الأستاذ : مرنيز وليد

الموسم الدراسي : 2020/2019

الإشتقاقية، النهايات، دراسة دوال

- سلسلة تمارين -

التمرين رقم 1:

في كل حالة من الحالات التالية عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ، ثم احسب النهايات عند اطراف D_f

- $f(x) = 3x^2 + x - 2$
- $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 3$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4}{x + 3}$
- $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 2x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{3x}{(x + 1)^2}$
- $f(x) = \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{x^2 - 4}$

التمرين رقم 2:

احسب النهايات في كل حالة من الحالات التالية:

1) حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x + 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

2) حالة عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$

3) حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
- $\lim\limits_{x\, 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

4) حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{5x + 4}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 4}$

التمرين رقم 3:

f الدالة المعرفة على $]-\infty; -1[$ بـ : $f(x) = \dfrac{-2x^2 - x}{x + 1}$

1) عين الاعداد a ، b و c بحيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$

2) احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$. ماذا تستنتج؟

3) بين ان المنحنى الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - 2x$ كمستقيم مقارب.

4) أدرس وضعية المنحنى بالنسبة الى (D)

التمرين رقم 4:

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' دالتها المشتقة

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$\cdots$

نقبل ان f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$ حيث : a ، b و c اعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$ بدلالة a و c

2) بالاستعانة بجدول التغيرات بين ان : $c = 4$ ، $b = -1$ و $a = 1$

3) اتمم جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة

4) بين ان (C) المنحنى الممثل للدالة f يقبل المستقيم $(D) : y = x - 1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D)

السنة الثانية ثانوي

التمرين رقم 5:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$

1) بين انه من اجل كل x من D_f يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-1}$

2) اثبت ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

3) ادرس تغيرات f ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f)

4) استنتج رسم (C_h) المنحنى الممثل للدالة h و المعرفة بـ : $h(x)=|f(x)|$

التمرين رقم 6:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=ax^3+bx-1$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث (C_f) يشمل النقطة $A(-1;1)$ ويقبل مماس يوازي محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

2) نضع : $f(x)=x^3-3x-1$

ا) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) في النقطة B ذات الفاصلة 0 وعين وضعية المنحنى بالنسبة اليه. ماذا تمثل النقطة B

ج) بين ان المعادلة : $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول α ، β ، γ حيث : $\alpha\in[-2;-1]$ و $\beta\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ و $\gamma\in\left[\dfrac{3}{2};2\right]$

د) ارسم المماس (Δ) و المنحنى (C_f)

التمرين رقم 7:

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-3}$.
(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة g عند اطراف مجموعة التعريف

2) ادرس تغيرات الدالة g

3) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{3\}$ فان : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

4) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$

5) بين ان النقطة $\omega(3;13)$ مركز تناظر للمنحنى (C_g)

6) عين نقط تقاطع (C_g) مع المحورين ثم انشئ (C_g)

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $g(x)=m$

8) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3;-3\}$ بـ : $h(x)=\dfrac{3x^2-5|x|}{|x|-3}$

ا) بين ان h زوجية. اعط تفسيرا هندسيا لذلك

ب) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة h

التمرين رقم 8:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$

ا) تحقق انه : $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+1}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف

ج) بين انه : $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل و ليكن (D)

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم ذي المعادلة : $y=x+3$

ج) انشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x)=m$

4) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}$.
(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

ا) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب) اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_g) اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق.

التمرين رقم 9:

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 8x^3 - 9x^2 + 4$

ا) ادرس تغيرات الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها

ب) بين ان: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.55 < \alpha < -0.54$

ج) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{-4x+3}{x^3-1}$.
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف و فسر النتائج بيانيا.

ب) اثبت ان : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$

ج) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د) بين ان : $f(\alpha) = \dfrac{-4}{3\alpha^2}$ ، ثم اعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

التمرين رقم 10:

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

ا) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

ب) بين ان : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.5 < \alpha < 0.9$

ج) حدد حسب قيم x اشارة $g(x)$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$.
(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

ب) احسب $f'(x)$ و بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د) بين ان : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ه) ارسم المنحنى (C) . (ناخذ : $\alpha \approx \dfrac{2}{3}$)

التمرين رقم 11:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$

ا) تحقق انه : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف

ج) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$x^2 + 2x$

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل وليكن (D)

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم ذي المعادلة : $y = x + 3$

ج) انشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) = m - 1$

4) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}$.
(C_g) تمثيلها البياني

ا) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب) اشرح كيفية انشاء (C_g) اعتمادا على المنحنى (C_f)

ج) انشئ في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g)

التمرين رقم 12:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$

ا) عين الاعداد a ، b و c بحيث :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

ب) احسب النهايات عند اطراف مجموعة تعريف الدالة f

ج) بين انه : $f'(x) = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما المستقيم (Δ) معادلته $y = x + 1$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ)

ج) تحقق ان النقطة $A(-2;-1)$ نقطة تقاطع المقاربين هي مركز تناظر لـ (C_f)

د) اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 لـ (C_f)

ه) ارسم (Δ) ، و المماس و (C_f) بدقة.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{|x+2|}$

ة انطلاقا من

التمرين رقم 13:

1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{2-3x}{(x-1)^2}$.
ادرس نهاية g عند $+\infty$ ، $-\infty$ ، 1

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=-x+3+g(x)$.
في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
نعتبر (C_f) المنحنى الممثل لـ f ، و المستقيم (Δ) : $y=-x+3$

ا) باستعمال نتائج السؤال الاول، ماذا نستطيع القول عن (C_f) و المستقيم (Δ)

ب) ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم انشئ جدول تغيراتها

3) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ، ثم انشئ المنحنى (C_f)

التمرين رقم 14:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x-7}{2-x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) عين معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

3) عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات، ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f)

4) بين ان نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحنى

5) بين انه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة : $y=-x+4$

6) نعتبر الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(|x|)$

ا) عين D_h ، ثم بين ان h دالة زوجية

ب) ارسم (C_h) بالاعتماد على (C_f) في نفس المعلم

التمرين رقم 15:

1) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

ا) عين العددين الحقيقين b ، c بحيث يكون من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f(x)=x+b+\frac{c}{x-1}$$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

ج) ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها

2) (C_f) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل له بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ج) اثبت ان النقطة $w(1;2)$ هي مركز تناظر (C_f)

د) انشئ المنحنى (C_f) و المماس (T)

3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

4) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-1$ كمايلي : $h(x)=|\dfrac{x^2+3}{x-1}|$.
اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة h

التمرين رقم 16:

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم

ا) بين ان $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1.6 و 1.7

ب) استنتج حسب قيم x ، اشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$.
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (الوحدة $4cm$)

ا) بين ان $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$. اعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين بين انه من كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج) تحقق انه من اجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f(x)-(-x+1)=\frac{(x-1)x^3}{x^3+1}$$

د) بعد دراسة اشارة $f(x)-(-x+1)$ ، استنتج وضعية (C_f) بالنسبة للماس (Δ). ماذا تلاحظ ؟

ه) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

التمرين رقم 17:

f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+3+\dfrac{2}{x-1}$
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ا) عين نهاية الدالة f عند 1 ، فسر النتيجة بيانيا
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) ا) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل المستقيم :
$(D): y=-x+3$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$
ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)
ج) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيم (D)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=m-x$

التمرين رقم 18:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$. (C_f)
تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين ان النقطة $I(1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : $y=x-2$

ا) بين ان (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم Δ
ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

التمرين رقم 19:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بجدول تغيراتها المعطى بـ :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	‖	↗		↘	
			2		‖	-2			
					‖	↗		↘	
					‖	$-\infty$			$-\infty$

)

1) احسب $f'(x)$

2) اعتمادا على جدول التغيرات الدالة f :

ا) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c
ب) بين ان منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب عمودي
ج) قارن بين صورتي العددين 0 و $\dfrac{1}{2}$ معللا اجابتك

3) ناخذ فيمايلي : $a=-1$ ، $b=2$ ، $c=-1$ وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس

ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تحديد معادلة له
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f). انشئ المنحنى (C_f)
ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول:

$$f(x)=m$$

التمرين رقم 20:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها، ثم استنتج مستقيما مقارب للمنحنى (C_f)

2) ا) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1
$f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-1}$
ب) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-x+1]$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[f(x)-x+1]$
ثم فسر النتائج هندسيا
ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) اكتب معادلة للماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 :
$f(2-x)+f(x)=0$ ، ماذا تستنتج؟

6) انشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

التمرين رقم 21:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معل متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5) انشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

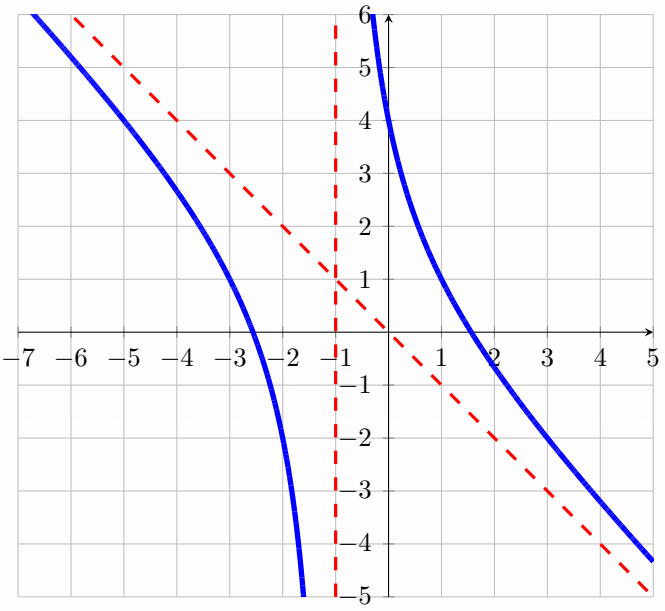
ا) $h(x) = f(x)$ 2 $\mathbb{R}$ x

التمرين رقم 22:

f دالة معرفة على المجال $I =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل.



1) ا) احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

ا) احسب نهاية g عند $+\infty$

ب) تحقق ان (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس تغيرات g

3) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

1) ا) احسب $\lim\limits_{h\lesssim 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{h\gtrsim 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$

ماذا تستنتج؟

ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(Δ_1) و (Δ_2) عند

التمرين 1

حساب نهايات الدوال

1) $f(x)=3x^2+x-2$; $D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$

2) $f(x)=-2x^3-x^2+4x+3$; $D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2x^3=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x^3=-\infty$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

إشارة المقام

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\dfrac{-x^2+4}{x+3}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$

إشارة المقام

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$

$\lim_{x\to-3} f(x)=-\infty$

5) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+2x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x}=0$

إشارة المقام

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x^2+2x+1	$+$	0	$+$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\dfrac{3x}{(x+1)^2}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x^2}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2}=0$

إشارة المقام

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$	$+$

$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$

7) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}$; $D_f=\mathbb{R}-\{1;-2;2\}$

$D_f=]-\infty,-2[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{2x^2-x-7}{(x-1)(x^2-4)}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0$

إشارة المقام

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
المقام	$-$	0	$+$	0	$+$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-x=+\infty$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ (نضرب في المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

ج ع ت من الشكل $0\times\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ج ع ت من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$ (نقوم بتحليل البسط)

x^2+x-6	$x-2$
x^2+2x	$x+3$
$0+3x-6$	
$-3x+6$	
0	

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=-\infty$$

القرين 2

ج ع ت من الشكل $+\infty-\infty$

1) $\lim_{x\to+\infty}2x^3-5x+1$

نطابق الحد الأعلى

$$\lim_{x\to+\infty}2x^3-5x+1=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

2) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$ (نضرب في المرافق)

$$\lim x-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

3) $\lim\sqrt{4x^2+1}-x$ / نستخرج x كعامل

(نضرب في المرافق) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

4) ح.ع. من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-3}{5x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{5}x$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x+4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x\sqrt{1+1/x^2}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\sqrt{1+1/x^2})}{x(1+4/x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}=2$$ ومنه

التمرين 3

$f(x)=\frac{-2x^2-x}{x+1}$; $D_f=]-\infty,-1[$

1) تعيين الأعداد a، b و c

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

$=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$

$=\frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$

$=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

ب) الطريقة الخ

$-2x^2-x$	$x+1$
$+2x^2+2x$	$-2x+1$
$0\quad x$	
$-x-1$	
-1	

$\frac{2x^2-x}{x+1}=\frac{(x+1)(-2x+1)-1}{(x+1)}$ ومنه

$f(x)=\frac{(x+1)(-2x+1)}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)}$ ومنه

$f(x)=-2x+1-\frac{1}{x+1}$

بتعويض a، b و c بـ 2، 1 و 1

$b=-1-a$

$b=-1+2$

$b=1$

$-b=c$ من (3) ومنه

$c=-1$

ج) التفسير الهندسي لـ a

2) حساب $\lim_{x\to-1}f(x)$

إشارة المقام $x+1$: $-$ | 0 | $+$

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{-2x^2-x}{x+1}=-\infty$

وعليه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

3) إثبات أن $y=1-2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f

أي نثبت أن:

$\lim_{x\to\pm\infty}[$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} - (1-2x)\right]$

$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$

و

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$

وعليه المستقيم ذو المعادلة $y = 1-2x$ مقارب بالجوار $+\infty$ و $-\infty$ للمنحنى (C_f)

4) دراسة إشارة الفرق $[f(x)-y]$

$[f(x)-y] = -\frac{1}{x+1}$

حيث

$x+1$: $-$ | -1 | $+$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-1	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		0	$+$	
إشارة الفرق	$+$		‖	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)		‖	(D) تحت (C_f)	

التمرين 4

$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R}-\{-1\}$

1) حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث

$f'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$

2) إثبات أن $a=1$ و $b=-1$ و $c=4$ أي

من جدول التغيرات نلاحظ أن

$f(1) = 2$

$f'(1) = 0$

$f'(-3) = 0$

$f(-3) = -6$

بذكر أخذ 3 عبارات كان لدينا 3 مجاهيل

لدينا $f(1) = 2$

حيث $f(1) = a+b+\frac{c}{2}$

ومنه نستنتج أن

(1) $\quad a+b+\frac{c}{2} = 2$

لدينا $f'(1) = 0$

حيث $f'(1) = a - \frac{c}{4}$

ومنه نستنتج أن

(2) $\quad a - \frac{c}{4} = 0$

ولدينا كذلك

$f'(-3) = -6$

حيث $f'(-3) = 3a+b+\frac{c}{-2}$

ومنه نستنتج أن

(3) $\quad -6a+b-\frac{c}{2} = -6$

من (2) نجد $a = \frac{c}{4}$

بتعويض قيمة a في (1) و (3) نجد

$$\begin{cases} \frac{c}{4}+b+\frac{c}{2} = 2 \\ -\frac{3c}{4}+b-\frac{c}{2} = -6 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} 3c+4b = 8 \quad (*) \\ \end{cases}$$

بطرح ** من * نجد

$$\frac{3c+5c}{4} = 8$$

$$\frac{8c}{4} = 8$$

$c = 4$

ومنه

بتعويض قيمة c في (2) نجد

$$a = \frac{4}{4}$$

$a = 1$

من المعادلة (1) نجد

$$b = 2 - a - \frac{c}{2}$$

$$b = 2 - 1 - 2$$

$b = -1$

3) إتمام جدول التغيرات

إشارة المقام

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x - 1 + \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

4) إثبات أن $y = x - 1$ معادلة لـ (Cf) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1)\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

بذفس الطريقة نجد

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

ومنه $y = x - 1$ معادلة لـ (Cf) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

5) الوضع النسبي (نفس الطريقة المستخدمة في التمرين السابق)

التمرين 5

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

1) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$$

$2x^2 - 3x + 3$	$x - 1$
$-2x^2 + 2x$	$2x - 1$
$-x + 3$	
$+x - 1$	
2	

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1}$$

أي $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$

2) إثبات أن $y = 2x - 1$ معادلة لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

3) دراسة تغيرات الدالة f

1) حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

إشارة المقام

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

ج) حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x-1)-(1)(2x^2-3x+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{4x^2-4x-3x+3-2x^2+3x-3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$

د) إشارة المشتقة

الطرف موجب تماما و من إشارة المشتقة من إشارة قابلة حل $2x^2-4x=0$ تكافئ

$2x(x-2)=0$ أي $2x=0$ أو $x-2=0$

و منه $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=2}$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	↘	$f(2)=5$	↗	$+\infty$

الانشاء

تعيين $(C_f)\cap(yy')$

$f(0)=-3$

و منه $(C_f)\cap(yy')=\{(0,-3)\}$

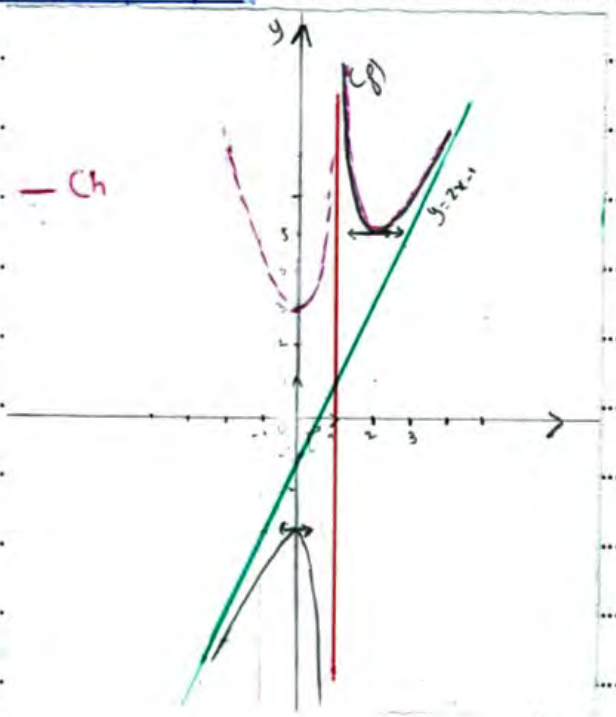
تعيين $(C_f)\cap(xx')$

$f(x)=0$ تكافئ $2x^2-3x+3=0$ و $x-1\neq 0$

حساب Δ $\Delta=9-2\times 2\times 3$

الانشاء

x	D		
x	0	1	-1
y	-3	1	-1



(C_h) ـ

ه) استنتاج رسم (C_h)

$h(x)=|f(x)|$

و منه

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ; f(x)<0 \end{cases}$$

و منه

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\in]1,+\infty[\\ -f(x) & ; x\in]-\infty,1[\end{cases}$$

و عليه (C_h) ينطبق على (C_f) من أجل $x\in]1,+\infty[$

(C_h) نأخذ جزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل من أجل $x\in]-\infty,1[$

التمرين 6

$f(x) = ax^3 + bx - 1$; $D_f = \mathbb{R}$

1) تعيين العددين a و b

نعلم أن $A \in (C_f)$ معناه

$f(-1) = 1$

حيث $f(-1) = -a - b - 1$

وعليه $-a - b - 1 = 1$ ... (1)

(C_f) يقبل عند $A(-1; f(-1))$ مماس موازي لحامل محور الفواصل معناه

$f'(-1) = 0$

حيث $f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(-1) = 3a + b$

وعليه $3a + b = 0$ ... (2)

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد

$2a - 1 = 1$

$2a = 2$

ومنه $a = 1$

بتعويض قيمة a في (1) نجد

$b = -a - 1 - 1$

$b = -3$

ومنه

$f(x) = x^3 - 3x - 1$

2) أ- دراسة تغيرات الدالة f

حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

حساب $f'(x)$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$f'(x) = 3x^2 - 3$

دراسة إشارة $f'(x)$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

ومنه $x = 1$ أو $x = -1$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

ب/ معادلة المماس عند B

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

حيث $f(0) = -1$ و $f'(0) = -3$

ومنه $(T): y = -3x - 1$

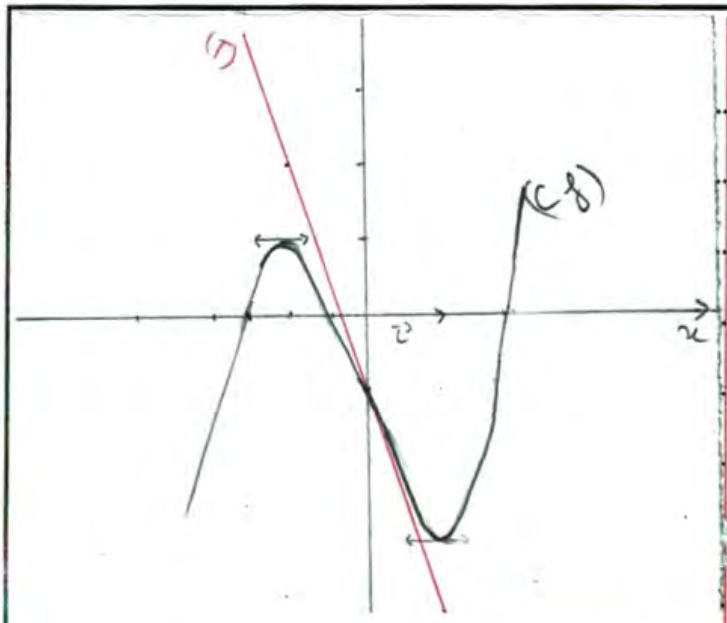
دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)

$f(x) - y = x^3 - 3x - 1 - (-3x - 1)$

$= x^3 - 3x - 1 + 3x + 1$

$f(x) - y = x^3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	A	(C_f) فوق (T)	



تمرين 7

$g(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x-3}$; $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$

1) حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$

اشارة $x-3$: $-$ 0 $+$

$\lim_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 3^+} g(x) = +\infty$

2) بين ان g تقبل اشتقاق على $\mathbb{R} - \{3\}$ ثم احسب $g'(x)$

$g'(x) = \frac{(6x-5)(x-3) - 1(3x^2-5x)}{(x-3)^2}$

$= \frac{6x^2 - 18x - 5x + 15 - 3x^2 + 5x}{(x-3)^2}$

$g'(x) = \frac{3x^2 - 18x + 15}{(x-3)^2}$

اشارة g' من اشارة

بيان منحنى الدالة اختر الجواب

عين النقطة B علما ان النقطة B تمثل نقطة انعطاف

ج/ اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلول α و β

1) $\alpha \in [-2, -1]$

من جدول التغيرات نجد ان الدالة f رتيبة على المجال $[-2, -1]$

حيث $f(-2) < 0$ و $f(-1) > 0$

اي $f(-2) \times f(-1) < 0$

ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-2, -1]$

2) $\beta \in [-\frac{1}{2}, 0]$

الدالة f رتيبة على المجال $[-\frac{1}{2}, 0]$

حيث $f(-\frac{1}{2}) > 0$ و $f(0) < 0$

أي $f(-\frac{1}{2}) \times f(0) < 0$

ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد β حيث $\beta \in [-\frac{1}{2}, 0]$

3) $\gamma \in [\frac{3}{2}, 2]$

الدالة f رتيبة على المجال $[\frac{3}{2}, 2]$

حيث $f(\frac{3}{2}) < 0$ و $f(2) > 0$

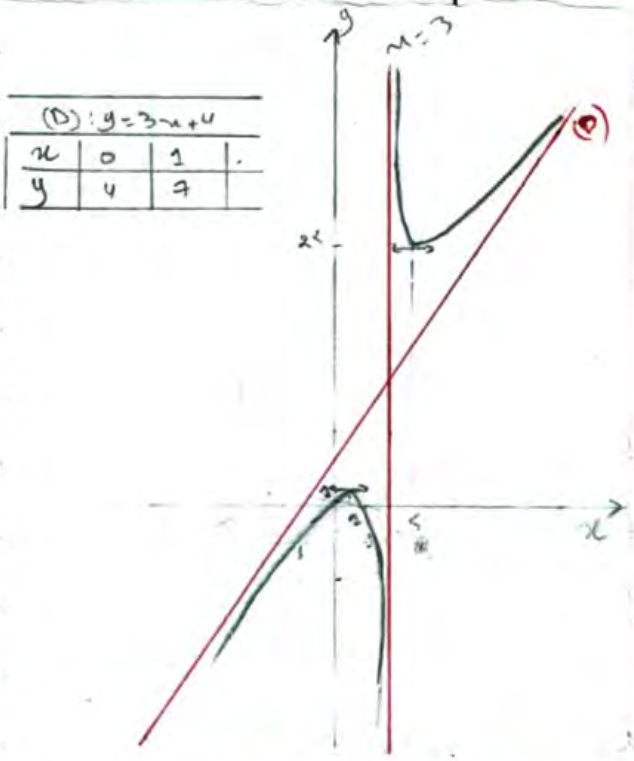
اي $f(\frac{3}{2}) \times f(2) < 0$

ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد γ حيث $\gamma \in [\frac{3}{2}, 2]$

ا) استنتاج

	$(T): -3x-1$

الإنشاء



1) الحل مجموعة البيانية A

g(x) = m مناقشة أفقية

ل m ∈]-∞, 1[المعادلة g(x) = m تقبل حلان أحدهما موجب والآخر سالب

ل m = 1 المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

ل m ∈]1, 25[المعادلة لا تقبل حل

ل m = 25 المعادلة تقبل حل مضاعف

ل m ∈]25, +∞[المعادلة تقبل حلان موجبان

8) $h(x) = \frac{3x^2 - 5|x|}{|x| + 3}$

أ- إثبات أن h دالة زوجية

$h(-x) = \frac{3(-x)^2 - 5|-x|}{|-x| - 3} = \frac{3x^2 - 5|x|}{|x| - 3} = h(x)$

ومنه h دالة زوجية

ب- كتابة h بدون رمز القيمة المطلقة

$h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 5x}{x - 3} & ; x \geq 0 \\ \end{cases}$

وهو (C) ينطبق على C_h لما $x \in [0, +\infty[$

وبما أن الدالة زوجية فإن (C) متناظر بالنسبة لحور التراتيب

وعليه تتحصل على جزء (C) لما $x < 0$ برسم نظير جزء (C) لما $x \geq 0$ بالنسبة لحور التراتيب

التمرين 8

$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$; $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

1) التحقق أن $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x+1}$

نستعمل الطريقة أو القسمة الاقليدية

2) حساب النهايات

x	-∞	-1	+∞
x+1	-	0	+

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

2/ اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+1) - 1(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}$

$= \frac{2x^2 + 2x + 4x + 4 - x^2 - 4x - 4}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$3x^2 - 18x + 15 = 0$

حساب Δ : $\Delta = (-18)^2 - 4(3)(15)$

$\Delta = 144$ / $\sqrt{\Delta} = 12$

$\Delta > 0$ و منه المعادلة تقبل حلين مختلفان هما

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{18 - 12}{6}$ | $x_2 = \frac{18 + 12}{6}$

$\boxed{x_1 = 1}$ | $\boxed{x_2 = 5}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖		0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	25	↗	$+\infty$

3) تعيين الأعداد الحقيقية a و b و c

$3x^2 - 5x$ | $x - 3$

$-3x^2 + 9x$ | $3x + 4$

$4x$

$-2x + 12$

12

$\frac{3x^2 - 5x}{x-3} = 3x + 4 + \frac{12}{x-3}$

منه $a = 3$ و $b = 4$ و $c = 12$

4) إثبات أن $y = 3x + 4$ مقارب لـ (C_g)

ملاحظة أن $g(x) = 3x + 4 + \frac{12}{x-3}$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{12}{x-3} = 0$

و

5) إثبات أن $\Omega(3,13)$ مركز تناظر لـ (C_g)

$\Omega(\alpha, \beta)$ مركز تناظر معناه

$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

$f(2(3) - x) + g(x) = f(6 - x) + g(x)$

$= \frac{3(6-x)^2 - 5(6-x)}{6 - x - 3} + \frac{3x^2 - 5x}{x-3}$

$= \frac{108 - 36x + 3x^2 + 30 + 5x}{-x + 3} + \frac{3x^2 - 5x}{x-3}$

$= \frac{-(3x^2 + 31x + 78)}{x-3} + \frac{3x^2 - 5x}{x-3}$

$= \frac{-3x^2 + 31x - 78 + 3x^2 - 5x}{x-3}$

$= \frac{+26x - 78}{x-3} = \frac{+26(x-3)}{(x-3)}$

$f(2(3) - x) + f(x) = 2(13)$ ومنه

$\Omega(3,13)$ مركز تناظر لـ (C_g)

6) تعيين تقاطع (C_g) مع حاملي محوري الإحداثيات

* مع محور التراتيب

$g(x) = 0$

$(C_g) \cap (yy') = \{(0,0)\}$

* مع محور الفواصل

$g(x) = 0$! $\frac{3x^2 + 5x}{x-3} = 0$

تكافئ $3x^2 + 5x = 0$ و $x - 3 \neq 0$

تكافئ $x(3x + 5) = 0$ و $\boxed{x = 0}$

أي $3x + 5 = 0$ و $\boxed{x = \frac{-5}{3}}$

$(C_g) \cap$

المقام موجب فهما هو إشارة المشتقة من إشارة البسط أي

$x(x+2)=0$ أي $x^2+2x=0$

ذكاي $x=0$ أو $x=-2$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↘	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	4 ↗	$+\infty$

ب) أ- إثبات أن (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين

لدينا $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ إذن (C_g) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$

لدينا $f(x) = x+3+\frac{1}{x+1}$

حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

إذن (C_g) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y=x+3$

ب- الوضع النسبي لـ (C_g) و (D)

$f(x)-y = (x+3)+\frac{1}{x+1}-(x+3)$

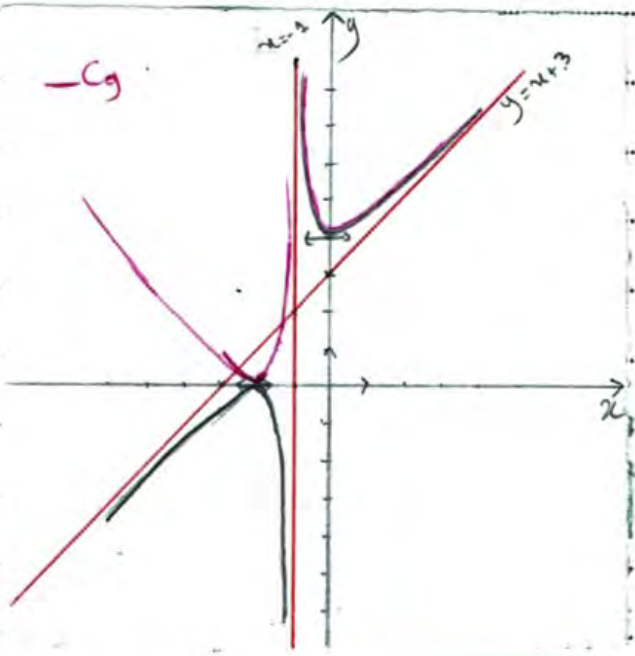
$f(x)-y = \frac{1}{x+1}$

إشارة الفرق من إشارة المقام لأن البسط موجب

$x+1$: $-$ | $+$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
الوضع النسبي	(C_g) تحت (D)		(C_g) فوق (D)

$-C_g$



3) المناقشة

المناقشة البيانية لـ $f(x)=m$

لما $m\in]-\infty,0[$ المعادلة تقبل حلين سالبان

لما $m=0$ المعادلة تقبل حل مضاعف

لما $m\in]0,4[$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m=4$ المعادلة تقبل حل مضاعف

لما $m\in]4,+\infty[$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر موجب

4) $g(x) = \frac{x^2+4x+4}{|x+1|}$

أ- كتابة g بدون رمز القيمة المطلقة

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+1} & ; x+1\geq 0\\ \dfrac{x^2+4x+4}{-(x+1)} & ; x+1\leq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+1} & ; x\geq -1\\ -\dfrac{x^2+4x+4}{x+1} & ; x\leq -1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & ; x\geq -1\\ -f(x) & ; x\leq -1\end{cases}$$

ومنه

لما $x\geq -1$ (C_g) منطبق على (C_g)

لما $x\leq -1$ (C_g) نظير (C_g) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل

التمرين 9

$$g(x)=8x^3-9x^2+4$$

1) دراسة تغيرات الدالة g

* حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 8x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 8x^3=+\infty$$

* حساب $g'(x)$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$g'(x)=24x^2-18x$$

دراسة إشارة g'

$g'(x)=0$ تكافئ $24x^2-18x=0$

أو $x(24x-18)=0$ أي $x=\frac{18}{24}$

ومنه $\boxed{x=\frac{3}{4}}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘		↗	$+\infty$

2) $f(x)=\dfrac{-4x+3}{x^3-1}$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0^+$$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2}=0^+$$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

إشارة المقام

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

ب/ حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث

$$f'(x)=\frac{-4(x^3-1)-3x^2(-4x+3)}{(x^3-1)^2}$$

$$=\frac{-4x^3+4+12x^3-9x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{8x^3-9x^2+4}{(x^3-1)^2}=\frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة المقدار $g(x)$ لأن المقام موجب تماما وعليه

$g(x) = 0$

$8x^3 - 9x^2 + 4 = 0$

حيث $\alpha \in]-0{,}55 ; -0{,}54[$ و $g(\alpha) = 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

و/ إثبات أن $f(\alpha) = -\dfrac{4}{3\alpha^2}$

$f(\alpha) + \dfrac{4}{3\alpha^2} = \dfrac{-4\alpha + 3}{\alpha^3 - 1} + \dfrac{4}{3\alpha^2}$

$= \dfrac{(-4\alpha+3)3\alpha^2 + 4(\alpha^3 - 1)}{(\alpha^3 - 1)(3\alpha^2)}$

$= \dfrac{-12\alpha^3 + 9\alpha^2 + 4\alpha^3 - 4}{3\alpha^5 - 3\alpha^2}$

$= \dfrac{-8\alpha^3 + 9\alpha^2 - 4}{3\alpha^5 - 3\alpha^2} = \dfrac{-g(\alpha)}{3\alpha^5 - 3\alpha^2}$

حيث $g(\alpha) = 0$ ومنه

$f(\alpha) + \dfrac{4}{3\alpha^2} = 0$

إذا

حصر $f(\alpha)$

لدينا $-0{,}55 < \alpha < -0{,}54$

$0{,}2916 < \alpha^2 < 0{,}3025$

$0{,}8748 < 3\alpha^2 < 0{,}9075$

$\dfrac{1}{0{,}9075} < \dfrac{1}{3\alpha^2} < \dfrac{1}{0{,}8748}$

$\dfrac{4}{0{,}8748} < \dfrac{-4}{3\alpha^2} < \dfrac{4}{0{,}9075}$

ومنه $-4{,}57 < f(\alpha) < -4{,}41$

تمرين 10

$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

دراسة تغيرات الدالة g

حساب النهايات

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

حساب $g'(x)$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x^2 + 2x$

دراسة إشارة g'

$6x^2 + 2x = 0$ تكافئ $g'(x) = 0$

$x(6x + 2) = 0$ أي $x = 0$ أو $x = -\dfrac{1}{3}$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		$-1/3$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1/3)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ب) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

$0,5 < \alpha < 0,9$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $]0;0,9[$ حيث $g(0,5) < 0$ و $g(0,9) > 0$ إذا

$g(0,5) \times g(0,9) < 0$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]0,5;0,9[$

جـ/ إشارة $g(x)$

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{3x}$

أ- حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\quad x: \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

ب/ حساب $f'(x)$

f قابلة على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث

$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(3x)-3(x^3+x^2+1)}{(3x)^2}$

$= \frac{9x^3+6x^2-3x^3-3x^2-3}{(3x)^2}$

$= \frac{6x^3+3x^2-3}{\dots}$

$= \frac{3(2x^3+x-1)}{3\times 3x^2}$

وعليه $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$

ومنه إشارة f' من إشارة g

و g الأول موجب تماما

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$
		$-\infty$					

د/ إثبات أن $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$

$f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6}{12\alpha}$

$f(\alpha) - \frac{2\alpha^2+6}{12\alpha} \overset{?}{=} 0$

$f(\alpha) - \frac{2\alpha^2+6}{12} = \frac{12\alpha(\alpha^3+\alpha^2+1)-(2\alpha^2+6)(3\alpha)}{3\alpha\times 12\alpha}$

$= \frac{12\alpha^4+12\alpha^3+12\alpha-(6\alpha^3+18\alpha)}{36\alpha}$

$= \frac{12\alpha^4+6\alpha^3-6\alpha}{36\alpha}$

$= \frac{6\alpha(2\alpha^3+\alpha^2-1)}{6\times 6\alpha} = \frac{2\alpha^3+\alpha^2-1}{6}$

$2\alpha^3+\alpha^2-1 = 0$ لأن α حل لـ $g(x)=0$

$f(\alpha)$

$f(\alpha)$ حصر

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$$

لدينا:

$$0.5 < \alpha < 0.9$$

$$0.08 < \frac{\alpha}{6} < 0.15 \quad (1)$$

$$1 < 2\alpha < 1.8$$

$$0.55 < \frac{1}{2\alpha} < 1 \quad (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا إلى طرف نجد:

$$1.05 < f(\alpha) < 1.15$$

تمرين 13

$$g(x) = \frac{2-3x}{(x-1)^2} \quad ; D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

1) حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

2)

$$f(x) = -x + 3 + g(x)$$

أ/ المستقيم (Δ) مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $+\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

ب/ حساب النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ حيث

$$f'(x) = -1 + \frac{-3(x-1)^2 - (2x-2)(2-3x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-(x-1)^4 - 3(x^2+1-2x) - (4x-6x^2-4+6x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-x^4+4x^3-6x^2+4x-1-3x^2+3+6x-4x+6x^2+4-6x}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-x^4+4x^3+3x^2}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(-x^2+4-3)}{(x-1)^4}$$

إشارة $f'(x)$

إشارة f' من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما أي

$x^2(-x^2+4x-3)=0$ أي $x=0$

حساب Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ ، $\Delta = 4$ ، $\sqrt{\Delta} = 2$

بما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين هما

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{-2} = 3$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$-1,75$	↘	$-\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

* حساب f'

f قابلة على $\mathbb{R}-\{2\}$ حيث

$f'(x) = \frac{3(2-x)-(-1)(3x-7)}{(2-x)^2}$

$= \frac{6-3x+3x-7}{(2-x)^2} = \frac{-1}{(2-x)^2}$

$f'(x) < 0$ ومنه

جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-3	↘	‖	↘	-3
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

2) الاستنتاجات الخاطئة

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

معناه أن المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ هو مقارب أفقي لـ (C_f)

لدينا $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

معناه أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ هو مقارب عمودي لـ (C_f)

3) نتحقق أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما عمودي والآخر أفقي

$(C_f) \cap (D)$

-3 > أكتب المعادلة (C_g) و (D)

$f(x) - y = g(x)$

$g(x)$ > ادرس إشارة

العدد موجب تماما وعليه إشارة $g(x)$

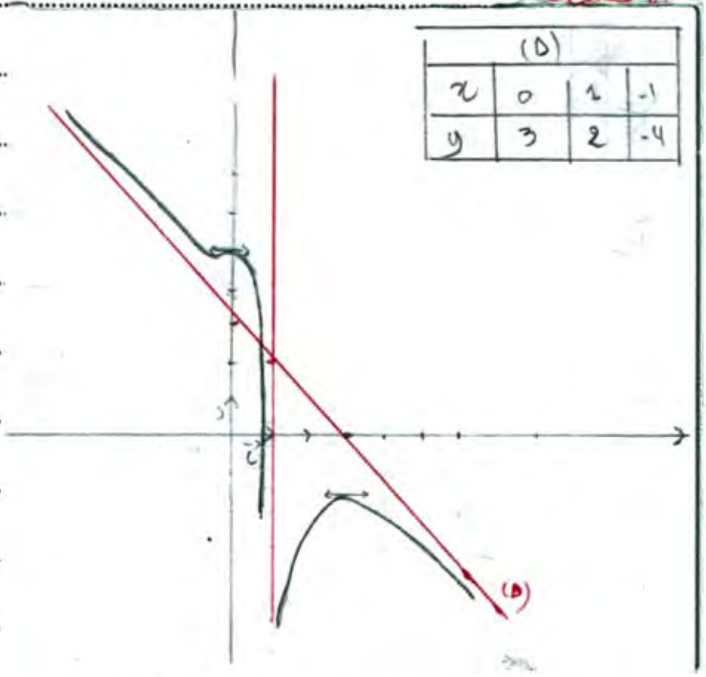
من إشارة الحد أي

$x = \frac{2}{3}$ أي $2 - 3x = 0$

x	$-\infty$		$2/3$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_g) فوق (D)		(C_g) يقطع (D)		(C_g) تحت (D)

الاستنتاج

(D)			
x	0	1	-1
y	3	2	-4



تمرين 14

$f(x) = \frac{3x-7}{2-x}$; $D_f = \mathbb{R}-\{2\}$

1) دراسة تغيرات الدالة f

* حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{-x} = -3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

• مع محور الفواصل

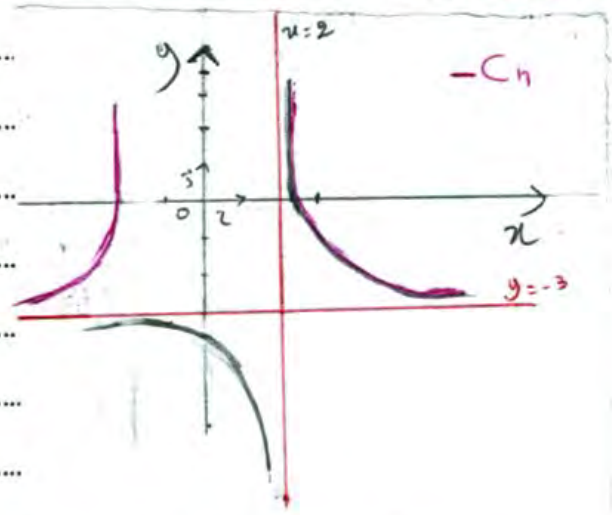
$f(x)=0$ أي $\frac{3x-7}{2-x}=0$

ذلك إذا $3x-7=0$ و $2-x\neq 0$ أي

$x=\frac{7}{3}$ و $x\neq 2$

$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{7}{3};0\right)\right\}$

ثم نشاء:



4) إثبات أن نقطة تقاطع المقاربين هي مركز تناظر (C_f)

نقطة تقاطع المقاربين هي $(2;-3)$

$f(2\times 2-x)+f(x)=-2\beta$

$f(2(2)-x)+f(x)=\frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{12-3x-7}{2-4+x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{-3x+5}{-2+x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=-\frac{-3x+5}{2-x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{3x-5+3x-7}{2-x}=\frac{6x-12}{2-x}$

5) (C_f) يقبل مماس موازي للمستقيم ذو المعادلة $y=-x+4$

$f'(x)=-1$ أي $\frac{-7}{(-x+2)^2}=-1$

$-7=-(x^2+4-4x)$

$-x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac$ حساب Δ

$=16+12=28$ / $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{7}$

$\Delta>0$ وعليه المعادلة تقبل حلين

$x_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}$ $x_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}$

$x_1=2+\sqrt{7}$ $x_2=2-\sqrt{7}$

وعليه (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم

ذو المعادلة $y=-x+4$ عند $x_1=2+\sqrt{7}$

و $x_2=2-\sqrt{7}$

6) $h(x)=f(|x|)$

أ/

$h(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\geq 0 \\ f(-x) & ; x\leq 0 \end{cases}$

$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

"h زوجية" ومنه

ومنه

(C_h) ينطبق على (C_f) على المجال $[0;+\infty[$

(C_h) نظير جزء (C_f) بالنسبة لـ $x\in[0;+\infty[$ لأن

"h زوجية" ولدينا حسب الدراسة السابقة

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ نعوض بـ 19

$f'(x)$ حساب (1

$f'(d)=a-\frac{c}{}$

أ- تعيين الأعداد a، b و c

من جدول التغيرات لدينا

$f(1) = 2$

$f'(1) = 0$

$f(3) = -2$

بحيث $f(1) = a+b-c$

وهذه ① ... $a+b-c = 2$

$f'(1) = a - c$

و هذه ② ... $a - c = 0$

$f(3) = 3a+b+c$

و هذه ③ ... $3a+b+c = -2$

من ② نجد $a = c$

وعليه بتعويضها في ① نجد

$c + b - c = 2$

$\boxed{b = 2}$

أي

بتعويض b في ③ نجد

$3c + 2 + c = -2$

$4c = -4$

$\boxed{c = -1}$

و هذه $\boxed{a = -1}$

ب/ إثبات أن (C_f) يقبل مقارب مائل

$\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

لدينا

$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x-2}$

$f(x) = \frac{-x^2+3}{x-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

وعليه (C_f) يقبل مستقيم مقارب

معادلته $x = 2$

(يمكن ملاحظة ذلك من جدول التغيرات)

- المقارنة بين $f(0)$ و $f(\frac{1}{2})$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ وعليه من أجل كل x

من $0 < x < \frac{1}{2}$ فإن $0 < \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) > f(0)$

3) أ- إثبات أن (C_f) يقبل مستقيم (Δ)

يطلب تعيين معادلته

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+3}{x-2} \times \frac{1}{x}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+3}{x^2-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ ومنه

وبنفس الطريقة نجد

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$a = -1$ ومنه

$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$

$\lim_{x \to +\infty} [-x + 2 - \frac{1}{x-1} + x]$

$= \lim_{x \to +\infty} [2 - \frac{1}{x-2}] = 2$

$b = 2$ ومنه

ب/ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

$f(x) - y = -\frac{1}{x-2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-1	$-$	$-$	
$x-2$	$-$	$+$	
$f(x)-y$	$+$	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

ج/ مناقشة أفقية

تمرين 21

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

1) أ- حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g

و ق إ على $\mathbb{R}$ حيث

$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

$g'(x) = 0$

حساب Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 64 - 168$

$\Delta < 0$ وعليه المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

أي $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$

أي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) أ- إثبات وجود حل وحيد

$g(0,7) \times g(0,8) < 0$ ومنه

إذا المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في $[0,7; 0,8]$

ب/ إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ (II)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب/ تبيين المستقيمات المقاربة

المستقيم (D) مقارب لـ (C_f)

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]$

$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}\right] = \frac{1}{2}$

$(D): \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ج/ الوضع النسبي (إشارة البسط)

1/3

$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

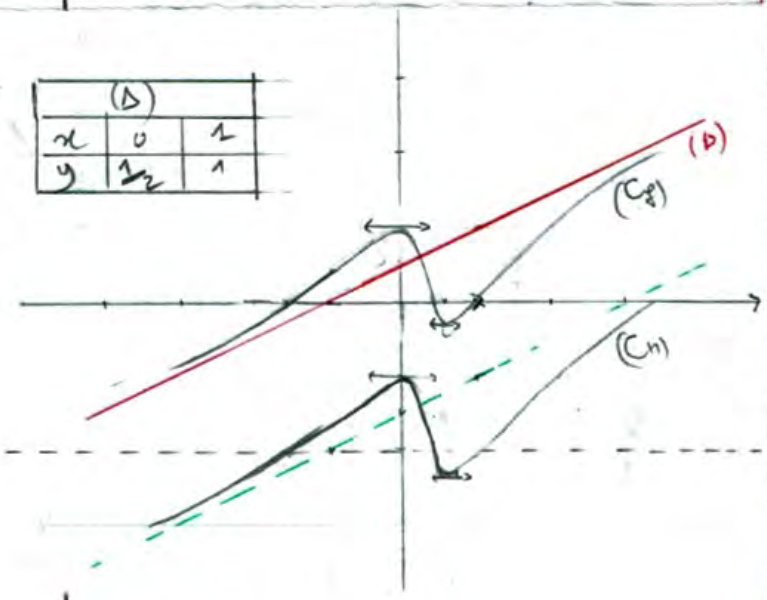
إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $x \cdot g(x)$

العدد α موجود بين 0 و 1

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$			

$(C_f) \cap (yy') = \{(0;1)\}$ ج) انشاء

(Δ)		
x	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1



4- حساب $f(1)$

$f(1) = 0$

بعد توحيد المقامات نجد

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x + 2}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$f(x) = 0$ يكافئ $2x^3 - 4x + 2 = 0$ و $2(2x^2 - 2x + 1) \neq 0$

حيث 1 جذر لـ $2x^3 - 4x + 2$ أي

$2x^3 - 4x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$2x^3 - 4x + 2$	$x - 1$
$-2x^3 + 2x^2$	$2x^2 + 2x - 2$
$+2x^2 - 4x + 2$	
$-2x^2 + 2x$	
$0 \quad -2x + 2$	
$+2x - 2$	
0	

ومنه

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x^2 + 2x - 2)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$f(x) = 0$ يكافئ

$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$ أو

و $2(2x^2 - 2x + 1) \neq 0$

$\boxed{x = 1}$

حساب Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 + 16 = 20 \quad / \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

لدينا $\Delta > 0$ اذا المعادلة تقبل حلين

$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{4}$ | $x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$ | $\boxed{x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

}

6) $h(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

أ/ التحقق أن $h(x) = f(x) - 2$

$f(x) - 2 = \frac{2x^3 - 4x + 2}{2(2x^2 - 2x + 1)} - \frac{2(4x^2 - 4x + 2)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$

$= \frac{2x^3 - 4x + 2 - 8x^2 + 8x - 4}{4x^2 - 4x + 2}$

$= \frac{2x^3 - 8x^2 + 4x - 2}{4x^2 - 4x + 2}$

$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$

ب/ (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$

$h(x) = f(x) + k$

تمرين 22

$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

1) حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

ب/ جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $+\infty$	↘	
			‖ $-\infty$		$-\infty$

2) $g(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

أ

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

ب/ بين معادلة المقارب المائل

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = 1$

$\boxed{a = 1}$

$b = \lim_{x \to \infty} [g(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x+1}$

$b = 0$

$(\Delta): y = x$

3) $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

أ

حساب $\lim_{h \to 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$

$k(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1} & ; x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1} & ; x \leq 0 \end{cases}$

$\frac{k(h)-k(0)}{h} = \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$

$= \frac{h^2 + h + 4 - 4h - 4}{h+1} \times \frac{1}{h}$

$= \frac{h(h-3)}{h+1} \times \frac{1}{h}$

$= \frac{h-3}{h+1}$

$\lim_{h \to 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = -3$

$\lim_{h \to 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = -3$

نستنتج أن الدالة k قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

حيث $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = -3$

التفسير الهندسي

(C_k) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ مماسين معامل توجيه كل منهما -3 و 4 وهما (D_1) و (D_2)

$(D_1): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$= -3(x - 0) + 4$

$(D_1): y = -3x + 4$

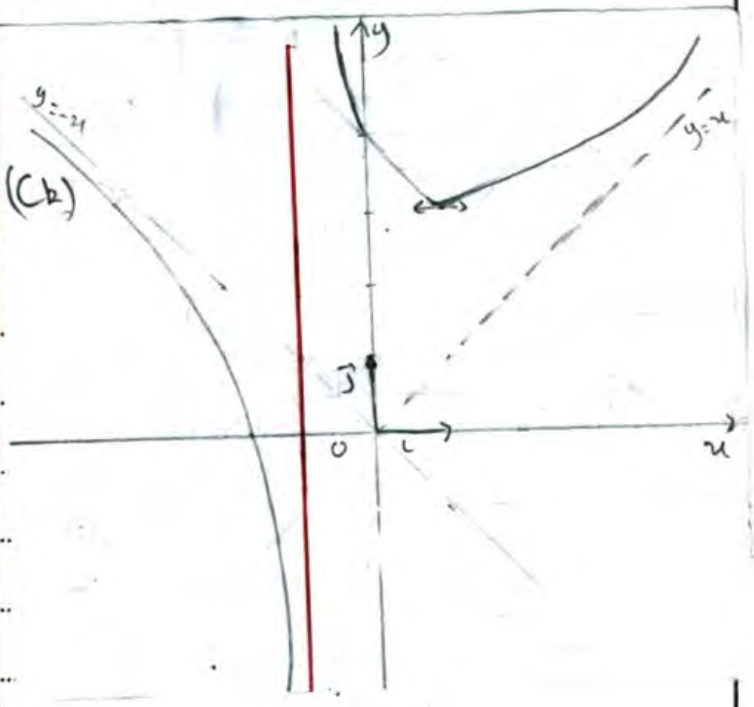
الإنشاء

$$k(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1} & , x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1} & , x < 0 \end{cases}$$

أي

$$k(x) = \begin{cases} g(x) ; x \in [0, +\infty[\\ f(x) ; x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} g(x) ; x \in [0, +\infty[\\ f(x) ; x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$



أدعو أن يكون هذا العمل خالصا لوجه الله
وإن كان هناك تقصير
فهو مني ^^