صورة $(C_u)$ التمثيل البياني للدالة $u$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ .

4) أ- نبين أن المستقيم الذي $x=-1$ معادلة له هو محور تناظر للمنحنى $(C_g)$ :

من أجل كل $x\in D_g$ أي $x\in\mathbb{R}$ فإن : $2\times(-1)-x=-2-x\in\mathbb{R}$ أي $2\times(-1)-x\in D_g$

و من جهة أخرى : $g(-2-x)=(-2-x)^2+2(-2-x)-3$ أي :

$g(-2-x)=x^2+4+4x-4-2x-3$ أي $g(-2-x)=x^2+2x-3$ و منه نجد :

$g(-2-x)=g(x)$ ؛ إذن المستقيم الذي $x=-1$ معادلة له محور تناظر للمنحنى $(C_g)$ .

ب- نبين أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ :

من أجل كل $x\in D_f$ أي $x\neq 1$ فإن : $-x\neq -1$ و منه $2\times(1)-x\neq 2-1$ و منه

$2\times(1)-x\in D_f$ أي $2\times(1)-x\neq 1$

و من جهة أخرى : $f(2-x)+f(x)=2+\frac{3}{2-x-1}+2+\frac{3}{x-1}$ أي :

$f(2-x)+f(x)=4-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x-1}$ أي $f(2-x)+f(x)=4+\frac{3}{1-x}+\frac{3}{x-1}$

و منه نجد : $f(2-x)+f(x)=4=2\times 2$

إذن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

ملاحظة : يمكن إستعمال دساتير تغيير المعلم في الإجابة على السؤالين السابقين .

الجزء 3-

1) $D_{f_1}=D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ ثم كتابة الدالة $f_1$ دون رمز القيمة المطلقة :

$f_1(x)=|f(x)|$ معناه : $\begin{cases} f_1(x)=f(x) & si\quad f(x)\geq 0 \\ f_1(x)=-f(x) & si\quad f(x)\leq 0 \end{cases}$ إذن ينوجب علينا دراسة

إشارة الدالة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ :

إذن نستنتج أن : إذا كان $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup ]1,+\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $\frac{2x+1}{x-1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | | |

و إذا كان $x \in \left[-\frac{1}{2},1\right[$ فإن $f(x) \leq 0$

و منه يكون :

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} & si \quad x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup ]1,+\infty[ \\ f_1(x) = -\dfrac{2x+1}{x-1} & si \quad x \in \left[-\frac{1}{2},1\right[ \end{cases}$$

2) إستنتاج كيفية إنشاء $(C_{f_1})$ التمثيل البياني للدالة $f_1$ :

- لما $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup ]1,+\infty[$ فإن $f_1(x) = f(x)$ و منه $(C_{f_1})$ ينطبق على $(C_f)$ .
- لما $x \in \left[-\frac{1}{2},1\right[$ فإن $f_1(x) = -f(x)$ و منه $(C_{f_1})$ متناظر مع $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل .

3) أ- تكون الدالة $f_2$ معرفة من أجل $|x| \in D_f$ أي $|x| \neq 1$ أي $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه نجد $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ .

نبين أن $f_2$ دالة زوجية :

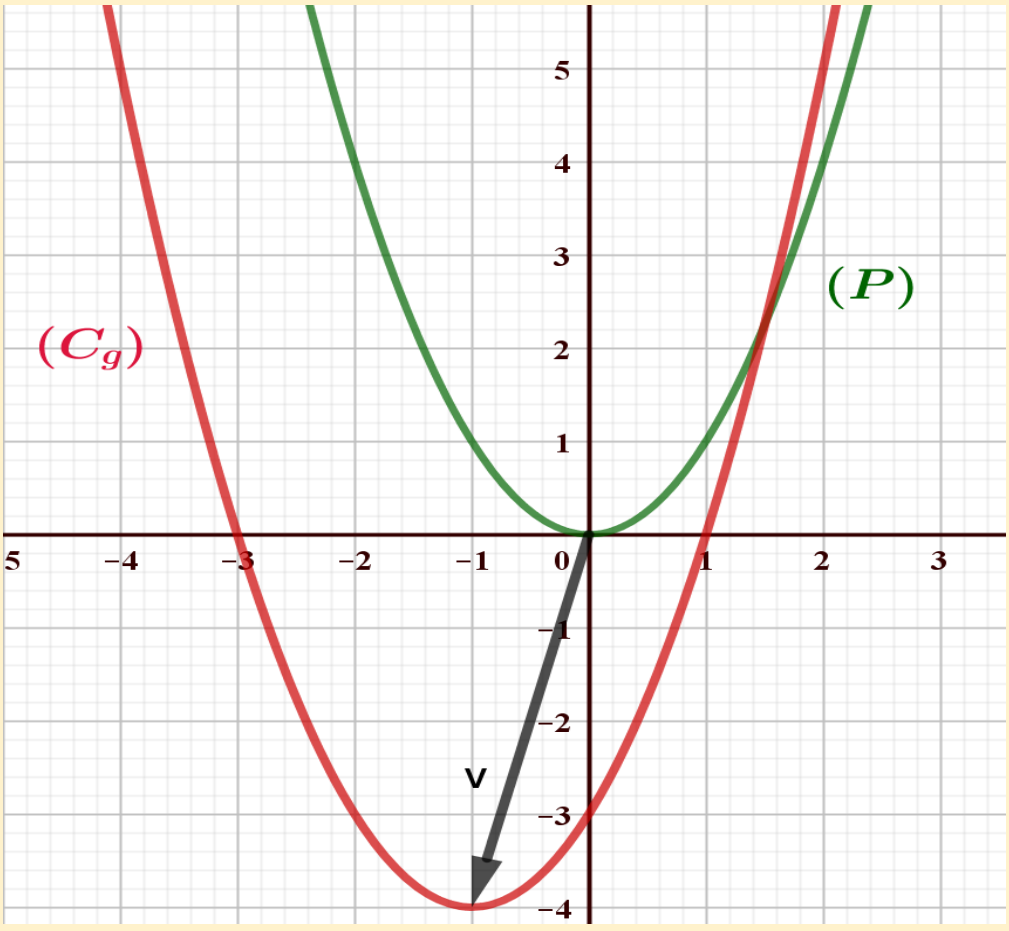
ة )

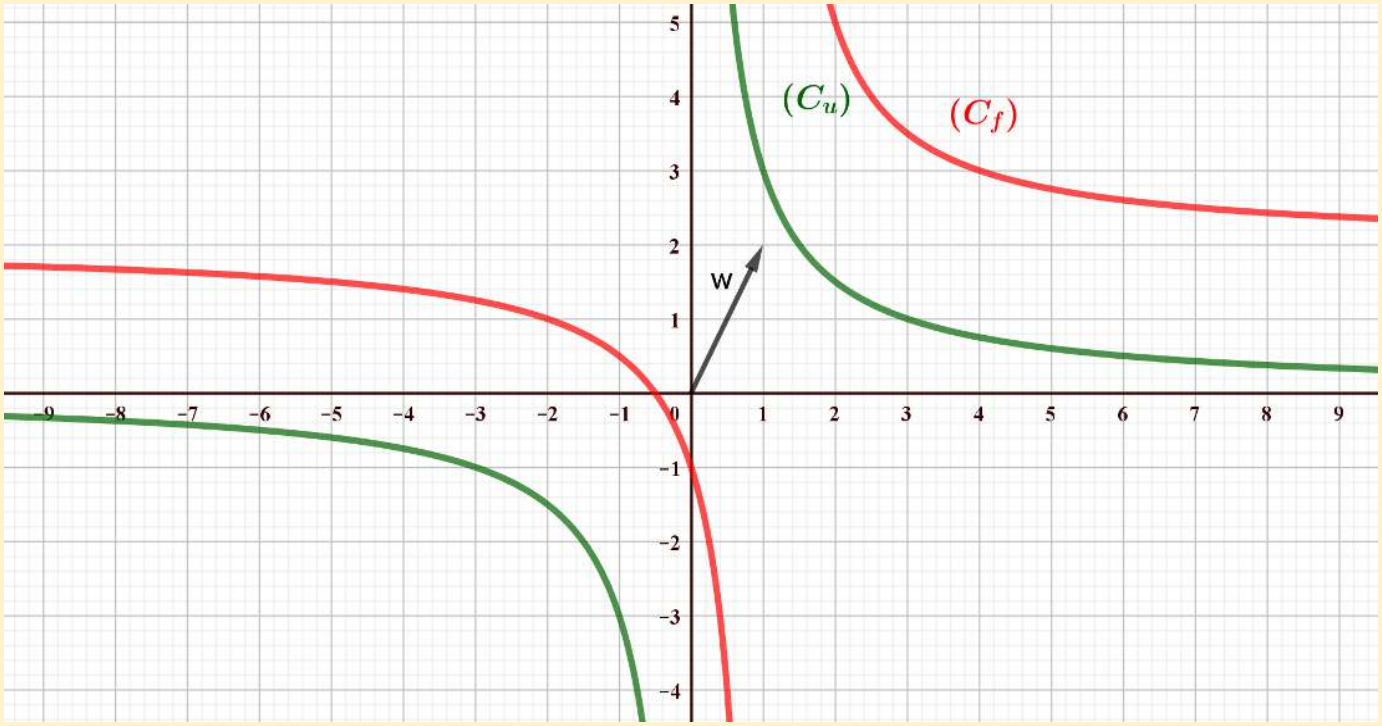
من جهة أخرى : $f_2(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=f_2(x)$ لأنه من خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي $x$ فإن : $|-x|=|x|$

**نتيجة :** $f_2$ دالة زوجية .

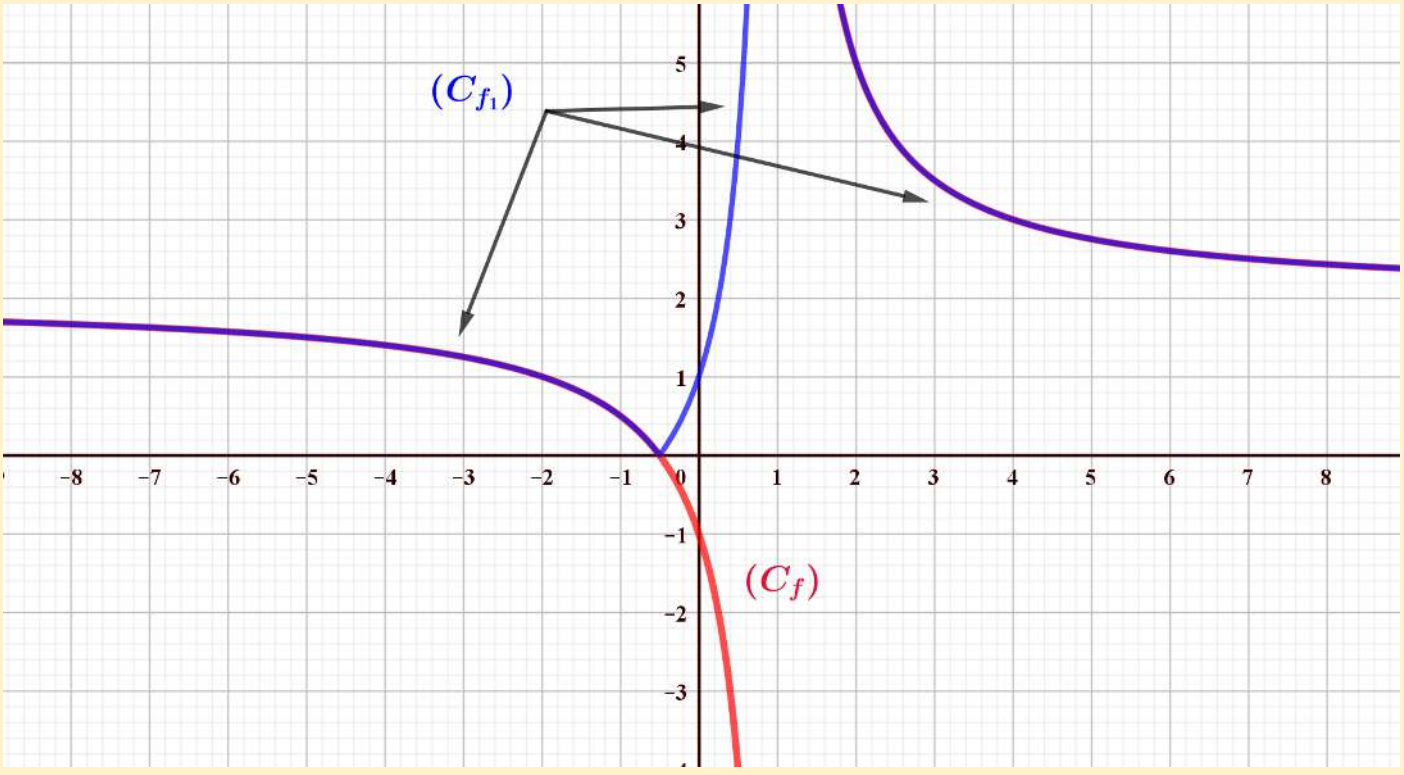
ب- إستنتاج كيفية إنشاء $(C_{f_2})$ التمثيل البياني للدالة $f_2$ :

- إذا كان $x\geq 0$ فإن : $|x|=x$ و منه يكون $f_2(x)=f(x)$ ؛ إذن $(C_{f_2})$ **ينطبق** على $(C_f)$ .
- إذا كان $x\leq 0$ فإن : $|x|=-x$ و منه يكون $f_2(x)=f(-x)$ ؛ و منه $(C_{f_2})$ **متناظر** مع $(C_f)$ **بالنسبة لمحور التراتيب** ( $f_2$ دالة زوجية ) .

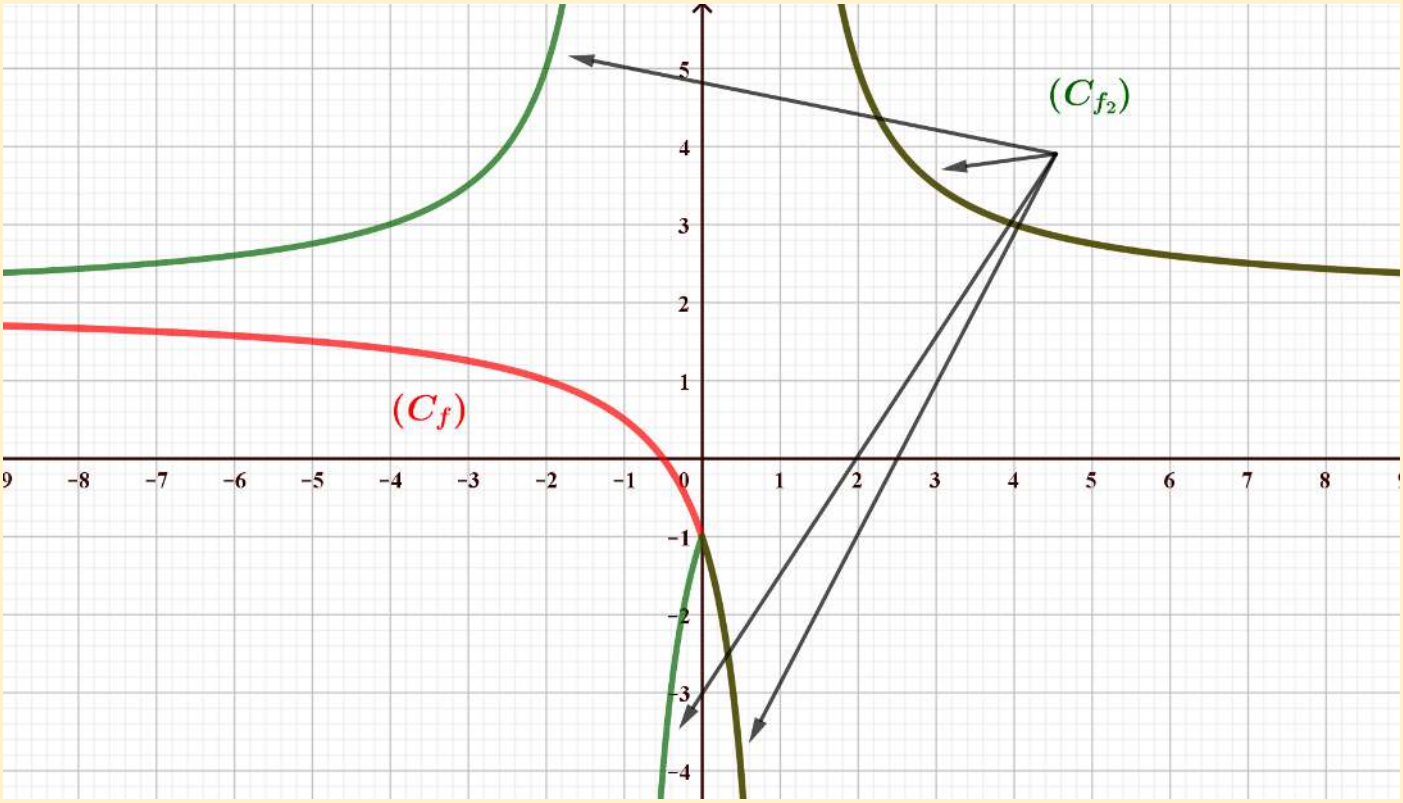





**التمثيل البياني للدالة $f_1$ :**




**التمثيل البياني للدالة $f_2$ :**




مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح ...

نبيل