2AS

التحويلات النقطية

Transformations

ملخص الدرس

تمارين

حا

ملخص الدرس

O نقطة من المستوي ، k عدد حقيقي غير معدوم

نسمي تحاكيا h مركزه O و نسبته k ، و نرمز له بالرمز $h(O,k)$ ، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي

النقطة M' من المستوي حيث $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$

النقطة M' هي صورة M بالتحاكي h : $M'=h(M)$ أو $M\xrightarrow{h}M'$

ملاحظة: إذا كان $k=1$ فإن التحاكي هو التحويل الحيادي وإذا كان $k=-1$ فإن التحاكي هو التناظر المركزي بالنسبة للنقطة O

نتائج :

1) إذا كانت M' هي صورة M بالتحاكي h الذي مركزه O و نسبته k فإن النقط O ، M و M' على استقامة واحدة و $OM'=|k|\times OM$

2) صورة النقطة O بالتحاكي h هي النقطة O نفسها (O نقطة صامدة).

الخاصّة المميِّزة

مبرهنة:

h تحاكي مركزه O و نسبته k ، A و B نقطتان. A' و B' صورتاهما على الترتيب بالتحاكي . لدينا: $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$

نتائج :

1) بما أن $k\neq 0$ فإنه إذا كانت A تختلف عن B فإن A' تختلف عن B' وبالتالي (AB) يوازي $(A'B')$ و $A'B'=|k|\times AB$

(التحاكي يضاعف المسافات إلى $|k|$)

2) إذا كان G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن صورته بالتحاكي هي G' مرجح الجملة $\{(A',\alpha);(B',\beta)\}$.

خواص أخرى:

1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط على استقامة واحدة و كانت A' ، B' و C' صورها على الترتيب بواسطة تحاك h فإن

2) إذا كان المستقيمان (D) و (Δ) متوازيين (أو متعامدين) فإن صورتيهما بواسطة تحاك h هما مستقيمان (D') و (Δ') متوازيان (أو متعامدين) ، **نقول أن التحاكي يحافظ على التوازي وعلى التعامد.**

3) في إذا كانت A ، B و C نقط من المستوي الموجه صورها بتحاك h هي A' ، B' و C' على الترتيب فإن:

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ و $BAC=B'A'C'$. نقول أن التحاكي يحافظ على الزوايا .

4) التحاكي الذي نسبته العدد الحقيقي k يضاعف الأطوال $|k|$ مرّة و يضاعف المساحات k^2 مرّة و يضاعف الحجوم k^3 مرة.

نقول أن التحاكي لا يحافظ على المسافات

. صورة بعض الأشكال الهندسية بالتحاكي

1) صورة مستقيم (D) بتحاكي هي مستقيم (D') يوازيه.

2) صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ هي قطعة مستقيمة $[A'B']$.

3) صورة دائرة (C) مركزها A و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $A'=h(A)$ و نصف قطرها $r'=|k|\times r$.

تمارين

تمرين 1: ☜ رقم 47 ص 332

$ABCD$ مربع طول ضلعه 3 .و $BEFG$ مربع طول ضلعه 2 . أنظر الشكل.

1) أحسب BAC و EBF .

- استنتج أن المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان .

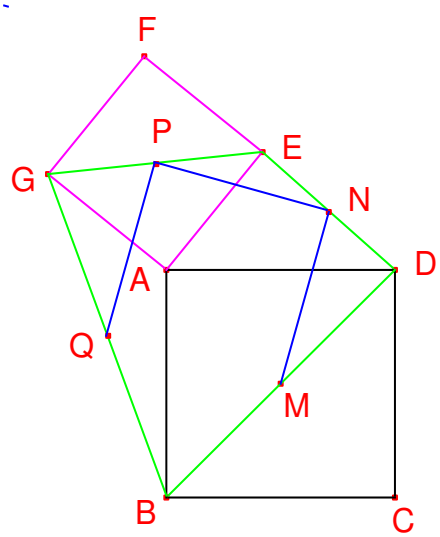
2) ليكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول النقطة A إلى النقطة B .برهن أن $h(C)=F$.

- لماذا $\frac{2}{3}$ هي نسبة التحاكي h ؟

3) برهن أن النقط D ، G ، I في استقامية .

تمرين 2: ☜ رقم 48 ص 332:

$ABCD$ و $AEFG$ مربعان حيث : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AG}\right)=\frac{\pi}{2}$ أنظر الشكل .



M ، N ، P ، Q منتصفات القطع $[BD]$ ، $[ED]$ ، $[GE]$ و $[GB]$ على الترتيب .

1)باعتبار المثلثين BED و BEG برهن أن : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

2) r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين صورة القطعة $[BE]$ بالدوران r .
- استنتج أن $MNPQ$ مربع .

تمرين 3:

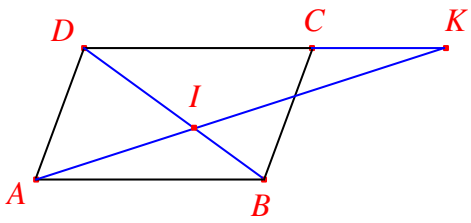
يمكن اعتبار المستوي مزود بالمعلم $\left(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$.

$ABCD$ متوازي

منتصف

تمرين 4: ☜رقم 42 ص 331: (خطأ في المعطيات)

$ABCD$ متوازي أضلاع . نعتبر h التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى D .



1) لماذا المستقيم (DC) هو صورة (AB) بالتحاكي h ؟

2) استنتج أن $h(A)=K$.

3) عين صورة المستقيم (BC) بالتحاكي h . واستنتج أن $h(C)=A$.

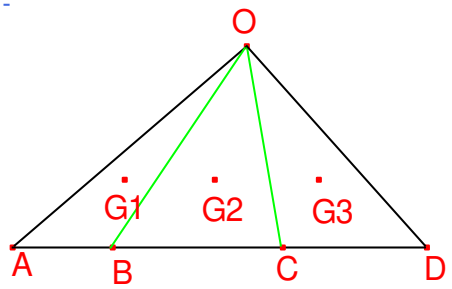
4) نسمي k نسبة التحاكي h .

استنتج من الأسئلة السابقة أن : $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}=k\overrightarrow{JA}$ ثم استنتج أن : $IA^2=IJ\times IK$.

تمرين 5: ☜ رقم 43 ص 331:

A ، B ، C ، D أربع نقط متمايزة من مستقيم (Δ) و O نقطة لا تنتمي إلى (Δ).

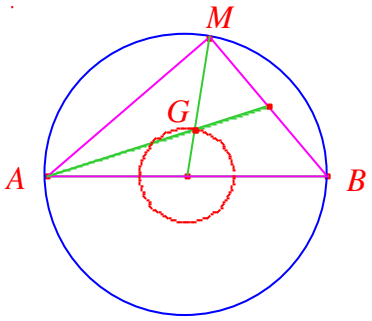
نسمي G_1 ، G_2 ، G_3 مراكز ثقل المثلثات OAB ، OBC ، OCD على الترتيب .



برهن أن النقط G_1 ، G_2 و G_3 على استقامة واحدة .

تمرين 6: ☜ رقم 56 ص 334

(C) دائرة ثابتة قطرها $[AB]$. M نقطة متغيرة من الدائرة (C) حيث ($M\neq A$ و $M\neq B$) .



لكل نقطة M نعين G مركز ثقل المثلث ABM .

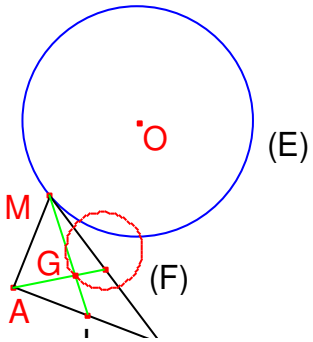
ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتغير النقطة M على الدائرة (C) ما عدا A و B ؟

تمرين 7:

(E) هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها α .

A و B نقطتان خارج هذه الدائرة. M هي نقطة متحركة على الدائرة (E).نسمي G مركز ثقل المثلث ABM .

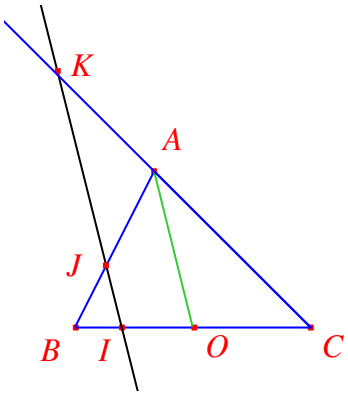
عيّن المجموعة (F) للنقط G .



تمرين 8: ☜ رقم61 ص 335:

ABC مثلث O منتصف القطعة $[BC]$ ، I نقطة كيفية من القطعة $[BO]$.

المستقيم الموازي لـ (OA) والمار بالنقطة I يقطع المستقيم (AB) في J ويقطع المستقيم (AC) في K .



نسمي h_1 التحاكي الذي مركزه B ونسبته k_1 حيث : $h_1(O)=I$ ، و h_2 التحاكي الذي مركزه C ونسبته k_2 حيث : $h_2(O)=I$.

1) عين $h_1(A)$ و $h_2(A)$.

2) بين أن : $\overrightarrow{BI}=k_1\overrightarrow{BO}$ و $\overrightarrow{CI}=k_2\overrightarrow{CO}$. استنتج أن : $k_1+k_2=2$.

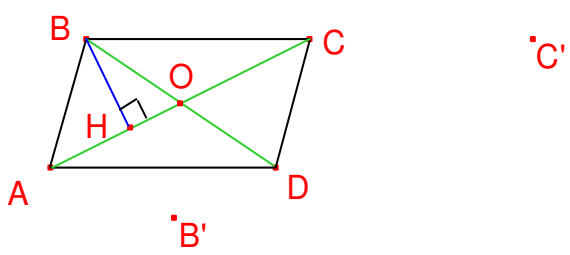
3) برهن أن : $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{OA}$.

تمرين 9:

$ABCD$ متوازي أضلاع.نعتبر النقط التالية:

A' نظيرة B بالنسبة إلى A ، B' نظيرة B بالنسبة إلى (AC) و C' نظيرة B بالنسبة إلى C .

بين أن النقط A' ، B' ، C' و D في استقامية.



تمرين 10: ☜ رقم 60 ص 334

ABC مثلث . M منتصف القطعة $[BC]$.

نرسم خارج المثلث ABC المثلثين BAB' و CAC' قائمان في A ومتساويان الساقين (أنظر الشكل) .



نضع h التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2 .

1) عين صورة M بواسطة h .

2) نسمي A' صورة A بواسطة h، برهن أنه يوجد دوران r يحول C إلى C' و A' إلى B' .

استنتج مستعملا خواص h و r .



حل التمرين 1:

1) $BAC = 45^0$ و $EBF = 45^0$.

2) بما أن الزاويتين BAC و EBF متقايستان و متبادلتان داخليا فإن المستقيمين (AC) و (BF) متوازيان

المثلثان IFB وIAC متشابهان .إذن التحاكي h الذي مركز ه I و يحول A إلى B يحول كذلك C إلى F ومنه $h(C) = F$

3) حسب مبرهنة طالس لدينا: $\frac{IB}{IA} = \frac{IF}{IC} = \frac{BF}{AC} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{IF}$ و $\overrightarrow{IC}$ لهما نفس الاتجاه فإن $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IC}$

4) المثلثان IFG وICD متشابهان .إذن التحاكي h الذي مركز ه I و يحول C إلى F يحول كذلك D إلى G ومنه $h(D) = G$ و بالتالي $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ID}$ ، إذن النقط D ، G ، I في استقامية .

حل التمرين 2:

1) في المثلث BED لدينا: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ (مستقيم المنتصفين)

في المثلث BEG لدينا: $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ (مستقيم المنتصفين) . إذن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

2) r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- لدينا: $r(B) = D$ و $r(E) = G$ ومنه صورة القطعة $[BE]$ بالدوران r هي القطعة $[DG]$.
- حسب السؤال السابق الدوران يحافظ على المسافات إذن $BE = DG$ و $(BE) \perp (DG)$ (الزاوية بين المستقيمين هي زاوية الدوران)

ومنه $(MN) \perp (DG)$ لأن $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{NP}$.إذن: $(MN) \perp (NP)$

من $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ $(MN) \perp (NP)$ $MNPQ$

حل التمرين 3:

لدينا : $\overrightarrow{JC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{JD}$ و $\overrightarrow{JB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{JE}$

ومنه C صورة D بالتحاكي الذي مركزه J ونسبته $\frac{1}{4}$

و B صورة E بنفس التحاكي.

نستنتج أن $[BC]$ هي صورة $[DE]$ بهذا التحاكي ومنه المنتصف F للقطعة $[BC]$

هي صورة المنتصف G للقطعة $[DE]$

أي $\overrightarrow{JF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{JG}$ أي أن النقط J ، G و F على استقامة واحدة.

حل التمرين 4:

1) صورة (AB) بالتحاكي h هي المستقيم الذي يشمل صورة B بالتحاكي h و يوازي (AB) أي المستقيم الذي يشمل D

و يوازي (AB) أي المستقيم (DC).

2) لدينا: $\frac{IK}{IA}=\frac{ID}{IB}=k$ حيث k نسبة التحاكي h .

ومنه $\overrightarrow{IK}=k\overrightarrow{IA}$ أي $h(A)=K$

3) صورة المستقيم (BC) بالتحاكي h هي المستقيم الذي يوازي (BC) ويشمل صورة B بالتحاكي h أي المستقيم الذي

يوازي (BC) ويشمل D .إذن صورة المستقيم (BC) هي المستقيم (AD).

بما أن $h(B)=D$ و $h((BC))=(AD)$ فإن $h(C)=A$

حل التمرين 5:

لتكن E_1 ، E_2 و E_3 منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب

لدينا: $\overrightarrow{OG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OE_1}$ و $\overrightarrow{OG_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OE_2}$ و $\overrightarrow{OG_3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OE_3}$

أي النقط G_1 ، G_2 و G_3 هي صور النقط E_1 ، E_2 و E_3 بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $\frac{2}{}$

مة واحدة .

حل التمرين 6:

لتكن O منتصف $[AB]$.لدينا: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$.

ومنه $OG=\frac{1}{3}OM$ أي أن النقطة G تتغير على الدائرة (C')التي مركزها O ونصف قطرها $\frac{1}{3}OM$

(الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بالتحاكي الذي مركزه O و ننسبته $\frac{1}{3}$)

حل التمرين 7:

نسمي J منتصف $[AB]$.

لدينا : $\overrightarrow{JG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{JM}$ إذن M هي صورة G بالتحاكي الذي مركزه J و نسبته $\frac{1}{3}$

ومنه المجموعة (F)للنقط G هي صور (E) بهذا التحاكي.

(F)هي الدائرة التي نصف قطرها $\frac{\alpha}{3}$ ومركزها صورة O بهذا التحاكي.

حل التمرين 8:

1)لدينا: $\frac{BI}{BO}=\frac{BJ}{BA}=k_1$ ومنه $\overrightarrow{BI}=k_1\overrightarrow{BO}$ و $\overrightarrow{BJ}=k_1\overrightarrow{BA}$ ومنه $h_1(A)=J$

التحاكي h_2 الذي مركزه C و يحول O إلى I يحول كذلك A إلى K (المثلثان CAO و CKI متحاكيان) إذن $h_2(A)=K$

2) $h_1(O)=I$ و $h_1(B)=B$ ومنه $\overrightarrow{BI}=k_1\overrightarrow{BO}$

$h_2(O)=I$ و $h_2(C)=C$ ومنه $\overrightarrow{CI}=k_2\overrightarrow{CO}$

$$k_1+k_2=\frac{BI}{BO}+\frac{CI}{CO}=\frac{BI+CI}{BO}=\frac{BC}{BO}=2$$

3) $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OA}=(k_1+k_2)\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OA}$

حل التمرين 9:

لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على $[AC]$ و O مركز متوازي الأضلاع

النقط A ، H ، O C

بما أن B' نظيرة B بالنسبة إلى (AC) فإن $\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{BH}$

بما أن O مركز متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

بما أن C' نظيرة B بالنسبة إلى C فإن $\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BC}$

إذن التحاكي الذي مركزه B ونسبته 2 يحول النقط A ، H ، O و C إلى النقط A' ، B' ، D و C' على الترتيب

و بما أن النقط A ، H ، O و C على استقامة واحدة فإن النقط A' ، B' ، C' و D على استقامة واحدة.

حل التمرين 10:

1) لدينا: $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$ ومنه $h(M)=C$

2) $h(A)=A'$ معناه $\overrightarrow{BA'}=2\overrightarrow{BA}$

لدينا: $AA'=AB'$ و $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB'}\right)=\frac{\pi}{2}$

و $AC=AC'$ و $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{\pi}{2}$. إذن يوجد دوران r مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول C إلى C' و A' إلى B'

الاستنتاج: لدينا: $h(M)=C$ و $h(A)=A'$ ومنه $h((AM))=(A'C)$ و $(A'C)//(AM)$

و لدينا: $r(C)=C'$ و $r(A')=B'$ ومنه $r((A'C))=(B'C')$ و $(A'C)\perp(B'C')$

من $(A'C)//(AM)$ و $(A'C)\perp(B'C')$ نستنتج أن $(AM)\perp(B'C')$.