تمارين للمنافسات الفكرية

1. f دالة معرفة على الأعداد الطبيعية بحيث : $f(x) = \begin{cases} x+2; & x < 10 \\ f(x-2); & x \geqslant 10 \end{cases}$.

   عين $\max\limits_{x\in\mathbb{N}} f(x)$ مع التعليل.

2. احسب طول قطر مكعب القيمة العددية لمساحته الكلية تساوي ضعف القيمة العددية لحجمه.

3. احسب : $S = 8^0 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}} + 8^1 + \cdots + 8^3$.

4. $ABCD$ مربع طول ضلعه 2 cm. نختار بصفة عشوائية نقطة E داخل هذا المربع.

   – احسب احتمال أن يكون المثلث ABE منفرج الزاوية.

5. نختار بصفة عشوائية قاسما من قواسم العدد 15^{90}.

   – احسب احتمال أن يكون هذا القاسم من مضاعفات 15^{65}.

6. ابحث عن كل الأعداد الطبيعية من رقمين و التي تزيد بِ 9 إذا قلبنا رقميها.

7. يحتوي كيس على كريات زرقاء و أخرى خضراء. إذا سحبنا ثلاث كريات خضراء منه فإن احتمال سحب كرية خضراء من بين الكريات المتبقية يصبح $\frac{2}{5}$ أما إذا أضفنا 7 كريات زرقاء إلى الكيس فإن احتمال سحب كرية زرقاء يصبح $\frac{5}{8}$.

   – كم كان عدد الكريات الزرقاء في الكيس في البداية ؟

8. العدد $2^{11\,213} - 1$ أولي و يُكتب بِ 3 376 رقما. ما هو رقم آحاد هذا العدد ؟

الحلول

1. بما أن الدالة $x \mapsto x+2$ متزايدة تماما فإن $\max\limits_{x\in\mathbb{N},\ x<10} f(x) = f(9) = 9+2 = 11$.

من جهة أخرى، إذا كان $x \geqslant 10$ عددا زوجيا فإن : $f(x) = f(x-2) = \cdots = f(8) = 8+2 = 10$

و إذا كان $x \geqslant 10$ عددا فرديا فإن : $f(x) = f(x-2) = \cdots = f(9) = 11$

إذن أكبر قيمة للدالة f هي 11 و نتحصل عليها عند الأعداد الفردية $x \geqslant 9$.

2. نرمز بِـ $c > 0$ لطول حرف المكعب. مساحته الكلية هي $6c^2$ و حجمه c^3.

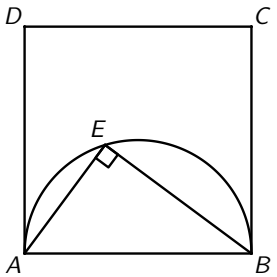
قيمة المساحة تساوي ضعف قيمة الحجم أي $6c^2 = 2c^3$ و بقسمة الطرفين على $2c^2$ نجد $c = 3$ إذن طول حرف المكعب هو 3 وحدات.

حسب نظرية فيثاغورس، طول قطر أحد أحرف المكعب هو $\sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$ و بالتالي طول قطر المكعب (حسب فيثاغورس دائما) هو $\sqrt{3^2+\left(\sqrt{18}\right)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

3. بملاحظة أن $8 = 2^3$ ينتج :

$$\begin{aligned} S &= 8^0 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}} + 8^1 + \cdots + 8^3 \\ &= 1 + \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} + \cdots + \left(2^3\right)^3 \\ &= 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots 2^9 \\ &= \frac{2^{10}-1}{2-1} \\ S &= 1023 \end{aligned}$$

4. الزاويتان $\widehat{ABE}$ و $\widehat{BAE}$ حادتان إذن الزاوية الوحيدة التي يمكن أن تكون منفرجة هي $\widehat{AEB}$.



• إذا كانت النقطة E تنتمي إلى نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن المثلث AEB قائم في E.

• إذا كانت النقطة E خارج نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن الزاوية $\widehat{AEB}$ حادة.

• إذا كانت النقطة E داخل نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن الزاوية $\widehat{AEB}$ منفرجة.

إذن حتى يكون المثلث ABE منفرج الزاوية، يجب أن تقع النقطة E داخل نصف الدائرة التي نصف قطرها $r = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

مساحة نصف الدائرة هذه هي : $s = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}\ \text{cm}^2$

و مساحة المربع هي : $\mathcal{S} = AB^2 = 2^2 = 4\ \text{cm}^2$

إذن احتمال أن يكون المثلث ABE منفرج الزاوية هو : $\mathbb{P} = \frac{s}{\mathcal{S}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8} \approx 0,39$

5. لد

$(90+1)$

من جهة أخرى : $\frac{15^{90}}{15^{65}} = 15^{90-25} = 15^{25} = 3^{25} \times 5^{25}$

و عدد قواسم 15^{25} هو : $(25+1)(25+1) = 26^2 = 676$

إذا اخترنا قاسما ممن بين قواسم 15^{25} و ضربناه في 15^{65} فإننا نحصل على عدد يقسم 15^{90} و يقبل القسمة على 15^{65}.

إذن احتمال أن يكون أحد قواسم 15^{90} من مضاعفات 15^{65} هو : $\mathbb{P} = \frac{676}{8281} = \frac{4}{49}$

6. إذا كان $10a+b$ هذا العدد فإن $10b+a = 10a+b+9$ منه $9b-9a = 9$ منه $b-a = 1$.

إذن رقما هذا العدد متتاليان و الأعداد التي تحقق هذه الشروط هي : 12-23-34-45-56-67-78-89.

7. احتمال سحب كرية خضراء من الكيس يساوي حاصل قسمة عدد الكريات الخضراء فيه على العدد الكلي للكريات.

نرمز بِ b إلى عدد الكريات الزرقاء في الكيس في البداية و نرمز بِ v إلى عدد الكريات الخضراء في الكيس في البداية. بعد سحب 3 كريات خضراء، تتبقى $v-3$ كرية خضراء إذن عدد الكريات الكلي يصبح $b+v-3$.

احتمال سحب كرية خضراء هو $\frac{2}{5}$ معناه $\frac{v-3}{b+v-3} = \frac{2}{5}$ منه $3v-2b = 9$.

بالمثل، عند إضافة 7 كريات زرقاء إلى الكيس يصبح احتمال سحب كرية زرقاء $\frac{5}{8}$ معناه $\frac{b+7}{b+g+7} = \frac{5}{8}$ منه $5v-3b = 21$.

بحل جملة المعادلتين $\begin{cases} 3v-2b = 9 \\ 5v-3b = 21 \end{cases}$ نجد $v = 15$ و $b = 18$.

عدد الكريات الزرقاء في الكيس في البداية كان 18 كرية.

8. لدينا : $2^1 = 2$ ؛ $2^2 = 4$ ؛ $2^3 = 8$ ؛ $2^4 = 16$ ؛ $2^5 = 32$ ؛ $2^6 = 64$ ؛ $2^7 = 128$ ؛ ...

إذن متتالية رقم آحاد قوى 2 دورية دورها 4. بما أن $11\,213 = 4 \times 2\,803 + 1$ فإن رقم آحاد $2^{11\,213}$ هو 2^1 أي هو 2 و بالتالي رقم آحاد $2^{11\,213} - 1$ هو $2 - 1$ أي هو 1.