مجلة Top Maths

2AS M TM

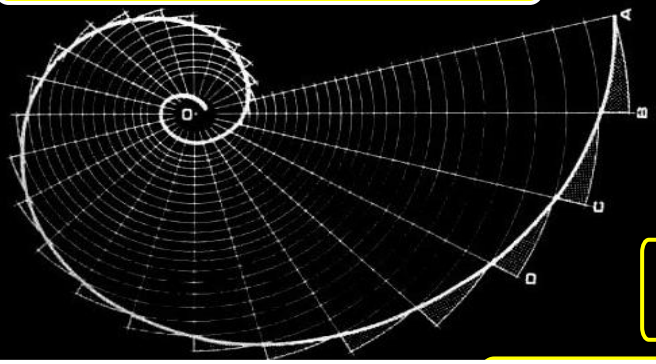
المتتاليات العددية

numerical sequence

المجلة تتضمن

- ✓ ملخص
- ✓ درس مفصل
- ✓ متتاليات حسابية
- ✓ متتاليات هندسية
- ✓ تمارين شاملة مع الحل المفصلة

اعداد الاستاذ بوشناق يوسف



افريل 2020



اقدم لكم اخواني الاساتذة ابنائي الطلبة هذه المجلة و المتمثلة في درس مفصل للمتتاليات العددية مع عشر تمارين شاملة محلولة بالتفصيل

تتضمن المجلة

- ✓ ملخص ص3
- ✓ الدرس المفصل من ص 4 الى ص17
- ✓ ملخص ص3 ص18

» رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ «

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

المتتاليات العددية

المتتاليات العددية

ملخص المتتاليات الحسابية و الهندسية

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n+r$	**تعريف:** نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n\times q$
عبارة الحد العام: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (r عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n=u_p+(n-p)r$ حالة خاصة: من أجل $p=0$ فإن $u_n=u_0+nr$ من أجل $p=1$ فإن $u_n=u_1+(n-1)r$	**عبارة الحد العام:** إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n=u_p\times q^{(n-p)}$ حالة خاصة: من أجل $p=0$ فإن $u_n=u_0\times q^n$ من أجل $p=1$ فإن $u_n=u_1\times q^{(n-1)}$
مجموع حدود متتابعة: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (r عدد حقيقي) فإن: $s=u_0+u_1+.....+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$	**مجموع حدود متتابعة:** إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1) فإن: $s=u_0+u_1+.....+u_n=u_0\times\frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$
الوسط الحسابي: تكون الأعداد الحقيقية $a;b;c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$ يسمى b الوسط الحسابي للعددين $a;c$	**الوسط الهندسي:** تكون الأعداد الحقيقية $a;b;c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a\times c=b^2$ يسمى b الوسط الهندسي للعددين $a;c$
اتجاه تغير متتالية حسابية: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (r عدد حقيقي) $r\succ 0$ المتتالية (u_n) متزايدة تماما $r\prec 0$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما $r=0$ المتتالية (u_n) تابثة	**اتجاه تغير متتالية هندسية:** إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) ندرس اشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$
نهاية متتالية حسابية: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا كان $r=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u_0$ إذا كان $r\succ 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ إذا كان $r\prec 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$	**نهاية متتالية هندسية:** إذا كانت (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_0\times q^n$ إذا كان $-1\le q\le 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ إذا كان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$ إذا كان $q\succ 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ إذا كان $q\prec -1$ فإنه لا يمكن حساب $\lim\limits_{n}q^n$

عموميات حول المتتاليات العددية

1. التعريف

نسمي متتالية عددية كل دالة u ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

الترميز: نرمز إلى صورة n بـ u_n عوضا $u(n)$، وللمتتالية u نرمز لها كذلك بالرمز (u_n).

u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى الحد العام للمتتالية (u_n).

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية (u_n).

أمثلة:

1. المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=\frac{1}{2}$ ، $u_1=\frac{3}{2}$ ، $u_2=\frac{5}{2}$ ، $u_4=\frac{7}{2}$ ، ... (معرّفة بإعطاء جميع حدودها)
2. المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=-3n+5$. (معرّفة بحدّها العام)
3. المتتالية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_0=1$ و $w_{n+1}=2w_n-5$. (معرّفة بعلاقة تراجعية)

ملاحظات:

1) يمكن لمتتالية (u_n) أن تعرف ابتداءً من حد ذا مرتبة n_0 و نرمز لها أحيانا بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$ و يكون حدها الأول هو u_{n_0}

مثال: المتتالية (u_n) التي حدها العام $u_n=\sqrt{n-4}$ معرفة من أجل $n\geq 4$ و نكتب $(u_n)_{n\geq 4}$

2) تعرف متتالية بإعطاء جميع حدودها أو بإعطاء حدّها العام أو بإعطاء حدها الأول علاقة تراجعية.

2. طرق توليد متتالية: (تعيين حدود المتتالية)

❖ **-توليد متتالية بالحد العام $u_n=f(n)$:**

إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما ويمكن حساب أي حد من حدودها

مثال:

المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_n=2n^2+3n+2$

أحسب: u_0; u_1; u_2; u_{10}

ملاحظة:

يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال الدالة f ونكتب: $u_n=f(n)$ حيث f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f: x\mapsto 2x^2+3x+2$

بـتوليد متتالية بعلاقة تراجعية:

❖ **يمكن تعريف متتالية بالتراجع وذلك بإعطاء:**

- ✓ قيمة الحد الأول
- ✓ علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية.

مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=-3u_n+2$

- أ-

الحل:

حساب الحدود : u_1 ; u_2 ; u_3

$u_1 = u_{0+1} = -3u_0 + 2 = -3\times 2 + 2 = -4$ ، $u_2 = u_{1+1} = -3u_1 + 2 = -3\times(-4) + 2 = 14$ ،

$u_3 = u_{2+1} = -3u_2 + 2 = -3\times(14) + 2 = -40$

ملاحظة:

يمكن التعبير عن العلاقة التراجعية باستعمال الدالة f ونكتب: $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f معرفة على المجال D حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D فإن $f(x) \in D$ كما يلي: $f : x \mapsto -3x + 2$ تسمى الدالة f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n)

3. اتجاه تغير متتالية

مبرهنة:

- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ($u_{n+1} - u_n > 0$ على الترتيب).
- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ($u_{n+1} - u_n < 0$ على الترتيب).
- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} = u_n$.

ملاحظة:

تكون المتتالية الرتيبة (رتيبة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كانت إما متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) وإما متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) .

مثال1 :

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 5n + 4$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 4 - (5n+4)$ إذن (u_n) متزايدة تماما .
$= 5n + 5 + 4 - 5n - 4 = 5$

مثال2 :

(w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = -3n + 4$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $w_{n+1} - w_n = -3$ إذن (w_n) متناقصة تماما .

ملاحظة :

في حالة $u_n = f(n)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n ،

- ✓ إذا كنت f متزايدة على $[0;+\infty[$ فإنه تكون (u_n) متزايدة .

✓ إذا كنت f متناقصة على $[0;+\infty[$ فإنه تكون (u_n) متناقصة.

تسمى f الدالة المرفقة

مثال3 :

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \dfrac{2-4n}{n+2}$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-4n-2}{n+3} - \dfrac{2-4n}{n+2} = \dfrac{-4n^2-10n-4+10n+4n^2-6}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{-10}{(n+3)(n+2)}$

إذن (u_n) متناقصة تماما .

مثال4 :

(u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \times \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

لدينا: $n \geq 0$ ومنه $n+1 \geq 1$ ومنه $\dfrac{1}{n+1} \leq 1$ ومنه $1+\dfrac{1}{n+1} \leq 2$ ومنه $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) \leq 1$

أي $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

أي $u_{n+1} \leq u_n$ لأن $u_n > 0$ و بالتالي (u_n) متناقصة تماما

ملاحظة:

(u_n) متتالية حدودها موجبة تماما.إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن (u_n) متناقصة و إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن (u_n) متزايدة.

المتتاليات الحسابية و الهندسية

نشاط

I) تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ $10000\ DA$ الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـ $1300\ DA$ بعد كل سنة نسمي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرمز بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n \geq 1)$.

1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ،

2) عين علاقة بين v_{n+1} و v_n .

حل النشاط :

II) 1) $v_1 = 10000$ ،

$v_2 = v_1 + 1300 = 11300$ ،

$v_3 = v_2 + 1300 = 12600$ ،

$v_4 = v_3 + 1300 = 13900$

2) العلاقة بين v_{n+1} و v_n

$v_{n+1} = v_n + 1200$.

1) المتتاليات الحسابية

1.1.تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$. يسمى r أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظة:

$u_{n+1} = u_n + r$ معناه $u_{n+1} - u_n = r$ (الأساس هو الفرق بين كل حدين متتابعين)

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول u_0 و إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة

مثال :

أتبث أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = 4n + 2$ أنها متتالية حسابية معينا حدها الأول وأساسها

طريقة :

للبرهان على أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية نبرهن على أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ هو عدد ثابت هذا العدد الثابت هو أساس هذه المتتالية الحسابية

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 2 - (4n+2)$$
$$= 4n + 4 + 2 - 4n - 2 = 4$$

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ وأساسها $r = 4$

أمثلة:

- ✓ المتتالية (u_n) حيث أن $u_n = 3n+5$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ أساسها $r = 3$.
- ✓ مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية متتالية حسابية حدها الأول 1 أساسها 2.

1 الحد العام لمتتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r. لدينا: $u_1 = u_0 + r$ ، $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$ ، $u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$
في الحالة العامة لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r.

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ملاحظة:

- ✓ إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة وكل حدودها تساوي الحد الأول u_0
- ✓ إذا كان $r \succ 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة
- ✓ إذا كان $r \prec 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة

ملاحظات:

- ✓ إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- ✓ بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي : $u_n = u_p + (n-p)r$.

تطبيق:

(u_n) متتالية حسابية متزايدة أساسها r و حدها الأول $u_0 = 1$. عين r علما أن $u_1 \times u_2 = 66$.

الحل

$$u_1 \times u_2 = (u_0 + r)(u_0 + 2r) =$$
$$= u_0^2 + 2ru_0 + ru_0 + 2r^2$$
$$= 1 + 2r + r + 2r^2 = 66$$
$$2r^2 + 3r - 65 = 0$$
$$\Delta = 529 = 23^2$$
$$r_1 = -\frac{13}{2} \quad r_2 = 5$$

بما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فان $r = 5$

تمرين

لتكن المتت

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n). استنتج (u_n) بدلالة n.

الحل:

- الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0 = u_1 - u_0 = 3 - 5(0) - 1 - 3 = -1$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n - 1$. إذن: $v_n = -5n - 1$

$v_{n+1} - v_n = -5(n+1) - 1 - (-5n - 1) = -5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n = -5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ و حدها الأول $v_0 = -1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -1 - 5n$. $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5 + 5 - 5n) = \frac{n}{2}(-2 - 5n)$.

$v_0 = u_1 - u_0$ ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، ... ، $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n = S + u_0$

و منه $u_n = \frac{n}{2}(-2 - 5n) + 3$.

1.3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

مبرهنة:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

البرهان:

نضع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$

$$(1) ..... S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + ... + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$$

$$(2) ..... S = u_n + u_{n-1} + ... + u_2 + u_1 + u_0 = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) ..... + (u_0 - 2r) + (u_0 - r) + u_0$$

بجمع (1) و(2) نحصل على: $2S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + ... + (u_0 + u_n)}_{\text{حد } (n+1)}$

و منه $2S = (n+1)(u_0 + u_n)$ أي $S = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

ملاحظات:

- ✓ $u_1 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
- ✓ $u_0 + u_1 ... + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_n)$
- ✓ $u_p + u_{p+1} ... + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$

تطبيق:

أحسب المجموعين $S=1+2+3+4+5+6+.....+1441$ و $M=1+3+5+7+9+....+2020$

حل

$$S=1+2+3+4+5+6+.....+1441$$
$$=(1+1441)\frac{1441-1+1}{2}=1442(\frac{1441}{2})=1038961$$
$$M=1+3+5+7+9+....+2020$$
$$=(1+2020)(\frac{2020-1+1}{2})=2021(\frac{2020}{2})=2041210$$

1.4.الوسط الحسابي

نشاط:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على N بحدها الأول u_0 و أساسها r

ـلتكن : $u_{n-1};u_n;u_{n+1}$ ثلاث حدود متتابعة من المتتالية الحسابية (u_n)

1ـأكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة u_0 و r

2ـأستنتج عبارة $u_{n-1};u_{n+1}$ بدلالة u_0 و r وبين أن $u_{n+1}+u_{n-1}=2u_n$

الحل:

1 ـ عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة u_0 و r : $u_n=u_0+nr$

2 ـ أستنتج عبارة $u_{n-1};u_{n+1}$ بدلالة u_0 و r : $u_{n-1}=u_0+(n-1)r$ و $u_{n+1}=u_0+(n+1)r$

3 ـ $u_{n+1}+u_{n-1}=u_0+(n+1)r+u_0+(n-1)r=2u_n$

مبرهنة :

تكون الأعداد الحقيقية a ،b وc بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $2b=a+c$ العدد b يسمى الوسط الحسابي للعددين a وc .

تطبيق:

أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن: $\begin{cases}a+b+c=15\\a\times b\times c=80\end{cases}$.....(1)

الحل

$$\begin{cases}a+b+c=15\\a\times b\times c=80\end{cases} \text{ ه ن م و } \begin{cases}2b+b=15\\a\times b\times c=80\end{cases}$$

$$\begin{cases}3b=15\\a\times b\times c=80\end{cases} \text{ ه ن م و } \begin{cases}b=15/3=5\\a\times b\times c=80\end{cases}$$

نعوض b في المعادلة الثانية

$\begin{cases} b=5 \\ a\times 5\times c=80 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} b=5 \\ a\times c=16 \end{cases}$

نعوض b في (1)

$\begin{cases} a+c=10 \\ a\times c=16 \end{cases}$

عددين علم مجموعهما و جداؤهما هما حلا للمعادلة $x^2-Sx+P=0$

حيث S هو الجموع $a+c$

و P هو الجداء $a\times c$

$x^2-10x+16=0$

$\Delta=100-64=36=6^2$

ومنه $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{10-6}{2}=2$; $x_2=\dfrac{10+6}{2}=8$

اذن $(a;b;c)=(2;5;8)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=3$

او $(a;b;c)=(8;5;2)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=-3$

نشاط

I) تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ $10000\ DA$ في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر

بـ $10\ \%$. نسمي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n\geq 1)$.

1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5

2) عين علاقة بين u_{n+1} و u_n .

حل

حساب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5

$u_1=10000$ ،

$u_2=u_1+\dfrac{1}{10}u_1=\dfrac{11}{10}u_1=11000$ ،

$u_3=u_2+\dfrac{1}{10}u_2=\dfrac{11}{10}u_2=12100$ ،

$u_4=\dfrac{11}{10}u_3=13310$ ،

$u_5=\dfrac{11}{10}u_4=14641$.،

تعين علاقة بين u_{n+1} و u_n .

$u_{n+1}=\dfrac{11}{10}u_n$

I. المتتاليات الهندسية

1. تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$. يسمى q أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظات:

- إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0 .
- إذا كان $q=0$ فإن حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.

طريقة:

لإثبات أن متتالية عددية (u_n) أنها متتالية هندسية يمكن :

- البرهان على وجود عدد حقيقي غير معدوم q حيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$
- إثبات أن حاصل القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ حيث q عدد ثابت غير معدوم

مثال :

أتبث أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n=3^n$ أنها متتالية هندسية معينا حدها الأول وأساسها

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n.3}{3^n}=3$$

(u_n) متتالية هندسة حدها الأول $u_0=3^0=1$ وأساسها $q=3$

مثال:

المتتالية (u_n) حيث أن $u_n=2^n$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ أساسها $q=2$.

2. الحد العام لمتتالية هندسية

مبرهنة:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

لدينا: $u_1=u_0\times q$ ، $u_2=u_1\times q=u_0\times q^2$ ، $u_3=u_2\times q=u_0\times q^3$

في الحالة العامة لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q .

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) هي: $u_n=u_0\times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظات:

- ✓ إذا كانت المتتالية الهندسية معرفة بالحد u_1 والأساس q فإن عبارة الحد العام هي: $u_n=u_1\times q^{n-1}$.
- ✓ بصفة عامة من أجل كل عددين طبيعيين n و p لدينا : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

3. مجموع

مبرهنة :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q . ليكن المجموع : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n$

- إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n+1)u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n .
- إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

البرهان:

- في الحالة $q = 1$ ،
S هو مجموع $n+1$ مرة الحد u_0 و منه $S = (n+1)u_0$.
- في الحالة $q \neq 1$
ليكن المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n$ ....(1)
ومنه $q \times S = qu_0 + qu_1 + ... + qu_{n-1} + qu_n$ أي $q \times S = u_1 + u_2 ..... + u_n + u_{n+1}$ ....(2)
بطرح (1) من (2) طرفا إلى طرف نجد: $q \times S - S = u_{n+1} - u_0$ أي $S(q-1) = u_0 q^{n+1} - u_0$ أي $S(q-1) = u_0\left(q^{n+1}-1\right)$
و بالتالي $S = u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$.

تطبيق:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي: $u_n = 2^n$.أحسب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$

الجواب:

$$S = 1 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

1.4 . الوسط الهندسي

مبرهنة :

تكون الأعداد الحقيقية a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$b^2 = a \times c$$

العدد b يسمى الوسط الهندسي للعددين a و c .

تطبيق:

أوجد ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن: $\begin{cases} a+b+c = 26 \\ a \times b \times c = 216 \end{cases}$

الحل

$$\begin{cases} a+b+c = 26 \\ b^2 \times b = 216 \end{cases} \text{ ومن ه } \begin{cases} a+b+c = 26 \\ a \times b \times c = 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 26 \\ b = \sqrt[3]{216} = 6 \end{cases} \text{ ومن ه } \begin{cases} a+b+c = 26 \\ b^3 = 216 \end{cases}$$

نعوض b في المعادلة الثانية

$\begin{cases} a+6+c=5 \\ a\times 6\times c=216 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a+b+c=26 \\ b=\sqrt[3]{216}=6 \end{cases}$

نعوض b في (1)

$\begin{cases} a+c=20 \\ a\times c=36 \end{cases}$

عددين علم مجموعهما و جداؤهما هما حلا للمعادلة $x^2-Sx+P=0$

حيث S هو الجموع $a+c$

و P هو الجداء $a\times c$

$$x^2-20x+36=0$$

$$\Delta=400-144=256=16^2$$

ومنه $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{20-16}{2}=2$; $x_2=\dfrac{20+16}{2}=18$

اذن $(a;b;c)=(2;6;18)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=3$

او $(a;b;c)=(18;6;2)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=\dfrac{1}{3}$

نهاية متتالية

ملاحظات:

- ✓ إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
- ✓ إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة).

نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة

مبرهنة:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي . نهاية الدالة f عندما x يؤول إلى $+\infty$ هي نهاية المتتالية (u_n) .

ملاحظة:

النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

نهاية متتالية هندسية

مبرهنة:

q عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 .

- ✓ إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
- ✓ إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.
- ✓ إذا كان $q<-1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة.

نتيجة :

تكون المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساس q متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1<q\leq 1$.

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

مبرهنة1:

(u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n\leq u_n\leq w_n$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

مبرهنة2:

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\geq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

مبرهنة3:

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان إبتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

أمثلة محلولة

1) $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{1}{n}\leq u_n\leq \frac{1}{n-1}$.عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2+\cos(n)$. عين نهاية المتتالية (u_n).

نعلم من أجل كل عدد طبيعي n

$$-1\leq \cos(n)\leq 1$$

$$-1+n^2\leq n^2+\cos(n)\leq 1+n^2$$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-1=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3) $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \frac{4n}{2n+3}$. عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\left(2+\frac{3}{n}\right)} = 2$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

4) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n+\sin(n)$. عين نهاية المتتالية (u_n).

نعلم من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sin(n) \geq -1$.

إذا $u_n \geq n-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

تمرين الاول

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n^2-5n+1}{n^2+5}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

حل:

لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) ومنه $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x^2+5}$ والمعرفة على $\mathbb{R}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

تمرين الثاني

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل:

المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(v_n)$ حيث $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ و f الدالة العددية حيث $f(x) = \sqrt{x}$.

المعرفة على $[0;+\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) هي الدالة g حيث $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0;+\infty[$.

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$. وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$.

التمثيل البياني لمتتالية عددية

❖ متتالية معرفة بالحد العام

يمكن تمث

(ترفق هذه المتتالية بدالة f).

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$u_n = \frac{1}{n}$.

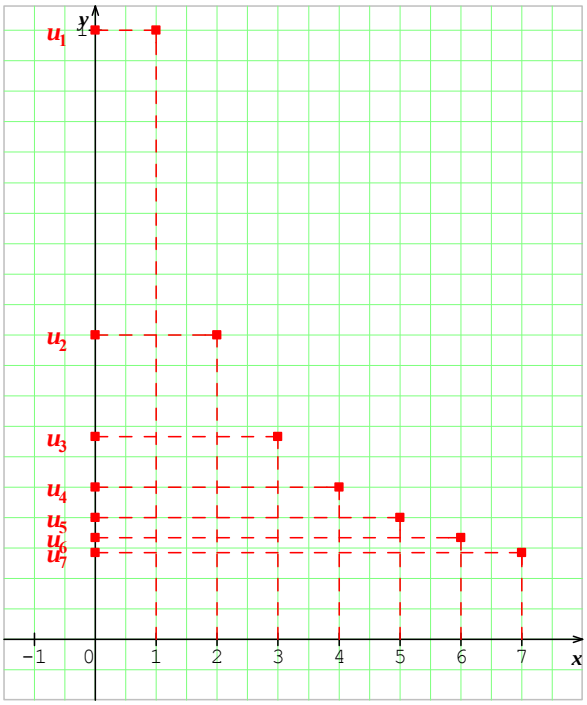
(u_n) معرفة كذلك $u_n = f(n)$ حيث: $f(x) = \frac{1}{x}$

بما أن n عدد طبيعي نعرف f على المجال $]0,+\infty[$.

في الرسم المقابل التمثيل البياني للمتتالية (u_n) في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ هو مجموعة النقط ذات الاحداثيات $(1;1)$،

$\left(2;\frac{1}{2}\right)$، $\left(3;\frac{1}{3}\right)$، إلخ...

مجموعة النقط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n).



❖ متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n, f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية.

مثال: مثل بيانيا خمس حدود الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة

بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$

المتتالية من الشكل **$u_{n+1} = f(u_n)$** حيث f دالة معرفة

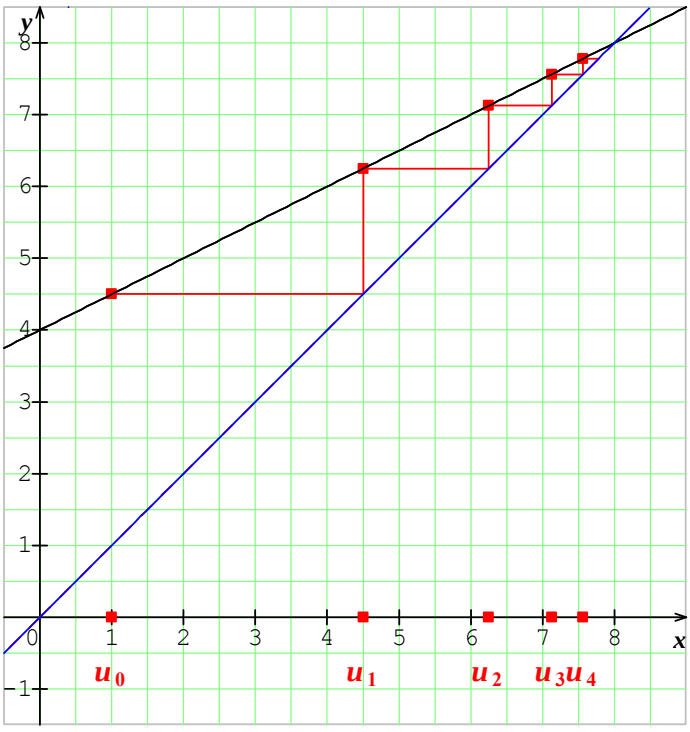
بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

نرسم منحني الدالة f و نرسم المستقيم الذي معادلته $y = x$

طريقة:

لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y = x$ لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n, u_{n+1})$



تمارين محلولة

تمارين محلولة

التمرين الاول

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

2) عين نهاية لكل من المتتاليات (u_n) , (s_n) و (t_n) .

حل التمرين:

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\frac{1}{3}u_n-2+3=\frac{1}{3}u_n+1=\frac{1}{3}(u_n+3)=\frac{1}{3}v_n$ ؛ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0+3=5$.

2) $v_n=u_n+3$ معناه $u_n=v_n-3$ ولدينا $v_n=v_0\times q^n=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ إذن $u_n=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-3$ ولدينا $-1<\frac{1}{3}<1$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-3=-3$.

$s_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=5\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{-2}{3}}=-\frac{15}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]$ ؛ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{15}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]=\frac{15}{2}$

.

$t_n=u_0+u_1+...+u_n=(v_0-3)+(v_1-3)+...+(v_n-3)=s_n-3n-3$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n-3n-3)=-\infty$.

تمرين الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=1$ والعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية: $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-7$

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ،

أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ،

استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

حل التمرين:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية: $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$.

$x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ $\quad$ $3x=x+14$ $\quad$ $x=7$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 7$

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - 7 = \frac{1}{3}u_n - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 7) = \frac{1}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 7 = 6$.

$v_n = v_0 q^n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛

ومنه $u_n = v_n + 7 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7$

بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$.

التمرين الثالث

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و العلاقة : $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عين نهاية المتتالية (u_n) .

حـل:

1) لنحسب v_{n+1} .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{5}{3} \\ &= 1 + \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{3} \\ &= \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

إذا أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

2) أساس المتتالية هو $q = \frac{2}{5}$.

إذن المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{3}$ لأن $u_n = v_n + \frac{5}{3}$ و $-1 < \frac{2}{5} < 1$

التمرين الرابع

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع م

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .
2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .
3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
4) عين u_n و v_n بدلالة n .

حل التمرين

نحسب w_{n+1} بدلالة w_n .

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}=\frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}$$
$$=\frac{1}{12}(u_n-v_n)=\frac{1}{12}w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0=11$. ومنه $w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3(u_n+2v_n)}{3}+\frac{8(u_n+3v_n)}{4}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n$$
$$=3u_n+8v_n=t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n=t_0=3u_0+8v_0=44$

3) نحسب : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{1}{4}(u_n-v_n)=\frac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n>0$ فإن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases}u_n=4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n\\u_n=4-3\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u_n-v_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n\\3u_n+8v_n=44\end{cases}$

التمرين الخامس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-5n-1$.
لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n) .استنتج (u_n) بدلالة n .

حل التمرين

الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$.
لدينا

$v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=-5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-1-5n$. $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}(5+5-5n)=\frac{n}{2}(-2-5n)$.

$v_0=u_1-u_0$ ، $v_1=u_2-u_1$ ، ... ، $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n=S+u_0$

و منه $u_n=\frac{n}{2}(-2-5n)+3$.

التمرين السادس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ،ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).
- ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟
- أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S .استنتج نهاية (u_n) .

حل التمرين

- $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

- $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

- $-1<\frac{1}{3}<1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

التمرين السابع

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=14$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=4u_n+3$

و نعرف المتتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n=u_n+1$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

تـأحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots\ldots\ldots + v_n^2$

جـاحسب بدلالة n الجذاء: $p_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots \times v_n$

الحل:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0 = 14$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 4u_n + 3$

و نعرف المتتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = u_n + 1$

لإثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 4u_n + 3 + 1 = 4(u_n + 1) = 4v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 15$

بـكتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n : $v_n = 15 \times (4)^n$ ، $u_n = 15 \times (4)^n - 1$

تـحساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \ldots\ldots\ldots + v_n^2$

$$\begin{aligned} S_n &= v_0^2 + v_1^2 + \ldots\ldots\ldots + v_n^2 \\ &= \left(15 \times (4)^0\right)^2 + \left(15 \times (4)^1\right)^2 + \left(15 \times (4)^2\right)^2 + \ldots\ldots + \left(15 \times (4)^n\right)^2 \\ &= (15)^2 \left[4^0 + 4^2 + 4^4 + \ldots\ldots + 4^{2n}\right] \\ &= (15)^2 \left(\frac{1 - 16^{n+1}}{1 - 16}\right) \\ &= 15\left(16^{n+1} - 1\right) \end{aligned}$$

جـحساب بدلالة n الجذاء: $p_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots \times v_n$

$$\begin{aligned} p_n &= v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots \times v_n \\ &= \left(15 \times (4)^0\right) \times \left(15 \times (4)^1\right) \times \left(15 \times (4)^2\right) \times \ldots\ldots \times \left(15 \times (4)^n\right) \\ &= (15)^{n+1} \left[4^{0++1+2+3+\ldots+n}\right] \\ &= (15)^{n+1} \times (4)^{\frac{n+1}{2} \times n} \end{aligned}$$

التمرين الثامن

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

1) ا)ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

ب)باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_3, u_2, u_1, u_0

ج)ما هو اتجاه تغير (U_n) ؟ هل (U_n) متقاربة ؟

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$

ا)اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول.

ب)اكتـ

ج)احسب نهاية المتتالية (u_n) .ماذا تستنتج؟

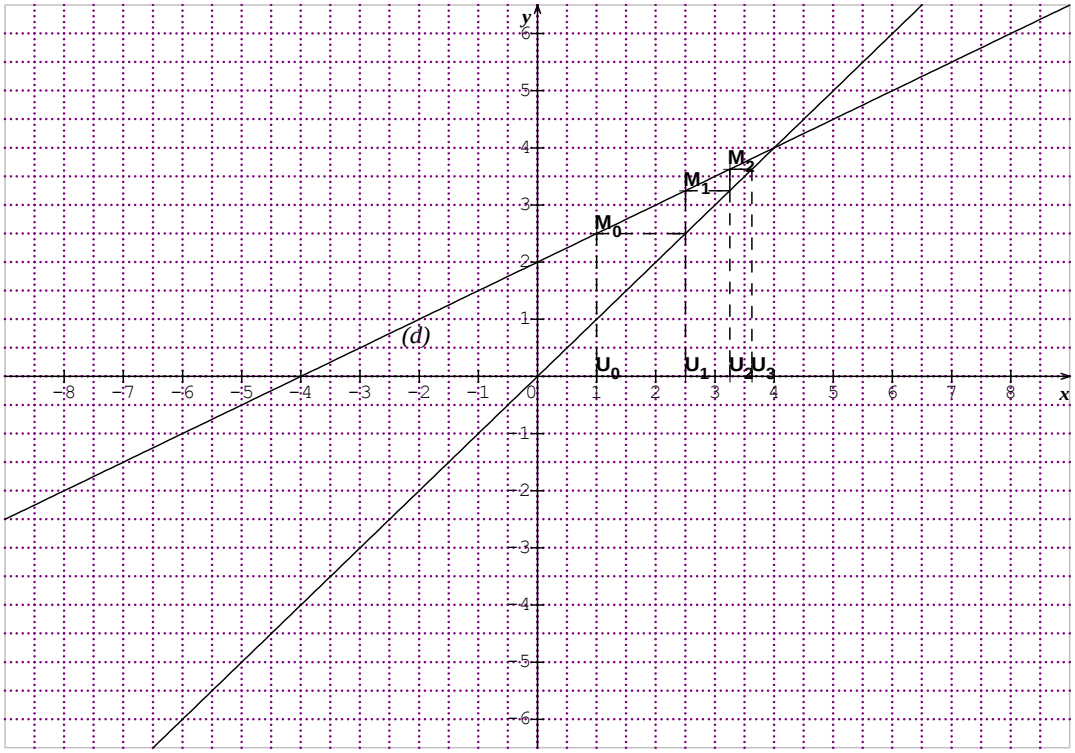
د)احسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$.

الحل:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 : n \in \mathbb{N}$

1) ا) إنشاء (Δ) و (d)

ب)تمثيل بيانيا u_3, u_2, u_1, u_0 على حامل محور الفواصل و بدون حساب.



ج)المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2) ا) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = -3$

ب) $v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 : n \in \mathbb{N}$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ لأن $-1 < q < 1$ نستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة.

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}) + 4n$$

د) $S_n = -3\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} + 4n$ ومنه $S_n = 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] + 4n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

التمرين التاسع

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1 - أ) أر

المماثل (d)

للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x+2$.

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 , u_1 , u_2 و u_3 .

2ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-3$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

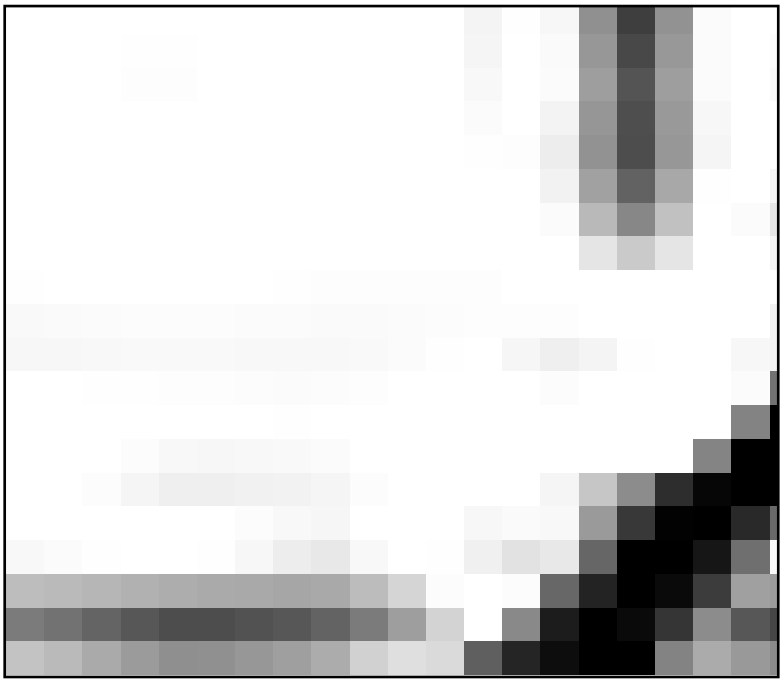
3 ـ أ) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$

ب) استنتج المجموع S_n' بدلالة n حيث : $S_n'=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$

حل التمرين

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

2ـ أ) رسم (d) و (Δ) .



ب) تمثيل الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3 .

2ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-3$

أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-2$.

ب)

$$u_n = v_n + 3 = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \quad \text{و} \quad v_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\underbrace{-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0} + 3\right] = 3$.

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n$$

4- أ- حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = -2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right] = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_n$$

$$S'_n = (v_0+3) + (v_1+3) + (v_2+3) + \dots\dots\dots + (v_n+3)$$

ب- استنتاج المجموع S_n' بدلالة n :

$$S'_n = [v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n] + \left(\underbrace{3+3+3+\dots+3}_{n \text{ م1+ة}}\right)$$

$$S'_n = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 3(n+1)$$

$$S'_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3n$$

التمرين العاشر

قاعة سينما منظمة على شكل صفوف بحيث عدد الكراسي في الصف الأول 5 و عدد الكراسي في الصف الثاني يزيد عن عدد الكراسي في الصف الأول ب3 وعدد الكراسي في الصف الثالث يزيد عن الصف الثاني ب3 وهكذا...

1- احسب عدد الكراسي في الصف الثاني ثم في الصف الثالث

2- عبر بدلالة n عن عدد الكراسي في الصف ذي الرتبة n

3- ماهو عدد الصفوف في هذه القاعة إذا علمت أن عدد الكراسي داخل القاعة هو 153

حل

عدد الكراسي في الصف الأول 5 , يزيد عدد الكراسي في الصف الثاني ب3 و في الصف الثالث يزيد عدد الكراسي عن الصف الثاني بـ 3 وهكذا , نلاحظ أن هناك متتالية (U_n) حسابية حدها الأول $U_1 = 5$ و أساسها $r=3$

1- عدد الكراسي في الصف الثاني والثالث:

$U_1 + r$

$U_3 = U_2 + r$; $U_3 = 8 + 3 = 11$

2ـ عدد الكراسي في الصف ذي الرتبة n :

$U_n = U_1 + (n-1)r$; $U_n = 2 + 3n$

3ـ عدد الصفوف علما أن عدد الكراسي في القاعة 153 :

$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 153$

$\frac{n}{2}(U_1 + U_n) = 153$

$3n+7n-306=0$

عدد الصفوف $n_1=9$; $n_2 = -11.3$ مرفوضة

سلطان تم بفضل اللّه

الحمد للّه الذي بنعمته تتم الصالحات

سلطان الأستاذ يوسف بوشناق

سلطان يتمنى لكم التوفيق

جدتون هذا الملف في صفحة

Top Maths

