تمرين(01)

(v_n) متتالية حسابية حيث : $v_4=5$ و $v_8=7$.

1) عين أساس المتتالية وحدها الأول v_0.

2) أحسب v_n بدلالة n . ثم عين العدد الطبيعي n حيث : $v_n=50$.

3) أحسب المجموع : $S=v_6+v_7+...+v_{94}$.

حل التمرين (01)

1) تعيين أساس المتتالية وحدها الأول v_0:

لدينا $v_n=v_p+(n-p)r$ من أجل $n=8$, $p=4$ لدينا $v_8=v_4+(8-4)r$ ومنه $7=5+4r$ أي $4r=2$ وبالتالي $r=\frac{1}{2}$

- حساب v_0 : من أجل $n=4$, $p=0$ نجد : $v_4=v_0+(4-0)r$ ومنه $5=v_0+4\times\frac{1}{2}$ أي $5=v_0+2$ وبالتالي $v_0=3$

2) حساب v_n بدلالة n :

لدينا $v_n=v_p+(n-p)r$ من أجل $p=0$ لدينا : $v_n=v_0+nr$ ومنه $v_n=3+\frac{1}{2}n$

- تعيين العدد الطبيعي n حيث $v_n=50$: $v_n=50$ معناه $3+\frac{1}{2}n=50$ ومنه $\frac{1}{2}n=47$ أي $n=47\times2$ وبالتالي $n=94$

3) حساب المجموع : $S=v_6+v_7+...+v_{94}$: $S=\frac{94-6+1}{2}(v_6+v_{94})$.

ولدينا $v_6=3+\frac{1}{2}\times6=3+3=6$, $v_{94}=50$ ومنه $S=\frac{89}{2}(6+50)=2492$

تمرين (02)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0=2$ وبالعلاقة : $u_2+u_5=25$.

1) عين أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11 .

4) أحسب المجموع : $S=u_1+u_2+...+u_{10}$.

حل التمرين (02)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0=2$ وبالعلاقة : $u_2+u_5=25$.

1) تعيين أساس المتتالية الحسابية (u_n) :

لدينا $u_n=u_p+(n-p)r$ من أجل $n=2$, $p=0$ نجد : $u_2=u_0+(2-0)r$ ومنه $u_2=2+2r.....(1)$

من أجل $n=5$, $p=0$ نجد : $u_5=u_0+(5-0)r$ ومنه $u_5=2+5r.....(2)$

بجمع (1) و (2) نجد : $u_2+u_5=2+2r+2+5r$ ومنه $25=4+7r$ أي $7r=25-4$ ومنه $7r=21$ وبالتالي $r=3$

2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا $u_n=u_p+(n-p)r$ من أجل $p=0$ نجد $u_n=u_0+(n-0)r$ ومنه $u_n=2+3n$

3) حساب قيمة الحد الذي رتبته 11 :

لدينا: بما أن الحد الأول هو u_0 فإن الحد الذي رتبته 11 هو u_{10} ومنه $u_{10}=2+3(10)=2+30=32$ وبالتالي $u_{10}=32$

4) حساب المجموع : $S=u_1+u_2+...+u_{10}$:

ولدينا $u_{10}=32$ و $u_1=2+3=5$ ومنه $S_n=\frac{10}{2}(5+32)$ وبالتالي $S_n=185$ ولدينا $S_n=\frac{10-1+1}{2}(u_1+u_{10})$

تمرين (03)

$(u_n)_{n\in}$ متتالية حسابية حيث : $u_0+u_3=18$ و $u_2+u_5=34$

1) أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية .

2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

4) أوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n=27$.

حل التمرين (03)

(u_n) متتالية حسابية حيث : $u_0+u_3=18$ و $u_2+u_5=34$

1) حساب الأساس و الحد الأول u_0 : لدينا $u_n=u_p+(n-p)r$

من أجل $n=3$, $p=0$ نجد : $u_3=u_0+(3-0)r$ ومنه $u_3=u_0+3r$ بإضافة u_0 للطرفين نجد $u_0+u_3=2u_0+3r$ ومنه $18=2u_0+3r.....(1)$

و من أجل $n=2$, $p=0$ نجد: $u_2=u_0+(2-0)r$ ومنه $u_2=u_0+2r.....(2)$

و من أجل $n=5$, $p=0$ نجد: $u_5=u_0+(5-0)r$ ومنه $u_5=u_0+5r.....(3)$

بجمع (2) و (3) طرفا لطرف نجد: $u_2+u_5=2u_0+7r$ ومنه $34=2u_0+7r.....(4)$

بضرب (1) في -1 والجمع مع (4) نجد: $34-18=2u_0-2u_0+7r-3r$ ومنه $16=4r$ وبالتالي $r=4$ بتعويض قيمة r في (1)

نجد: $18=2u_0+3\times4$ ومنه $18=2u_0+12$ ومنه $2u_0=18-12$ أي $2u_0=6$ وبالتالي $u_0=3$

2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا $u_n=u_p+(n-p)r$ من أجل $p=0$ نجد $u_n=u_0+(n-0)r$ ومنه $u_n=3+4n$

3) حساب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$: $S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{n-1+1}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}(10+4n)=5n+2n^2$

1) ايجاد العدد الطبيعي n بحيث $S_n=27$: لدينا $S_n=27$ معناه $5n+2n^2=27$ ومنه $5n+2n^2-27=0$

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=241$ حيث: $a=2$, $b=5$, $c=-27$ ومنه يوجد حلين هما: $n_1=\frac{-5-\sqrt{241}}{4}\notin IN$ ،

$n_2=\frac{-5+\sqrt{241}}{4}\notin IN$ (مرفوض) ومنه لا توجد قيم لـ n بحيث $S_n=27$.

التمرين (04)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0=6$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1}=\alpha u_n+1$ و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب - أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n

ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

جـ- عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة .

نضع: $\alpha=\frac{3}{2}$.

أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+.....+u_n$.

حل التمرين (04)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0=6$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1}=\alpha u_n+1$ و (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

أ- تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\alpha\left(u_n+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\alpha v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هنسية أساسها α و حدها الأول v_0 حيث $v_0=u_0+\frac{1}{\alpha-1}=6+\frac{1}{\alpha-1}$

ب - كتابة بدلالة n و α، عبارة v_n : نعلم أن $v_n=v_0\times q^n$ وبما أن $q=\alpha$ و $v_0=6+\frac{1}{\alpha-1}$ بالتعويض نجد $v_n=\left(6+\frac{1}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n$

استنتاج بدلالة n و α، عبارة u_n: لدينا $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$ وعليه $u_n=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ إذن $u_n=\left(6+\frac{1}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n-\frac{1}{\alpha-1}$

جـ- تعيين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة .

(u_n) متقاربة لما $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n=0$ وهذا من أجل $0<\alpha<1$.

نضع: $\alpha=\frac{3}{2}$ نجد $v_0=6+\frac{1}{\frac{3}{2}-1}=6+2=8$

حساب بدلالة n، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+.....+u_n$.

$$S_n=v_0+v_1+.....+v_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=8\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)}\right)=-16\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$$

حساب T_n : لدينا $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$ أي $v_n=u_n+\frac{1}{\frac{3}{2}-1}$ أي $v_n=u_n+2$ وعليه $u_n=v_n-2$.

ومنه $u_0=v_0-2$ و $u_1=v_1-2$ و $u_2=v_2-2$ وهكذا .....

$$T_n=(v_0-2)+(v_1-2)+(v_1-2)+...+(v_n-2)=(v_0+v_1+v_2+...+v_n)+(-2-2-2-...-2)$$

بالتعويض في T_n نجد

$$=S_n+(-2)(n+1)=S_n=-16\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)-2(n+1)$$

التمرين (05)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN كما يلي : $u_0=1$ ، $u_1=2$ و $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ والمتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 ، v_1 .

2) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

3) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_{n-1}$.

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_n-u_0$. ثم استنتج أن: $u_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+1$.

5) أحسب $\lim(u_n)$.

حل التمرين (05)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN كما يلي : $u_0=1$ ، $u_1=2$ و $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ والمتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 ، v_1 .

$u_2=\frac{3}{2}u_1-\frac{1}{2}u_0=\frac{3}{2}(2)-\frac{1}{2}(1)=\frac{5}{2}$ لأن $v_1=u_2-u_1=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$ و $v_0=u_1-u_0=2-1=1$

2) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$:

$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n-u_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{2}v_n$ وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

3) تعبير عن v_n بدلالة n : نعلم أن $v_n=v_0\times q^n$ وبما أن $q=\frac{1}{2}$ و $v_0=1$ بالتعويض نجد $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

استنتاج المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}$.

$$S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}=v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

4) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_n-u_0$

لدينا $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}$ وبما أن $v_n=u_{n+1}-u_n$ أي $v_0=u_1-u_0$ و $v_1=u_2-u_1$ و $v_2=u_3-u_2$ و...و $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$

بالتعويض في S_n نجد $S_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\ldots+(u_n-u_{n-1})$ بعد الإختزال نجد $S_n=u_n-u_0$.

استنتاج أن: $u_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+1$ ومنه $u_n=S_n+u_0$ وعليه $S_n=u_n-u_0$ لدينا : $u_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+1$.

حساب $\lim(u_n)$: $\lim 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+1=3$ لأن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ($-1<\frac{1}{2}<1$)

التمرين (06)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$.

1) احسب u_1 و u_2 .

2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) و عين حدها الأول v_1 .

ب) عبر عن v_n بدلالة n.

ج) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}-3$.

د) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ما هي نهايتها؟

حل التمرين (06)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$.

1) احسب u_1 و u_2 .

$$u_1=\frac{2}{3}u_0-1=\frac{2}{3}(3)-1=1 \quad \text{و} \quad u_2=\frac{2}{3}u_1-1=\frac{2}{3}(1)-1=\frac{-1}{3}$$

2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$.

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) و عين حدها الأول v_1.

$$v_{n+1}=u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n-1-\frac{2}{3}u_{n-1}+1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}u_{n-1}=\frac{2}{3}(u_n-u_{n-1})=\frac{2}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1=u_1-u_0=1-3=-2$

ب) تعبر عن v_n بدلالة n.

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1=-2$ فإن $v_n=v_1\times q^{n-1}$ وعليه $v_n=-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ج) عبر عن v_n بدلالة u_n :

لدينا $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$ معناه $\frac{2}{3}v_n=u_{n+1}-u_n$ معناه $\frac{2}{3}v_n=\frac{2}{3}u_n-1-u_n$ معناه $\frac{2}{3}v_n=\frac{-1}{3}u_n-1$ معناه $v_n=\frac{-1}{2}u_n-\frac{3}{2}$.

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}-3$.

لدينا $v_n=\frac{-1}{2}u_n-\frac{3}{2}$ معناه $\frac{1}{2}u_n=-v_n-\frac{3}{2}$ معناه $u_n=-2v_n-3$ و بما أن $v_n=-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ أي

$$u_n=-2\left(-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)-3=2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3=2^2\times\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}-3=\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}-3$$

د) تعين اتجاه تغير المتتالية (u_n). ما هي نهايتها؟

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1-1}}-3\right)-\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}-3\right)=\frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1-1}}-\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}=\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\times\frac{2}{3}-\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}=\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)$$

بما أن $\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}>0$ و $\frac{-1}{3}<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}-2v_n-3=\lim_{n\to\infty}-2\left(-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)-3=-3$$ لأن $-1<\frac{2}{3}<1$ أي $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$

التمرين (07)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$

1. أحسب u_1 ، u_2.
2. بين أن (u_n) ليست حسابية.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
- احسب المجموع S حيث $S=v_0+v_1+...+v_{2021}$

حل التمرين (07)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

1. حساب u_1 ، u_2.

لدينا $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$ و من أجل $n = 0$: $u_1 = 1 - \frac{9}{u_0 + 5} = 1 - \frac{9}{1+5} = \frac{-1}{2}$

من أجل $n = 1$: $u_2 = 1 - \frac{9}{u_1 + 5} = 1 - \frac{9}{\frac{-1}{2} + 5} = 1 - \frac{9}{\frac{9}{2}} = 1 - 2 = -1$

2. تبين أن (u_n) ليست حسابية: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ إذن (u_n) ليست حسابية.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} - \frac{1}{u_n + 2} \times \frac{3}{3} = \frac{u_n + 5}{3u_n + 6} - \frac{3}{3u_n + 6} = \frac{u_n + 2}{3u_n + 6} = \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول v_0 حيث $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$.

- تعبير عن v_n بدلالة n : نعلم أن $v_n = v_0 + nr$ وبما أن $r = \frac{1}{3}$ و $v_0 = \frac{1}{3}$ بالتعويض نجد $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n$.

- استنتج u_n بدلالة n.

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ يكافئ $v_n(u_n + 2) = 1$ يكافئ $v_n u_n + 2v_n = 1$ يكافئ $v_n u_n = 1 - 2v_n$ يكافئ $u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n}$ يكافئ

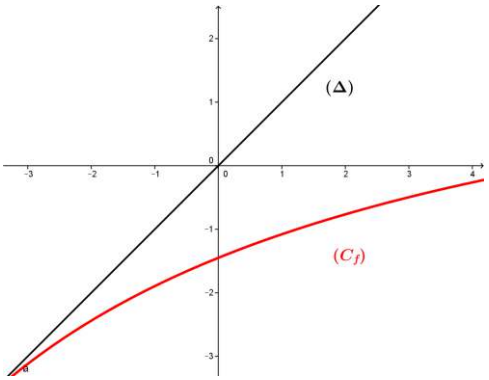
$u_n = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{n}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{n}{3}}$ ومنه $u_n = \frac{1 - 2n}{1 + n}$.

- حساب المجموع S حيث $S = v_0 + v_1 + ... + v_{2021}$:

$$S = v_0 + v_1 + ... + v_{2021} = (2021 - 0 + 1)\left(\frac{v_0 + v_{2021}}{2}\right) = (2022)\left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2021}{3}}{2}\right) = (2022)\left(\frac{2023}{6}\right) = 681751$$

التمرين (08)

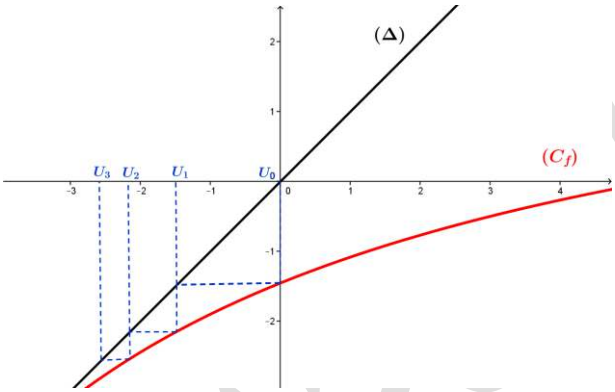
المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



1. تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بين أن من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$
2. (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$
انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\times v_n=1-4v_n$
   - أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$.
   - عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
   - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
   - احسب المجموع S حيث $S=v_0+v_1+...+v_n$

حل التمرين (08)

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



1. التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-4;1]$ و من أجل كل x من المجال $[-4;1]$: $f'(x)=\dfrac{49}{(x+11)^2}$.
$49>0$ و $(x+11)^2>0$ ومنه $f'(x)>0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$
تبين أن من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$:
لدينا $x\in[-4;1]$ معناه $-4\le x\le 1$ و بما أن f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ فإن
$f(-4)\le f(x)\le f(1)$
وبما أن $f(-4)=-4$ و $f(1)=\dfrac{-13}{12}$ و عليه $-4\le f(x)\le\dfrac{-13}{12}\le 1$ و عليه $f(x)\in[-4;1]$.
2. (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$
تمثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$.
تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n): من تمثيل الحدود $u_3<u_2<u_1<u_0$ و عليه نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة.
3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\times v_n=1-4v_n$
$v_n=\dfrac{1}{(u_n+4)}$ يكافئ $v_n(u_n+4)=1$ يكافئ $u_n\times v_n+4v_n=1$ يكافئ $u_n\times v_n=1-4v_n$: إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+4}-\frac{1}{u_n+4}=\frac{1}{\frac{3u_n-16}{u_n+11}+4}-\frac{1}{u_n+4}=\frac{1}{\frac{7u_n+28}{u_n+11}}-\frac{1}{u_n+4}$$

$$=\frac{u_n+11}{7u_n+28}-\frac{1}{u_n+4}=\frac{u_n+11}{7u_n+28}-\frac{1}{u_n+4}\times\frac{7}{7}=\frac{u_n+11-7}{7u_n+28}=\frac{u_n+4}{7u_n+28}=\frac{u_n+4}{7(u_n+4)}=\frac{1}{7}$$

$v_0 = \frac{1}{u_0+4} = \frac{1}{4}$ حيث v_0 وحدها الأول $\frac{1}{7}$ حسابية أساسها (v_n) ومنه

- تعبير عن v_n بدلالة n : نعلم أن $v_n = v_0 + nr$ وبما أن $r = \frac{1}{7}$ و $v_0 = \frac{1}{4}$ بالتعويض نجد $v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}n$.
- استنتج u_n بدلالة n.

$u_n = \frac{-16n}{7+4n}$ و عليه $u_n = \frac{-\frac{4n}{7}}{\frac{7+4n}{28}}$ ومنه $u_n = \frac{1-4\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{7}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{n}{7}}$ يكافئ $u_n = \frac{1-4v_n}{v_n}$ يكافئ لدينا $u_n \times v_n = 1-4v_n$

- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$g(x) = \frac{-16x}{7+4x}$ بـ $[0;+\infty[$ المعرفة على المجال (u_n) الدالة المرفقة بالمتتالية g حيث $u_n = g(n)$ أي لدينا $u_n = \frac{-16n}{7+4n}$

$g'(x) = \frac{-112}{(7+4x)^2}$: من المجال $[0;+\infty[$ و من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ قابلة للاشتقاق على المجال g الدالة

متناقصة تماما. (u_n) إذن المتتالية $[0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال g وعليه الدالة $g'(x) < 0$ ومنه $(7+4x)^2 > 0$ و $-112 < 0$

- حساب المجموع S حيث $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$:

$$S = v_0 + v_1 + ... + v_n = (n-0+1)\left(\frac{v_0+v_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{n}{7}}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{7+2n}{28}\right)$$

تمرين(09)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 واساسها r.

1. احسب حدها الثاني u_2 علما أنّ : $u_1 + u_3 = 16$ و الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3 + u_4 + u_5 = 42$.
2. عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1
3. اكتب الحد العام u_n بدلالة n ثم عيّن n بحيث يكون $u_n = 2012$
4. نضع $v_n = u_{5n+1}$ ، أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

ب. احسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و استنتج حساب : $S_n = u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} ... + u_{5n+1}$.

تمرين(10)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN بحدها أول u_0 و $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

1) عين قيمة u_0 حتى تكون متتالية ثابتة
2) نضع: $u_0 = 2$ مثل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على حامل محور الفواصل. ثم خمن حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \alpha$

أ. عين قيمة α حتي تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية .

ب.عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج. أحسب المجموعين التاليين : $S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ، $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$