الأستاذ بلعباس محمد

ملخص الجـــداء السـلمي لشعاعين 2ع ت

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$ و المعرف كما يلي:

1) اذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ او $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}.\vec{v}=0$

2) اذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فان $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})}$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

4) اذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فان العبارة التحليلية للجداء السلمي هي $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'}$

شرط تعامد مستقيمين $(D);(\Delta)$ مستقيمين حيث $\overrightarrow{n_D}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{n_\Delta}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ هما على الترتيب شعاعي الناظمين لهما

القول ان $(\Delta)\perp(D)$ يكافئ ان : $\begin{cases}(D):ax+by+c=0;\\(\Delta):\alpha x+\beta y+k=0\end{cases}$

$\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_D}=0$ او شعاعي توجيههما متعامدان او جداء مليهما يساوي 1-

---

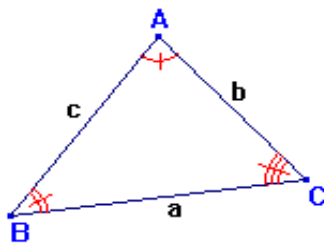
مبرهنة (المسافة بين نقطة و مستقيم):

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي: $\boxed{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

العلاقات المترية في مثلث

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:



$$\begin{cases}c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\\b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\end{cases};$$

مساحة المثلث $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

قانون الجيوب $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2S}$

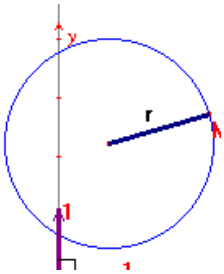
مبرهنة المتوسط: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

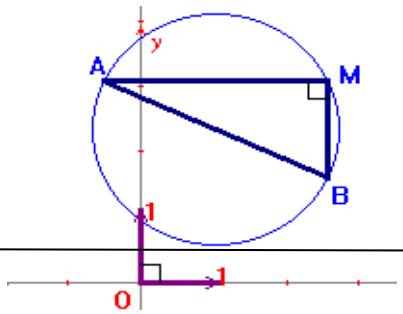
مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و وطول نصف قطرها r $(r>0)$ هي :

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$



معادلة دائرة علم نقطتين متناظرتين قطريا منها

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$



دساتير الجمع

$$\begin{cases}\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a\\ \sin 2a=2\sin a\cos a\\ \cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a\\ \boxed{\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}};;\boxed{\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}}\end{cases}$$

تمارين محلولة

التمرين 01 :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط $B(0,\sqrt{3})$ ، $C(0,-\sqrt{3})$ ، $M(x,y)$

1. **بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ هي الدائرة (C) يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.**
2. **اكتب معادلة المستقيمين $(T_1),(T_2)$ مماسي الدائرة (C) في النقطتين B,C على الترتيب.**
3. **بين أن (T_1) يوازي (T_2).**
4. **ارسم الدائرة (C) والمستقيمين $(T_1),(T_2)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.**

تصحيح مفصل:

1) تبيين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ هي الدائرة (C) يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها :

لنا $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x_B-x_M\\y_B-y_M\end{pmatrix}\to\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\\sqrt{3}-y\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}x_C-x_M\\y_C-y_M\end{pmatrix}\to\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}-x\\-\sqrt{3}-y\end{pmatrix}$

إذن $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(-x)(-x)+\left(\sqrt{3}-y\right)\left(-\sqrt{3}-y\right)=x^2+y^2-3$

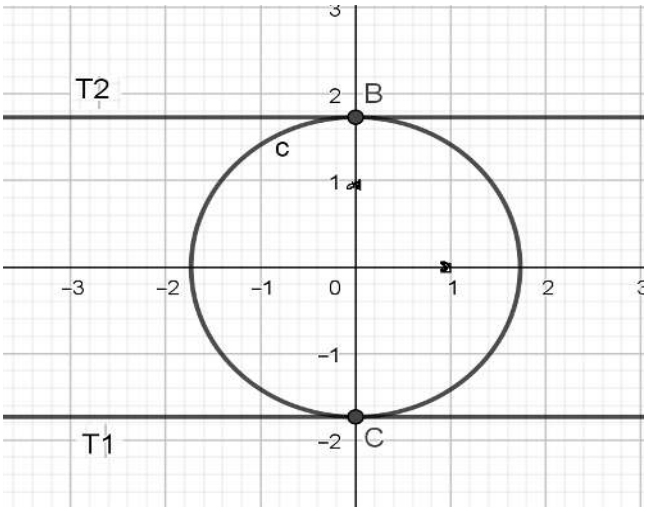
ومنه $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ معناه $(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$ أي $x^2+y^2-3=0$ وهي تمثل المعادلة الديكارتية للدائرة ذات المركز $O(0;0)$ ونصف القطر $r=\sqrt{3}$ وقطرها $[BC]$.

2) كتابة معادلة للمستقيمين $(T_1),(T_2)$ مماسي الدائرة (C) في النقطتين B,C على الترتيب :

- **من خصائص المماس أن حامله يكون عموديا على حامل القطر اذن (T_1) مماس للدائرة (C) في النقطتين C فهذا يعني أنه إذا كانت $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستقيم (T_1) فان حاملا الشعاعين $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان أي $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BC}=0$ لكن $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BC}=0$ معناه $0\times x+\left(-2\sqrt{3}\right)\left(y+\sqrt{3}\right)=0$ أي $-2\sqrt{3}y-6=0$ أي $y=-\sqrt{3}$ وهي معادلة (T_1)**
- **وبنفس الطريقة (T_2) مماس للدائرة (C) في النقطة B فهذا يعني أنه إذا كانت $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستقيم (T_2) فان حاملا الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان أي $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=0$ لكن $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=0$ معناه $0\times x+\left(-2\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)=0$ أي $-2\sqrt{3}y+6=0$ أي $y=\sqrt{3}$ وهي معادلة (T_2).**

3) تبيين أن المستقيمين $(T_1),(T_2)$ متوازيين: نلاحظ أن معادلتي المستقيمين $(T_1),(T_2)$ من الشكل $y=k$ حيث k عدد حقيقي ثابت ونعلم أن هذا النوع من المستقيمات موازي لحامل محور الترتيب اذن بما أنهما يوازيان معا حامل محور التراتيب فهما متوازيان.

4) رسم الدائرة (C) والمستقيمين $(T_1),(T_2)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:



التمرين 02 :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

ليكن (D) **مستقيم معادلته:** $3x+3y-5=0$

1. **اكتب معادلة المستقيم** (Δ) **الذي يشمل** $A(-1;2)$ **و يعامد** (D).
2. **عين احداثيي النقطة** B **نقطة تقاطع المستقيمين** (D) **و** (Δ).
3. **عين مجموعة النقط** $M(x,y)$ **من المستوي التي تحقق:** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=AB$

تصحيح مفصل:

1) **المستقيم** (Δ) **الذي يشمل** $A(-1;2)$ **و يعامد** (D) **معناه شعاع توجيه المستقيم** (D) **حامله يعامد المستقيم** (Δ)**، حسب تعريف شعاع توجيه مستقيم نجد** $\vec{v}_{(D)}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\rightarrow\vec{v}_{(D)}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$

إذن إذا كانت $M(x,y)$ **نقطة من المستقيم** (Δ) **فإن** $\overrightarrow{AM}\perp\vec{v}_{(D)}$ **أي** $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}_{(D)}=0$ **أي**

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}\vec{v}_{(D)}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=0$ **ومنه** $(x+1)(-3)+(y-2)(3)=0$ **ومنه نجد** $x-y+3=0$

وهي معادلة للمستقيم (Δ) .

2) $B(x_B;y_B)$ **هي نقطة تقاطع المستقيمين** (D) **و** (Δ) **معناه إحداثييها هما حل للجملة :**

$\begin{cases}3x+3y-5=0\\x-y+3=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}3x_B+3y_B-5=0\\x_B-y_B+3=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}3(y_B-3)+3y_B-5=0\\x_B=y_B-3\end{cases}$ **ومنه**

$\begin{cases}y_B=\dfrac{7}{3}\\x_B=\dfrac{7}{3}-3=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$ **أي** $B\left(\frac{7}{3};\frac{-2}{3}\right)$.

3) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}+1\right)^2+\left(\frac{-2}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{164}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}\times41}=\frac{2}{3}\sqrt{41}$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\end{pmatrix}$ **و** $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}\frac{7}{3}-x\\\frac{-2}{3}-y\end{pmatrix}$ ،

ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=AB$ معناه $\left(\frac{7}{3}-x\right)(-1-x)+\left(\frac{-2}{3}-y\right)(2-y)=\frac{2}{3}\sqrt{41}$ ومنه

$$-\frac{7}{3}-\frac{7}{3}x+x+x^2-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}y-2y+y^2=\frac{2}{3}\sqrt{41}$$ ومنه

$$\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+\left(y^2-\frac{4}{3}y\right)-\frac{11}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{41}$$ ومنه

$$\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)-\frac{11}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{41}$$ ومنه

$$\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)+\left(\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)-\frac{11}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{41}$$ ومنه

$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{41}{9}=\frac{2}{3}\sqrt{41}$ ومنه نجد $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6\sqrt{41}+41}{9}$ وهي

معادلة لدائرة (C) ذات المركز $\omega\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ ونصف القطر $r=\frac{\sqrt{6\sqrt{41}+41}}{3}$.

التمرين 03 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن (C) مجموعة نقط $M(x,y)$ معرفة كمايلي: $\frac{1}{2}(x^2+y^2)-3x+y+\frac{5}{2}=0$

1. ا) بين أن (C) هي دائرة يطلب تحديد احداثيي مركزها Ω و نصف قطرها.

ب) اثبت أن النقطة $A(1;-2)$ من (C) .

2. اكتب معادلة المستقيم (T) مماس لـ (C) عند النقطة A .
3. لتكن النقطة B نظيرة النقطة Ω بالنسبة للنقطة A

أ) عين احداثيي النقطة B

ب) اكتب معادلة الدائرة (C') مركزها النقطة B والمماسة لـ (C) عند النقطة A

4. ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) معادلته: $6x+2y-5=0$ و الدائرة (C)

تصحيح مفصل:

1) أ) لنا $\frac{1}{2}(x^2+y^2)-3x+y+\frac{5}{2}=0$ ومنه بضرب الطرفين في **2** نجد $x^2+y^2-6x+2y+5=0$

ومنه $(x^2-6x+9-9)+(y^2+2y+1-1)+5=0$ ومنه $(x-3)^2+(y+1)^2=5=\left(\sqrt{5}\right)^2$ إذن

هي دائرة مركزها $\Omega(3;-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{5}$.

ب) لنا $(x_A-3)^2+(y_A+1)^2=(1-3)^2+(-2+1)^2=4+1=5$ ومنه $A(1;-2)$ من (C).

2) المستقيم (T) مماس لـ (C) عند النقطة A معناه: من أجل كل نقطة $M(x;y)$ منه فإن $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{\Omega A}$ أي

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A}=0$ ومنه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}.\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=0$ ومنه $(-2)(x-1)+(-1)(y+2)=0$ ومنه نجد

$2x+y=0$ وهي معادلة للمستقيم (T) .

3) أ) النقطة B نظيرة النقطة Ω بالنسبة للنقطة A معناه $\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ومنه

$\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-1\\y_B+2\end{pmatrix}=\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ومنه $\left(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{AB}\right)\begin{pmatrix}2+x_B-1\\1+y_B+2\end{pmatrix}=\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ومنه

$\left(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{AB}\right)\begin{pmatrix}x_B+1\\y_B+3\end{pmatrix}=\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ومنه بالمطابقة مجد $\begin{cases}x_B+1=0\\y_B+3=0\end{cases}$ أي $B(-1;-3)$.

ب) الدائرة (C') مركزها النقطة B والمماسة لـ (C) عند النقطة A نصف قطرها هو $r'=B\Omega=r=\sqrt{5}$ لأن B نظيرة النقطة Ω بالنسبة للنقطة A

ومنه فإ معادلة (C') هي $(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$ أي $(x+1)^2+(y+3)^2=5$.

4) لدراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) الذي معادلته: $6x+2y-5=0$ و الدائرة (C) نحسب بعد مركز الدائرة (C) عن هذا المستقيم ومنه

$d(\Omega;(D))=\dfrac{|6x_\Omega+2y_\Omega-5|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\dfrac{|18-2-5|}{\sqrt{36+4}}=\dfrac{|11|}{\sqrt{40}}=\dfrac{11}{\sqrt{40}}\simeq 1,74\prec\sqrt{5}$ إذن بعد مركز الدائرة (C) عن هذا المستقيم أقل من نصف قطرها ومنه فإن هذا المستقيم يقطع الدائرة (C) في نقطتين.

التمرين 04 (واجب منزلي):

لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي و I منتصف $[AB]$ حيث $AB=5$

1. نعتبر النقطة C حيث $3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$
   أ) اكتب $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$
   ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$
   * بين أن $C\in(E)$
   * عين ثم أنشئ المجموعة (E) .
2. (F) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2+MB^2=7$
   - عين ثم أنشئ المجموعة (F) .
3. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$
   - عين ثم أنشئ المجموعة (Γ) .

تصحيح مفصل:

1) أ) لنا $3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ ومنه حسب علاقة شال نجد $3\overrightarrow{CA}+2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ ومنه

$5\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ومنه $2\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

ب) (E) هي مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$:

* تكون $C\in(E)$ اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=10$:

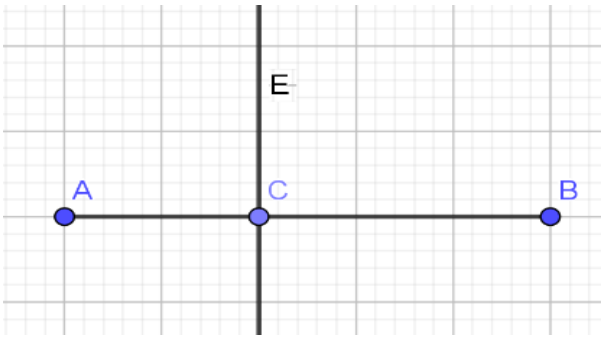
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=\dfrac{2}{5}AB^2=\dfrac{2}{5}5^2=\dfrac{50}{5}=10$ أي $C\in(E)$.

* تعيين وإنشاء المجموعة (E) :

لنا $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$ ومنه حسب شال نجد $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\right).\left(\overrightarrow{AB}\right)=10$ ومنه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=10$

$10+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=10$ أي $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$ إذن المجموعة (E) هي نقاط المستقيم الذي يعامد المستقيم (AB) في النقطة C .

إنشاء المجموعة (E) :



2) (F) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2+MB^2=7$:

تعيين وإنشاء المجموعة (F) :

لنا $MA^2+MB^2=7$ ومنه بإدخال النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ بحسب علاقة شال نجد :

$MA^2+MB^2=7$ تكافيء $\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=7$ ومنه $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=7$ ومنه

$MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}=7$ ومنه

$2MI^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=7$ وحيث ان $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $IA=IB=\frac{AB}{2}=\frac{5}{2}$ لأن

I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ إذن نجد $2MI^2+\frac{50}{4}=7$ أي $MI^2=\frac{-22}{8}\prec 0$ وهنا مستحيل مربع عدد الذي هو دوما موجب يساوي عدد سالب تماما اذن المجموعة (F) هي مجموعة خالية.

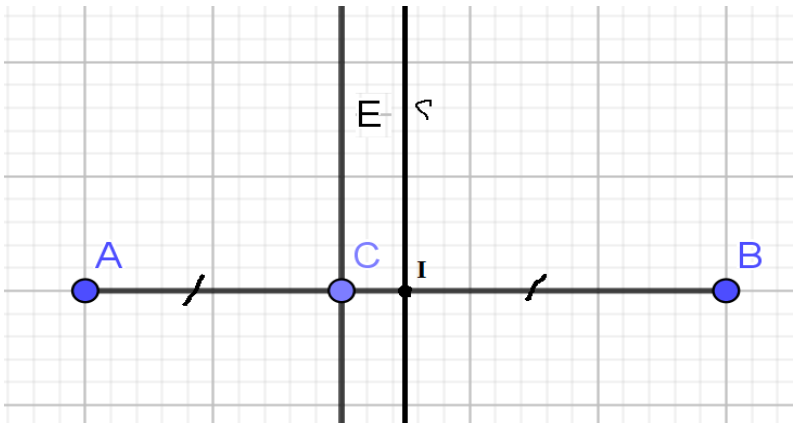
3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$:

تعيين وإنشاء المجموعة (Γ) :

لنا $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$ ومنه $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{MA}=0$ ومنه $\left(2\overrightarrow{MI}\right).\overrightarrow{MA}=0$ أي

$2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MA}\right)=0$ أي $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MA}=0$ ومنه فإن مجموعة النقط (Γ) هي محور القطعة المستقيمة $[AI]$.

الإنشاء:



التمرين 05:

لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث $AB=6$

و (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MB=2MA$

1. برهن انه من اجل كل نقطة M من المستوي لدينا

$MB=2MA$ تكافئ $\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right).\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)=0$

2. لتكن I و J نقطتان من المستوي حيث $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $-2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$

أ) أنشئ النقطتان I و J

ب) اثبت انه من اجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right).\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)=3\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{MJ}\right)$

3. عين ثم أنشئ المجموعة (E) .

تصحيح مفصل:

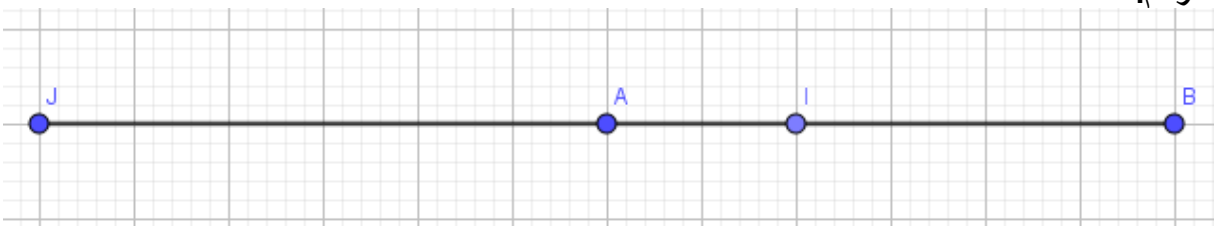
1) لدينا $MB=2MA$ ومنه بتربيع الطرفين نجد $MB^2=4MA^2$ وهي نفسها $\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MA}\right)^2$ ومنه $\left(\overrightarrow{MB}\right)^2-4\left(\overrightarrow{MA}\right)^2=0$ ومنه $\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)=0$.

2) أ) إنشاء النقطتين I و J:

لدينا $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ومنه باستعمال علاقة شال نجد $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ومنه نجد $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$ أي $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$.

أيضا $-2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ تكافيء $-2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ومنه $\boxed{\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AB}}$.

الرسم:



ب) اثبات انه من اجل كل نقطة M من المستوي فان: $\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)=3\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{MJ}\right)$:

باستعمل علاقة شال نجد :

$$\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{IA}\right)$$
$$=\left(3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JA}\right)=3\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{MJ}\right)$$

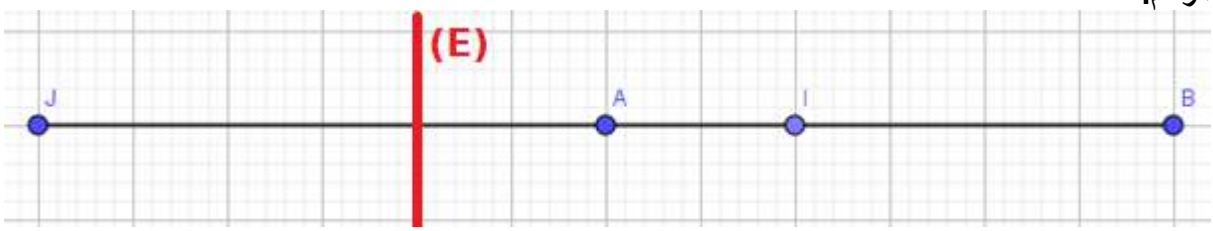
ذلك لان $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ من المعطيات.

3) تعيين وانشاء المجموعة (E) :

وجدنا سابقا ان $\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)=0$ وأيضا $\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)=3\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{MJ}\right)$

ومنه نجد $3\overrightarrow{MI}.\left(-\overrightarrow{MJ}\right)=0$ ومنه $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$ أي ان مجموعة النقط M هي نقط المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$.

الرسم:



مجموعة الرياضيات بالجزائر