مجلة الدوال العددية

سنة ثانية ثانوي

الشعب :

تقني رياضي
رياضيات
علوم تجريبية

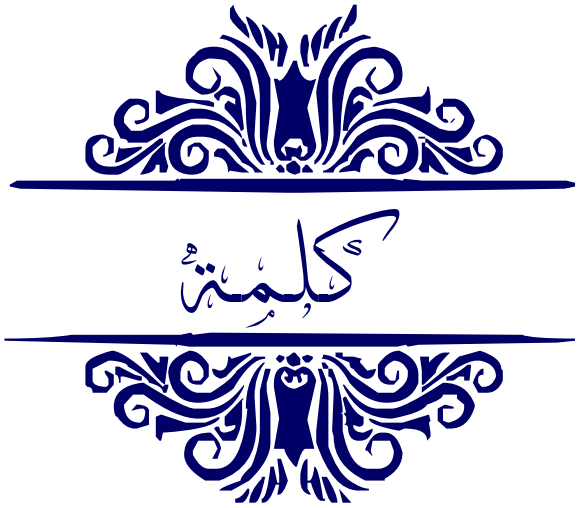
تجدون في المجلة :

- ملخص شامل حول محور الدوال العددية
- تمارين مقترحة في الدوال العددية
- حل مفصل للتمارين المقترحة

الأستاذة نرجس مرواني
LaTeX
التعليم الثانوي
فروض دروس سلاسل تمارين ملخصات

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

2021



هذا العمل المتواضع موجه لتلاميذ سنة ثانية ثانوي شعب علمية

أقدمه لكم كصدقة على أرواح من سبقونا إلى دار الحق، اللّهم ارحمهم و تجاوز عنهم و اجعل الفردوس نُزلهم

شكرا لكل من الزملاء و الأصدقاء على الدعم المتواصل :

شكرا وليد

شكرا لمياء

و الصديقة الصدوقة آية الرحمان

1 الملخص

I مجموعة تعريف دالة

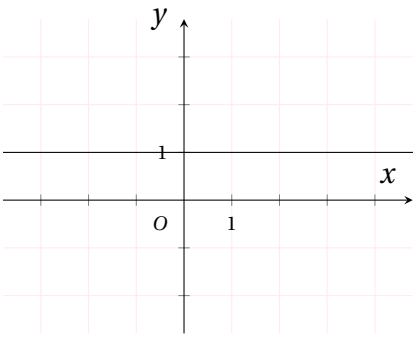
مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

مجموعة تعريف دالة معرفة بدستور

- تتضمن كسر ← المقام لا يساوي الصفر
- لا تتضمن لا جذر ولا كسر ← $\mathbb{R}$
- تتضمن جذر ← ما بداخل الجذر موجب

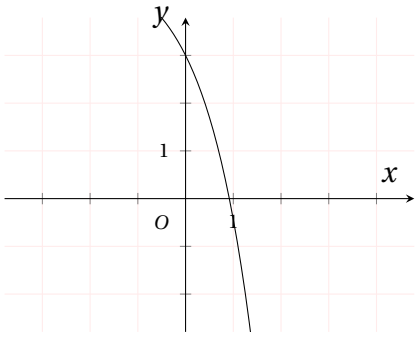
II إتجاه تغير دالة

دالة ثابتة



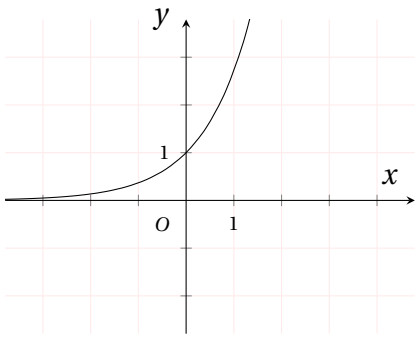
اذا كان $x_1 < x_2$ فان :
$f(x_1) = f(x_2)$

دالة متناقصة تماما



اذا كان $x_1 < x_2$ فان :
$f(x_1) > f(x_2)$

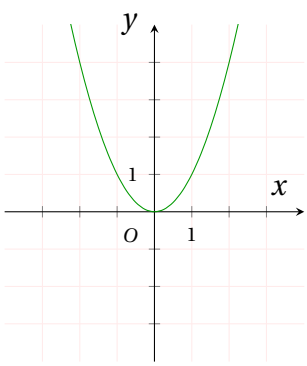
دالة متزايدة تماما



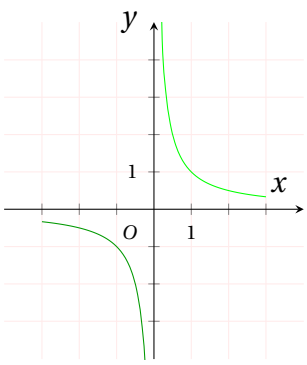
اذا كان $x_1 < x_2$ فان :
$f(x_1) < f(x_2)$

III الدوال المرجعية

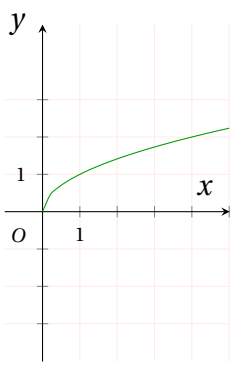
دالة مربع



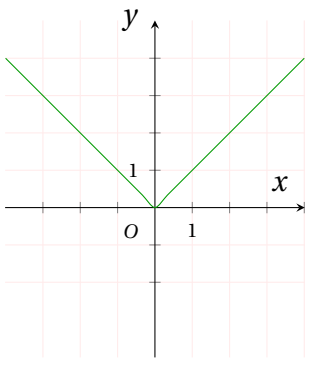
دالة مقلوب



دالة جذر تربيعي



دالة قيمة مطلقة



IV العمليات على الدوال

العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
مجموع f و g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f \times g$	$(f \times g)(x)=f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
قسمة f على g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g$ و $g(x) \neq 0$

تساوي دالتين

القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D و أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D فإن $f(x)=g(x)$

مركب دالتين

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.

- مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بـ "$g \circ f$" والمعرفة بـ "$(g \circ f)(x)=g(f(x))$"
حيث مجموعة تعريفها هي : $D_{g \circ f}=\{x / x \in D_f \text{ وَ } f(x) \in D_g\}$
- مركب الدالة g متبوعة بالدالة f هي الدالة التي نرمز إليها بـ "$f \circ g$" والمعرفة بـ "$(f \circ g)(x)=f(g(x))$"
حيث مجموعة تعريفها هي : $D_{f \circ g}=\{x / x \in D_g \text{ وَ } g(x) \in D_f\}$

V إتجاه تغير الدوال $f+k$، λf و $f \circ g$

k و λ أعداد حقيقية، f دالة رتيبة تماما على مجال I و g دالة رتيبة تماما على مجال $f(I)$

الدالة	اتجاه التغير
الدالة $f+k$	للدالتين f و $f+k$ نفس اتجاه التغير على المجال I.
الدالة λf	• إذا كان $\lambda > 0$ يكون للدالتين f و λf نفس اتجاه التغير على المجال I. • إذا كان $\lambda < 0$ يكون اتجاها تغير الدالتين f و λf متعاكسين على المجال I.
الدالة $f \circ g$	• إذا كان للدالتين f و g نفس اتجاه التغير على كل من I و $f(I)$ على الترتيب تكون الدالة $g \circ f$ متزايدة تماما على I. • إذا كان اتجاها تغير الدالتين f و g متعاكسين على كل من I و $f(I)$ على الترتيب، تكون

VI استنتاج تمثيل بياني لدالة من تمثيل بياني آخر

الـــــدالـــة	التحـــــــويـــــــل
$g(x)=f(x+a)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}+b\vec{j}$
$g(x)=f(x+a)$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$
$g(x)=f(x)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$
$g(x)=-f(x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل
$g(x)=f(-x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	• (C_g) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل • (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل
$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	• (C_g) منطبق على (C_f) إذا كان $x\geq 0$ • (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب إذا كان $x\leq 0$

التقاطع مع محور الفواصل :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة.

التقاطع مع محور التراتيب :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ و نجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة.

الدالة الزوجية:

من أجل كل $x\in D_f$ و $-x\in D_f$ حيث $f(x)=f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

الدالة الفردية :

من أجل كل $x\in D_f$ و $-x\in D_f$ حيث $f(-x)=-f(x)$ نقول أن الدالة f فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم.

الدالة الدورية :

إذا كانت $f(x+p)=f(x)$ نقول أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز التناظر :

من أجل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ إذا كانت $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha;\beta)$.

محور التناظر :

من أجل $x \in D_f$ و $(2\alpha - x) \in D_f$ إذا كانت $f(2\alpha - x) = f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$.

VII حل المعادلات و المتراجحات بيانيا

- حل المعادلة $f(x) = g(x)$ بيانيا تعني تعيين فواصل النقط المشتركة بين (C_f) و (C_g)
- حل المتراجحة $f(x) \geq g(x)$ بيانيا تعني تعيين فواصل نقط (C_f) الواقعة فوق (C_g)
- حل المعادلة $f(x) = a$ هي فواصل نقط تقاطع منحنى الدالة f مع المستقيم ذو المعادلة $y = a$
- حل المتراجحة $f(x) < a$ هي فواصل نقط منحنى الدالة الواقعة تحت المستقيم ذو المعادلة $y = a$

VIII إشارة دالة

- تكون الدالة f موجبة تماما لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل .
- تكون الدالة f سالبة تماما لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل

2 التمارين

1 نص التمرين الحل 9

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

❶ $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ، ❷ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ ، ❸ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

❹ $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{x}{|x-3|}$ ، ❺ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ❻ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}$

2 نص التمرين الحل 10

أذكر إن كانت الدالتين f و g متساويتين في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $\begin{cases} f(x) & =x-\dfrac{3}{x-2} \\ g(x) & =\dfrac{x^2-2x-3}{x-2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} f(x) & =x+2 \\ g(x) & =(\sqrt{x+2})^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} f(x) & =f(x)=2x-3 \\ g(x) & =\sqrt{(2x-3)^2} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} f(x) & |x| \\ g(x) & =\sqrt{x^2} \end{cases}$

3 نص التمرين الحل 11

عين مجموعة تعريف ثم عبارة كل من الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$ في كل حالة :

(1) $\begin{cases} f(x) & =2x-1 \\ g(x) & =\dfrac{x+1}{x+2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-3} \\ g(x)=x^2+1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{2x+1} \\ g(x)=-x+1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1} \\ g(x)=\dfrac{1}{2x-1} \end{cases}$

4 نص التمرين الحل 14

فكك الدالة f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما في كل حالة من الحالات التالية :

❶ $f(x)=(x-3)^2+1$ ، ❷ $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ ، ❸ $f(x)=3(x+1)^2+5$ ، ❹ $f(x)=|x+1|-1$

❺ $f(x)=\cos(x-2)$ ، ❻ $f(x)=3\sqrt{x}+2$ ، ❼ $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{5}\right|$

5 نص التمارين الحل 15

نعتبر الدالتين f و g المعرفة بـ: $f(x)=2x-4$ و $g(x)=\dfrac{x}{-x-2}$

* عين مجموعة تعريف الدوال التالين : $f+5$ ، $2g$ ، $f+g$ ، $f\times g$ ، و $\dfrac{g}{f}$

6 نص التمرين الحل 16

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين كمايلي : $u(x)=-x+4$ و $v(x)=\dfrac{1}{x}$ ،ولتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;4[$ بـ: $f=v\circ u$.

1) أكتب عبارة $f(x)$ بدلالة x .

2) عين صو]4; [u

3) استنتج ا

7 نص التمرين الحل 16

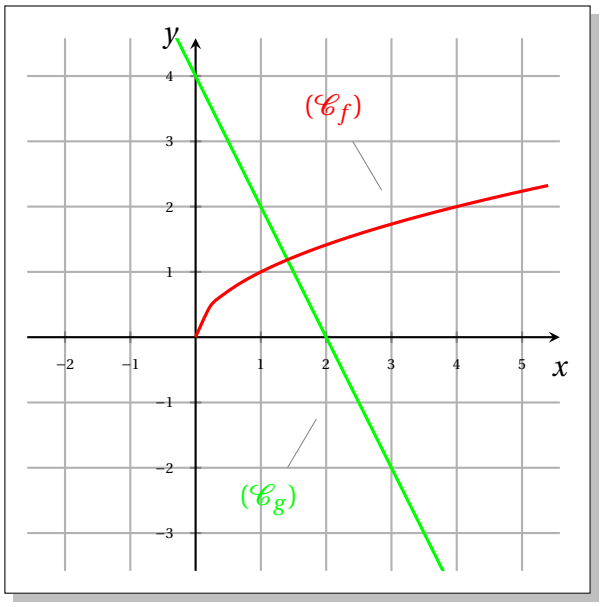
لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$

1) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$

أ) بيّن انه إذا كان $x>1$ فإن $g(x)>1$.

ب) تحقق أن $(f\circ g)(x)=h(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة g.

8 نص التمرين الحل 17



f و g دالتين معرفتين على $[0;+\infty[$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب ، (C_f) و (C_g) نمثيلهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$، كما هو موضح في الشكل.

الجزء الأول:

⋆ بقراءة بيانية عين: $(g\circ f)(4)$ و $(g\circ f)(0)$

الجزء الثاني:

لتكن $g(x)=-2x+4$ و $f(x)=\sqrt{x}$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة $g\circ f$.

3) عين $g\circ f$.

9 نص التمرين الحل 17

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	

(*) g الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$

– فكّك الدالة g إلى مركب دالتين إحداهما الدالة f ، ثم استنتج اتجاه تغيرها.

10 نص التمرين الحل 17

f و g دالتان معرفتان بجدول تغيراتهما حيث :

x	-3		0		1
$f(x)$	0	↘		↗	5
			-4		

x	-4		0		5
$g(x)$	-5	↗	0	↗	2

2) أحسب : $h(-3)$ ، $h(0)$ و $h(1)$.

3) أدرس إتجاه تغير الدالة h المجال $[-3;0]$ ثم على $[0;1]$.

11 نص التمرين الحل 18

لتكن f دالة معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{x-\frac{1}{2}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) ا) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب) عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث من اجل كل x من D_f فإن : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-\frac{1}{2}}$.

ج) باستعمال مبرهنة مركب دالتين استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجالين $]-\infty;\frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2};+\infty[$.

د) أرسم منحنى الدالة f.

2) نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x-\frac{1}{2}}}$.

ا) عيّن D_g.

ب) بيّن أن g هي مركب دالتين يطلب تعيّينهما .

ج) استنتج اتجاه تغيّر الدالة g على المجالين $]-\infty;0]$ و $]\frac{1}{2};+\infty[$.

12 نص التمرين الحل 20

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+4x+3$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) إنطلاقا من دالة مرجعية يطلب تعيينها ثم أرسمه

2) بين كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني للدوال التالية : $g(x)=f(x+2)-1$،

$h(x)=f(x-3)+3$ ، $k(x)=-f(x)$ ، $u(x)=2f(x)$ ، $v(x)=|f(x)|$.

13 نص التمرين الحل 21

لتكن f و g الدالتين العددية المعرفتين بـ: $f(x)=\sqrt{x-1}+1$ و $g(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$.

1) عين كل من D_f و D_g

2) إشرح كيف يمكن رسم (C_f) و (C_g) ثم ارسمهما

3) أنشئ التمثيل البياني للدالة k حيث : و $k(x)=|g(x)|$

4) لتكن F الدالة العددية المعرفة بـ: $F(x)=f(|x|)$

- عين مجموعة تعريف الدالة F .
- بين أن الدالة F زوجية .
- أرسم (C_F)

14 نص التمرين الحل 23

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ بـ: $\dfrac{2x+5}{x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)

2) بين أن الدالة f هي مركب دالتين يطلب تعيينهما .
3) عين إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$
4) بين أن النقطة $\omega(-2;2)$ مركز تناظر (C_f).
5) استنتج طريقة رسم (C_f)
6) لتكن g الدالة المعرفة بـ: $g(x)=f(-|x|)$

ا) عين D_g

ب) بين أن الدالة g دالة زوجية.

ج) إشرح طريقة رسم (C_g) منحنى الدالة g. ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

15 نص التمرين الحل 25

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=x^2-2x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأول:

1) عين العددين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x+a)^2+b$.
2) فكك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما.
3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
4) بين أن المنحنى البياني للدالة f هو صورة المنحنى البياني للدالة مربع بانسحاب يطلب تعيين شعاعه، ثم ارسمه.
5) مثل في نفس المعلم السابق المنحنى البياني للدالتين h و k حيث $h(x)=-|f(x)|$ و $k(x)=f(x)+2$.
6) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f) .

الجزء الثاني:

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^2-2|x|-1$.

1) بين أن الدالة g زوجية ثم فسر ذلك بيانيا.
2) أكتب عبارة g بدون القيمة المطلقة.
3) استنتج طريقة لرسم منحنى الدالة g انطلاقا من منحنى الدالة f ثم ارسمه .

16 نص التمرين الحل 27

f ، g و h ثلاث دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-6x+5$ و $g(x)=f(-|x|)$
(C_f) و (C_g) منحنيات f و g على الترتيب، الممثلة في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x-3)^2-4$
2) إشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة "مربع"، ثم أرسمه
3) أحسب $f(3-x)-f(3+x)$ ماذا تستنتج ؟
4) أ) بين أن الدالة g زوجية ،ثم إستنتج أن $f(x)=g(x)$ على مجال يطلب تعيينه

ب) إشرح كيف يمكنك إستنتاج رسم لـ (C_g) إنطلاقا من (C_f)، ثم أرسمه
5) ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(x-3)^2=4+m$

3 الأجوبة

حل التمرين رقم 1 :

1) **تعيين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية**

$$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2\}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2\neq 4\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 2 \quad \text{و} \quad x\neq -2\}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,-2\}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

مابداخل الجذر موجب تماما $x^2+2>0$ و المعادلة $x^2=-2$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و منه $D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{x}{|x-3|}$$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0 \quad \text{و} \quad |x-3|\neq 0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1 \quad \text{و} \quad x-3\neq 0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1 \quad \text{و} \quad x\neq 3\}$$
$$D_f=[1;3[\cup]3;+\infty[$$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-9\geq 0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x^2-9}\neq 0\right\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-9>0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2>3\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x|>3\}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ \frac{x+2}{x-4}\geq 0 \quad و \quad x-4\neq 0\right\}$$

دراسة إشارة $\frac{x+2}{x-4}$:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x-4}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

و منه $D_f=]-\infty;-2]\cup]4;+\infty[$

حل التمرين رقم 2 :

$$(1)\begin{cases} f(x) & =x-\dfrac{3}{x-2} \\ g(x) & =\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}\end{cases}$$

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ و منه $D_f=D_g$

و لدينا من جهة أخرى

$$f(x)=x-\frac{3}{x-2}$$
$$f(x)=\frac{x(x-2)-3}{x-2}$$
$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x-2}$$
$$f(x)=g(x)$$

و منه نستنتج أن $f=g$

$$(2)\begin{cases} f(x) & =x+2 \\ g(x) & =(\sqrt{x+2})^2\end{cases}$$

لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=[-2;+\infty[$ و منه $D_f\neq D_g$

$$(3)\begin{cases} f(x) & =2x-3 \\ g(x) & =\sqrt{(2x-3)^2}\end{cases}$$

لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$

و منه $D_f=D_g$

و لدينا من جهة أخرى

$$g(x)=\sqrt{(2x-3)^2}$$
$$g(x)=|2x-3|$$
$$g(x) \quad f(x)$$

$$(4)\begin{cases} f(x) & = |x| \\ g(x) & = \sqrt{x^2} \end{cases}$$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ و منه $D_f = D_g$
و لدينا من جهة أخرى

$$g(x) = \sqrt{x^2}$$
$$g(x) = |x|$$
$$g(x) = f(x)$$

و منه نستنتج أن $f = g$

حل التمرين رقم 3 :

1)
$$(1)\begin{cases} f(x) & = 2x-1 \\ D_f & = \mathbb{R} \end{cases} \qquad (1)\begin{cases} g(x) & = \dfrac{x+1}{x+2} \\ D_g & = \mathbb{R}-\{-2\} \end{cases}$$

تعيين $D_{f\circ g}$:

$$D_{f\circ g} = \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$$
$$D_{f\circ g} = \left\{x/x \in \mathbb{R}-\{-2\} \text{ و } \frac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$D_{f\circ g} = \{x/x \in \mathbb{R}-\{-2\} \text{ و } x+2 \neq 0\}$$
$$D_{f\circ g} = \{x/x \in \mathbb{R}-\{-2\} \text{ و } x \neq -2\}$$
$$D_{f\circ g} = \mathbb{R}-\{-2\}$$

تعيين عبارة $f\circ g$:

$$(f\circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$
$$= 2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)-1$$
$$= \frac{2x+2-x-2}{x+2}$$
$$(f\circ g)(x) = \frac{x}{x+2}$$

تعيين $D_{g\circ f}$:

$$D_{g\circ f} = \{x/x \in D_f \quad \text{و} \quad f(x) \in D_g\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad 2x-1 \in \mathbb{R}-\{-2\}\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad 2x-1 \neq -2\}$$
$$D_{g\circ f} = \left\{x/x \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$
$$D_{g\circ f} = \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

تعيين عبارة $g\circ f$:

$$(g\circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$
$$= \frac{(2x-1)+1}{(2x \quad 1) \quad 2}$$

(2 $\begin{cases} f(x) & = \dfrac{1}{x-3} \\ D_f & = \mathbb{R}-\{3\} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} g(x) & = x^2+1 \\ D_g & = \mathbb{R} \end{cases}$ (2

تعيين $D_{f\circ g}$:

$$D_{f\circ g} = \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2+1 \in \mathbb{R}-\{3\}\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2+1 \neq 3\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 \neq 2\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \neq \sqrt{2} \text{ و } x \neq -\sqrt{2}\}$$
$$D_f = \mathbb{R}-\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$$

تعيين عبارة $f\circ g$:

$$(f\circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$
$$= \frac{1}{x^2+1-3}$$
$$(f\circ g)(x) = \frac{1}{x^2+2}$$

تعيين $D_{g\circ f}$:

$$D_{g\circ f} = \{x/x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$
$$D_{g\circ f} = \left\{x/x \in \mathbb{R}-\{3\} \text{ و } \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x-3 \neq 0\}$$
$$D_{g\circ f} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \neq 3\}$$
$$D_{g\circ f} = \mathbb{R}-\{3\}$$

تعيين عبارة $g\circ f$:

$$(g\circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{x-3}\right)^2+1$$
$$(g\circ f)(x) = \frac{1}{(x-3)^2}+1$$

(3 $\begin{cases} f(x) & = \sqrt{2x+1} \\ D_f & = \left[\dfrac{-1}{2};+\infty\right[\end{cases}$ (3) $\begin{cases} g(x) & = -x+1 \\ D_g & = \mathbb{R} \end{cases}$ (3

تعيين $D_{f\circ g}$:

$$D_{f\circ g}=\{x/x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\}$$
$$D_{f\circ g}=\left\{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } -x+1\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[\right\}$$
$$D_{f\circ g}=\left\{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } -x+1\geq-\frac{1}{2}\right\}$$
$$D_{f\circ g}=\left\{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } -x\geq-\frac{3}{2}\right\}$$
$$D_{f\circ g}=\left\{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } x\leq\frac{3}{2}\right\}$$
$$D_{f\circ g}=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$$

تعيين عبارة $f\circ g$:

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)$$
$$=\sqrt{2(-x+1)+1}$$
$$(f\circ g)(x)=\sqrt{-2x+3}$$

تعيين $D_{g\circ f}$:

$$D_{g\circ f}=\{x/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$$
$$D_{g\circ f}=\left\{x/x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[\quad \text{و} \quad \sqrt{2x+1}\in\mathbb{R}\right\}$$
$$D_{g\circ f}=\left\{x/x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[\quad \text{و} \quad 2x+1\geq0\right\}$$
$$D_{g\circ f}=\left\{x/x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[\quad \text{و} \quad x\geq-\frac{1}{2}\right\}$$
$$D_{g\circ f}=\left\{x/x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[\quad \text{و} \quad x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[\right\}$$
$$D_{g\circ f}=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$$

تعيين عبارة $g\circ f$:

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)$$
$$(g\circ f)(x)=-\sqrt{2x+1}+1$$

(4) $\begin{cases} g(x) & =\dfrac{1}{2x-1} \\ D_g & =\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} f(x) & =\sqrt{x-1} \\ D_f & =[1;+\infty[\end{cases}$ (4

تعيين $D_{f\circ g}$:

$$D_{f\circ g}=\{x/x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\}$$
$$D_{f\circ g}=\left\{x/x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2x-1}\in[1;+\infty[\right\}$$

دراسة إشارة $\frac{-2x}{2x-1}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x}{2x-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

ومنه $\frac{-2x}{2x-1} \geq 0$ لما $x \in \left[0 : \frac{1}{2}\right[$

و عليه

$$D_{f\circ g} = \left\{x / x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad \text{و} \quad x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\right\}$$

$$D_{f\circ g} = \left[0; \frac{1}{2}\right[$$

تعيين عبارة $f \circ g$:

$$(f\circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2x-1} - 1}$$

$$(f\circ g)(x) = \sqrt{\frac{-2x}{2x-1}}$$

تعيين $D_g \circ f$:

$$D_{g\circ f} = \{x / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g\circ f} = \left\{x / x \in [1; +\infty[\quad \text{و} \quad \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

$$D_{g\circ f} = \left\{x / x \in [1; +\infty[\quad \text{و} \quad \sqrt{x-1} \neq \frac{1}{2}\right\}$$

$$D_{g\circ f} = \left\{x / x \in [1; +\infty[\quad \text{و} \quad x-1 \neq \frac{1}{4}\right\}$$

$$D_{g\circ f} = \left\{x / x \in [1; +\infty[\quad \text{و} \quad x \neq \frac{5}{4}\right\}$$

$$D_{g\circ f} = \left[1; \frac{5}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$$

تعيين عبارة $g \circ f$:

$$(g\circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

$$(g\circ f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}-1}$$

حل التمرين رقم 4 :

(*) تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين يُطلب تعيينهما

نفرض f مركب دالتين u و v حبث $f = v \circ u$

$$x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} (x-3)^2+1$$

❶ $f(x) = (x-3)^2 + 1$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x-3$ و $v(x)=x^2+1$

$$x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} \frac{3}{x+1}$$

$f=v\circ u$

❷ $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x+1$ و $v(x)=\dfrac{3}{x}$

$$x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} 3(x+1)^2+5$$

$f=v\circ u$

❸ $f(x)=3(x+1)^2+5$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x+1$ و $v(x)=3x^2+5$

$$x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} |x+1|-1$$

$f=v\circ u$

❹ $f(x)=|x+1|-1$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x+1$ و $v(x)=|x|-1$

$$x \xrightarrow{u} x-2 \xrightarrow{v} \cos(x-2)$$

$f=v\circ u$

❺ $f(x)=\cos(x-2)$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x-2$ و $v(x)=\cos(x)$

$$x \xrightarrow{u} \sqrt{x} \xrightarrow{v} 3\sqrt{x}+2$$

$f=v\circ u$

❻ $f(x)=3\sqrt{x}+2$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=3x+2$

$$x \xrightarrow{u} \frac{2x-1}{5} \xrightarrow{v} \left|\frac{2x-1}{5}\right|$$

$f=v\circ u$

❼ $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{5}\right|$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=\dfrac{2x-1}{5}$ و $v(x)=|x|$

حل التمرين رقم 5 :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{-x-2} \\ D_g = \mathbb{R}\setminus\{-2\} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = 2x-4 \\ D_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

$D_{f\times g}=D_g\cap D_f$ $D_{f+g}=D_g\cap D_f$ $D_{2g}=D_g$ $D_{f+5}=D_f$

$D_{f\times g}=\mathbb{R}-\{-2\}$ $D_{f+g}=\mathbb{R}-\{-2\}$ $D_{2g}=\mathbb{R}-\{-2\}$ $D_{f+5}=\mathbb{R}$

$$D_{\frac{g}{f}}=\{x/D_g\cap D_f \quad و \quad f(x)\neq 0\}$$
$$D_{\frac{g}{f}}=\{x/\mathbb{R}-\{-2\} \quad و \quad 2x-4\neq 0\}$$
$$D_{\frac{g}{f}}=\{x/\mathbb{R}-\{-2\} \quad و \quad x\neq 2\}$$
$$D_{\frac{g}{f}}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$$

حل التمرين رقم 6 :

$u(x)=-x+4$ ، $v(x)=\frac{1}{x}$ و $f=v\circ u$ حيث $D_f=]-\infty;4[$

1) **كتابة عبارة $f(x)$ بدلالة x**

$$f(x)=(v\circ u)(x)=v(u(x))=\frac{1}{-x+4}$$

2) **تعيين صورة المجال $]-\infty;4[$ بالدالة u**

من أجل كل $x\in]-\infty;4[$ معناه $x<4$ و عليه $-x>-4$ و منه $-x+4>0$ إذن $u(x)>0$ و منه $u(x)\in]0;+\infty[$ أي صورة المجال $]-\infty;4[$ بالدالة u هي المجال $]0;+\infty[$

3) **اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;4[$**

$f=v\circ u$ باستخدام اتجاه تغير مركب دالتين :

لدينا u متناقصة تماما على $]-\infty;4[$ (دالة آلفية حيث $a<0$) و مما سبق لدينا $u(x)\in]0;+\infty[$ حيث الدالة v متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;4[$

حل التمرين رقم 7 :

1) $h(x)=\frac{1}{x-1}$ ، $D_h=]1;+\infty[$

$f(x)=x-1$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ ، $D_f=D_g=]1;+\infty[$

ا) **إثبات انه إذا كان $x>1$ فإن $g(x)>1$**

x	$x-1$
$-x+1$	1
1	

إذن من أجل كل $x>1$ لدينا $g(x)=1+\frac{1}{x-1}$

و منه من أجل كل $x>1$ أي $x-1>0$ أي $\frac{1}{x-1}>0$ و عليه $1+\frac{1}{x-1}>1$ فإن $g(x)>1$

ب) **التحقق أن $(f\circ g)(x)=h(x)$**

$(f \quad g)(x) \quad f \quad g(x) \quad \frac{x}{\quad} \quad 1 \quad \frac{1}{x-1}$

باستعمال مبرهنة اتجاه تغير مركب دالتين :
الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل $x>1$ فإن $g(x)<1$ أي $g(x)\in]1;+\infty[$ حيث الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و منه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

حل التمرين رقم 8 :

الجزء الأول:

$(g\circ f)(4)=g\big(f(4)\big)=g(2)=0$ حيث $f(4)=2$ و منه $(g\circ f)(4)=g\big(f(4)\big)$ (★

$(g\circ f)(0)=g\big(f(0)\big)=g(0)=4$ حيث $f(0)=2$ و منه $(g\circ f)(0)=g\big(f(0)\big)$ (★

الجزء الثاني: $g(x)=-2x+4$ و $f(x)=\sqrt{x}$.

1) **تعيين مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$:**

$$D_{g\circ f}=\{x/x\in D_f \quad و \quad f(x)\in D_g\}$$
$$D_{g\circ f}=\{x/x\in[0;+\infty[\quad و \quad \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}$$
$$D_{g\circ f}=\{x/x\in[0;+\infty[\quad و \quad x\in[0;+\infty[\}$$
$$D_{g\circ f}=[0;+\infty[$$

2) **اتجاه تغير الدالة $g\circ f$:**

الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و لدينا من أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن $\sqrt{x}\in[0;+\infty[$ أي $f(x)\in[0;+\infty[$ حيث الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و منه الدالة $g\circ f$ متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

3) **عبارة الدالة $g\circ f$:**

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=-2\sqrt{x}+4$$

حل التمرين رقم 9 :

تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين :

$$x \xrightarrow{u} \sqrt{x} \xrightarrow{v} f\left(\sqrt{x}\right)$$

$g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$

$f=v\circ u$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=\sqrt{x}$ و الدالة $v(x)=f(x)$
الدالة $x\longmapsto\sqrt{x}$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن $\sqrt{x}\in[0;+\infty[$ و من جدول التغيرات نجد أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

حل التمرين رقم 10 :

1) **إيجاد مجموعة تعريف الدالة h حيث :**

$$D_h=\{x/x\in D_f \quad و \quad f(x)\in D_g\}$$
$$D_h=\{x/x\in[-3;1] \quad و \quad f(x)\in[-4;5]\}$$
$$D_h=\{x/x\in[-3;1] \quad و \quad -4\le f(x)\le 5\}$$
$$D_h=\ x/x\in[-3;1] \quad و \quad -3\le x\le 1$$

2) **حساب كل من : $h(-3)$ ، $h(0)$ و $h(1)$:**

من جدول التغيرات نجد

$h(-3)=g\left(f(-3)\right)=g(0)=0$ ، $h(0)=g\left(f(0)\right)=g(-4)=-5$ ، $h(1)=g\left(f(1)\right)=g(5)=2$

3) **دراسة إتجاه تغير الدالة h :**

على المجال $[-3;0]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3;0]$ حيث من أجل كل $x\in[-3;0]$ فإن $f(x)\in[-4;0]$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-4;0]$ و منه الدالة h متناقصة تماما على المجال $[-3;0]$

على المجال $[0;1]$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ حيث من أجل كل $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[-4;5]$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-4;5]$ و منه الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

حل التمرين رقم 11 :

f دالة معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{x-\frac{1}{2}}$

1) ا) تعيين D_f :

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\,x-\frac{1}{2}\neq 0\right\}$$
$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\,x\neq\frac{1}{2}\right\}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

ب) تعيين العددين الحقيقين a و b

$$\begin{array}{r|l} 2x & x-\frac{1}{2} \\ \hline -2x+1 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

و منه من أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ فإن $f(x)=2+\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$ حيث $a=2$ و $b=1$

ج) استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f

نلاحظ أن f هي مركب دالتين حيث

$$f(x)=2+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

$$x\xrightarrow{u}x-\frac{1}{2}\xrightarrow{v}2+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

$f=v\circ u$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x-\frac{1}{2}$ و $v(x)=2+\dfrac{1}{x}$

على ا $\quad ;\frac{1}{2}$

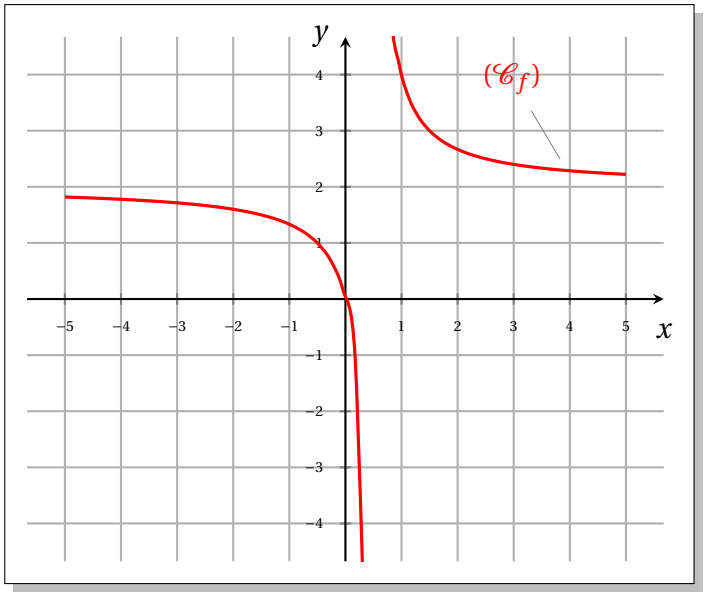
الدالة $u: x \longmapsto x-\frac{1}{2}$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}[$ و لدينا من أجل كل $x \in]-\infty;\frac{1}{2}[$ أي $x<\frac{1}{2}$ و عليه $x-\frac{1}{2}<0$ و عليه الدالة $u(x) \in]-\infty;0[$ حيث الدالة $v(x) \mapsto 2+\frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و عليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}[$

على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$

الدالة $u: x \longmapsto x-\frac{1}{2}$ متزايدة تماما على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ و لدينا من أجل كل $x \in]\frac{1}{2};+\infty[$ أي $x>\frac{1}{2}$ و عليه $x-\frac{1}{2}>0$ و عليه الدالة $u(x) \in]0;+\infty[$ حيث الدالة $v(x) \mapsto 2+\frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و عليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$

د) رسم منحنى الدالة f

(C_f) صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}$



2) نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-\frac{1}{2}}}$

ا) تعيين D_g :

$$D_g=\left\{x/\frac{2x}{x-\frac{1}{2}}>0 \quad و \quad x-\frac{1}{2}\neq 0\right\}$$

$$D_g=\left\{x/x\in]-\infty;0]\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad و \quad x\neq\frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f=]-\infty;0]\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

ب) إثبات أن أن g هي مركب دالتين :

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-\frac{1}{2}}}$$

$$x \xrightarrow{f} \frac{2x}{x-\frac{1}{2}} \xrightarrow{v} \sqrt{\frac{2x}{x-\frac{1}{2}}}$$

$$g=v\circ f$$

و منه

ج) إستنتاج اتجاه تغيّر الدالة g:

* على المجال $]-\infty;0]$

مما سبق لدينا الدالة f متناقصة تماما عل المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ فهي متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

و من أجل كل $x\in]-\infty;0]$ أي $x\leq 0$

فإن $x-\frac{1}{2}\leq -\frac{1}{2}$ بالمرور إلى المقلوب نجد $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\geq -2$ بإضافة العدد 2 نجد $2+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\geq 0$

و عليه $f(x)\geq 0$ أي $f(x)\in[0;2[$

و الدالة v متزايدة تماما على المجال $x\in[0;2[$

و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $x\in]-\infty;0]$

* على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$

مما سبق لدينا الدالة f متناقصة تماما عل المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$

و من أجل كل $]\frac{1}{2};+\infty[$ أي $x>\frac{1}{2}$ فإن $x-\frac{1}{2}>0$ أي $\frac{1}{x-\frac{1}{2}}>0$ بإضافة العدد 2 نجد $2+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}>2$ و عليه

$f(x)\in]2;+\infty[$ أي $f(x)>2$

و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ أي متزايدة تماما على المجال $]2;+\infty[$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$

حل التمرين رقم 12 :

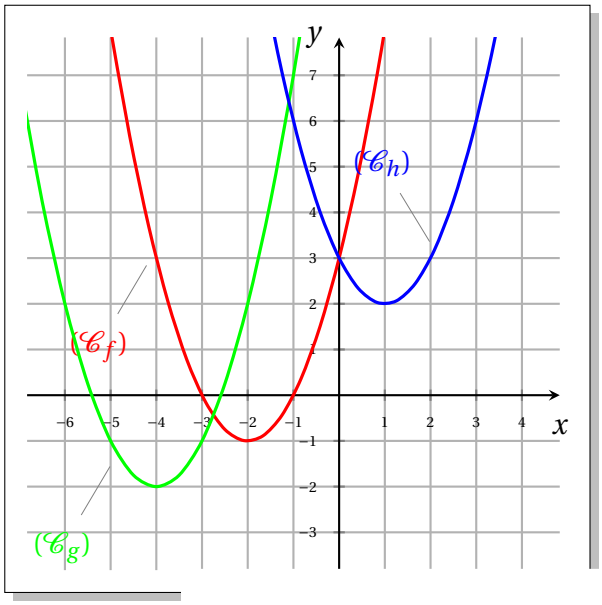
f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+4x+3$

شرح كيف يمكن إنشاء (C_f) :

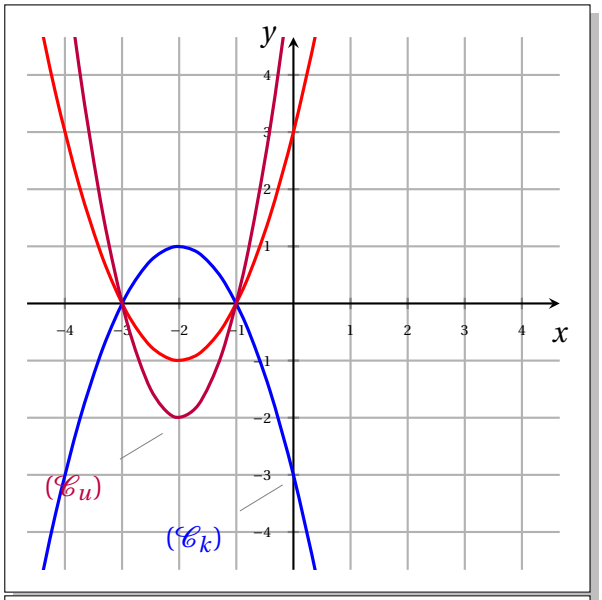
$$f(x)=x^2+4x+3$$
$$f(x)=x^2+2(2)x+3+2^2-2^2$$
$$f(x)=(x+2)^2-1$$

و منه نستنتج أن (C_f) صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=-2\vec{i}-1\vec{j}$

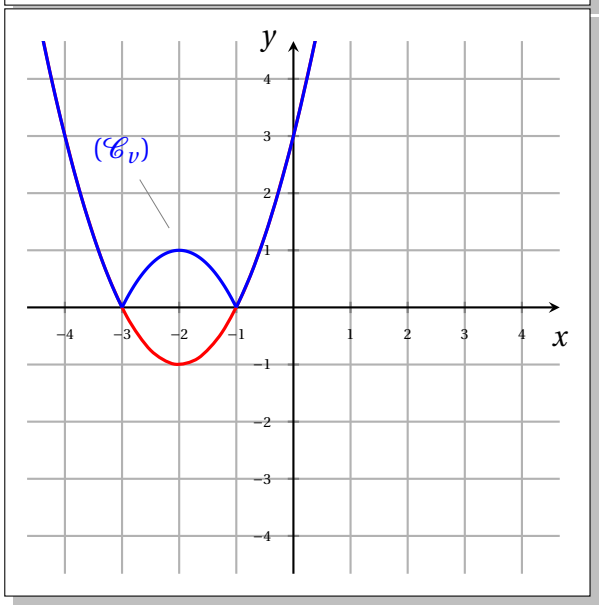
* (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=-2\vec{i}-\vec{j}$



* (C_h) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=3\vec{i}+3\vec{j}$



*) (C_k) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل
*) من أجل كل نقطة $M(x;y)$ من (C_f) نتحصل على (C_u) بضرب ترتيب M في العدد 2



$$v(x)=|f(x)|\begin{cases} f(x);\ f(x)\geq 0 \\ -f(x);\ f(x)\leq 0 \end{cases}$$

أي
$$v(x)=\begin{cases} f(x);\ x\in]-\infty;-3]\cup[-1;+\infty[\\ -f(x);\ x\in[-3;-1] \end{cases}$$

و منه (C_v) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يقع فوق محور الفواصل
أي من أجل قيم x حيث : $x\in]-\infty;-3]\cup[-1;+\infty[$
(C_v) نظير جزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل أي من أجل قيم x حيث : $[-3;-1]$

حل التمرين رقم 13 :

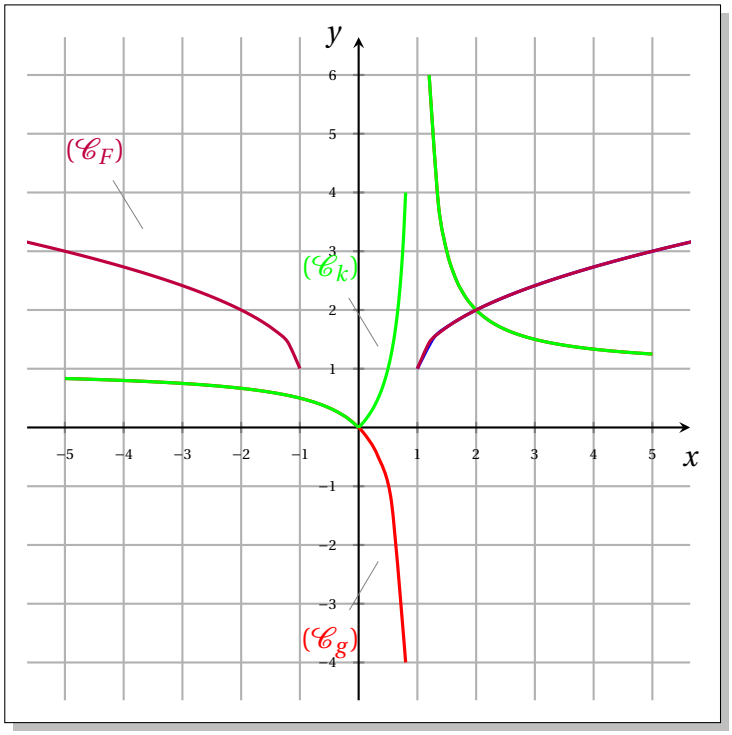
f و g دالتين عدديتين معرفتين بـ: $f(x)=\sqrt{x-1}+1$ و $g(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$.

1) **تعيين D_f و D_g:**

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x-1\geq 0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x\geq 1\}$$
$$D_f=[1;+\infty[$$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/\ x-1\neq 0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq 1\}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

2)



(C_f) صورة منحنى الدالة جذر تربيعي بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$
(C_g) صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$

3) **كيفية رسم (C_k):**

$$k(x)=|g(x)|\begin{cases} g(x);\ f(x)\geq 0 \\ -g(x);\ f(x)\leq 0 \end{cases}$$

و منه (C_k) ينطبق على (C_g) لما (C_g) يقع فوق محور الفواصل

(C_k) نظير جزء (C_g) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل

أي $$k(x)=\begin{cases} g(x);\ x\in]-\infty;0]\cup]1;+\infty[\\ -g(x);\ x\in [0;1[\end{cases}$$

4) **الدالة العددية F المعرفة بـ: $F(x)=f(|x|)$:**

ا) تعيين مجموعة تعريف الدالة F:

$$D_F=\{x\in\mathbb{R}/|x|-1\geq 0\}$$
$$D_F=\{x\in\mathbb{R}/|x|\geq 1\}$$
$$D_F=\mathbb{R}-\{-1;1\}$$
$$D_F=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$$

ب) إثبات أن الدالة F زوجية:

من أجل كل $x\in D_F$ أي $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ معناه $x\neq 1$ و $x\neq -1$ و منه $-x\neq -1$ و $-x\neq 1$

أي $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ أي $-x\in D_F$ و منه D_F متناظرة بالنسبة للصفر

و لدينا $F(-x)=\sqrt{|-x|+1}-1=\sqrt{|x|+1}-1=F(x)$

و منه الدالة F دالة زوجية أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

ج) رسم (C_F) :

$$F(x)=\begin{cases} f(x);x\geq 0 \\ f(\ \ x);x\ \ \ 0 \end{cases}$$ أي من أجل $x\geq 0$ فإن (C_F) يتطبق على (C_f)

حل التمرين رقم 14 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ بـ: $\dfrac{2x+5}{x+2}$

1) **تعيين العددين الحقيقين a و b :**

$$\begin{array}{r|l} 2x+5 & x+2 \\ \hline -2x-4 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ فإن : $f(x)=2+\dfrac{1}{x+2}$ حيث $a=2$ و $b=1$

2) **إثبات أن الدالة f هي مركب دالتين يطلب تعيينهما :**

نفرض f مركب دالتين u و v حبث $f=v\circ u$

$$x \xrightarrow{u} x+2 \xrightarrow{v} f(x)=2+\frac{1}{x+2}$$

$$f=v\circ u$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x)=x+2$ و $v(x)=2+\dfrac{1}{x}$

3) **دراسة إتجاه تغير الدالة f :**

على المجال $]-\infty;-2[$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ حيث من أجل كل $x\in]-\infty;-2[$ فإن $x<-2$ و منه $x+2<0$ اي $u(x)<0$ و عليه $U(x)\in]-\infty;0[$ و الدالة V متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2[$

على المجال $]-2;+\infty[$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$ فإن $x>-2$ و منه $x+2>0$ اي $u(x)>0$ و عليه $u(x)\in]0;+\infty[$ و الدالة v متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-2;+\infty[$

4) **إثبات أن النقطة $\omega(-2;2)$ مركز تناظر (C_f) :**

$M(x,y)$ نقطة من (C_f) حيث $y=2+\dfrac{1}{x+2}$ هي معادلة (C_f) بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (X,Y) إحداثياتها بالنسبة للمعلم $(\omega,\vec{i},\vec{j})$

باستخدام دساتير تغيير معلم يكون لدينا $\begin{cases} x=X-2 \\ y=Y+2 \end{cases}$ بتعويض قيمة x و y في معادلة منحنى الدالة f نجد عبارة الدالة f في المعلم $(\omega,\vec{i},\vec{j})$ نجد $Y+2=2+\dfrac{1}{X-2+2}$ اي $Y=\dfrac{1}{X}$

لتكن الد $\frac{1}{}$

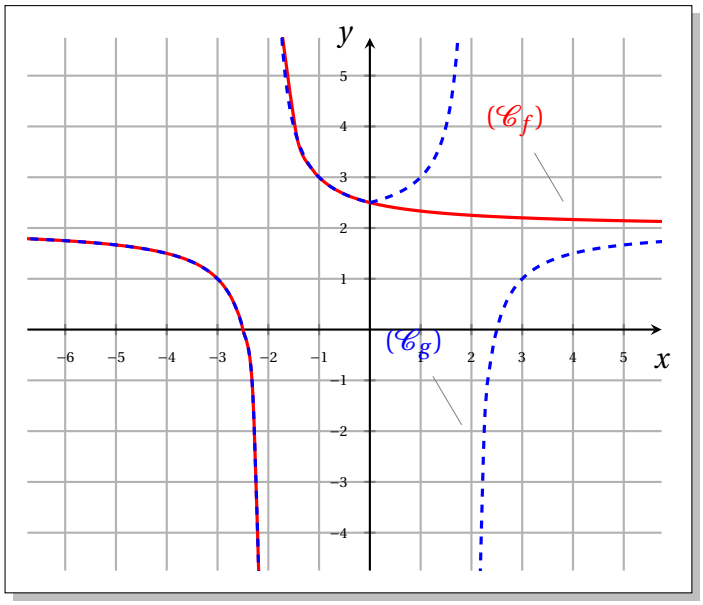
إثبات ان الدالة $F(X)$ فردية :

من أجل كل $X \in \mathbb{R}^*$ فإن $-X \in \mathbb{R}^*$ و لدينا : $F(X) = \dfrac{1}{-X} = -\dfrac{1}{X} = -F(X)$

و منه الدالة فردية و عليه النقطة $\omega(-2;2)$ مركز تناظر (C_f)

5) **طريقة رسم (C_f) :**

(C_f) صورة منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$



6) **g دالة معرفة بـ:** $g(x) = f(-|x|)$

أ) **تعيين D_g :**

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / -|x| + 2 \neq 0\}$$
$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 2\}$$
$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \quad \text{و} \quad x \neq -2\}$$
$$D_g = \mathbb{R} - \{-2;2\}$$

ب) **إثبات أن الدالة g دالة زوجية :**

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$ فإن $-x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$ و لدينا

$$g(-x) = f(-|-x|)$$
$$g(-x) = f(-|x|)$$
$$g(-x) = g(x)$$

و منه g دالة زوجية

طريقة رسم (C_g) :

$$g(x) = f(-|x|) \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

إذن

من أجل $x \in]-\infty;-2[\ \ ]-2;0]$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f)

من أج

حل التمرين رقم 15 :

1) **تعيين العددين a و b**

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$
$$f(x) = x^2 - 2(1)x - 1 + 1 - 1$$
$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$

من أجل كل عدد حقيقي فإن $f(x) = (x-1)^2 - 2$ حيث $a = -1$ و $b = -2$

2) **تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين u و v**

نفرض f مركب دالتين u و v حبث $f = v \circ u$

$$x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{u} (x-1)^2 - 2$$

$$f = v \circ u$$

و منه f مركب دالتين معرفتين بـ: $u(x) = x - 1$ و $v(x) = x^2 - 2$

3) **اتجاه تغير الدالة f**

على المجال $]-\infty;1]$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ حيث من أجل كل $x \in]-\infty;1]$ فإن $x \leq 1$ و منه $x-1 \leq 0$ اي $u(x) < 0$ و عليه $u(x) \in]-\infty;0]$ و الدالة v متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$

على المجال $[1;+\infty[$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ حيث من أجل كل $x \in [1;+\infty[$ فإن $x \geq 1$ و منه $x-1 \geq 0$ اي $u(x) \geq 0$ و عليه $u(x) \in [0;+\infty[$ و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

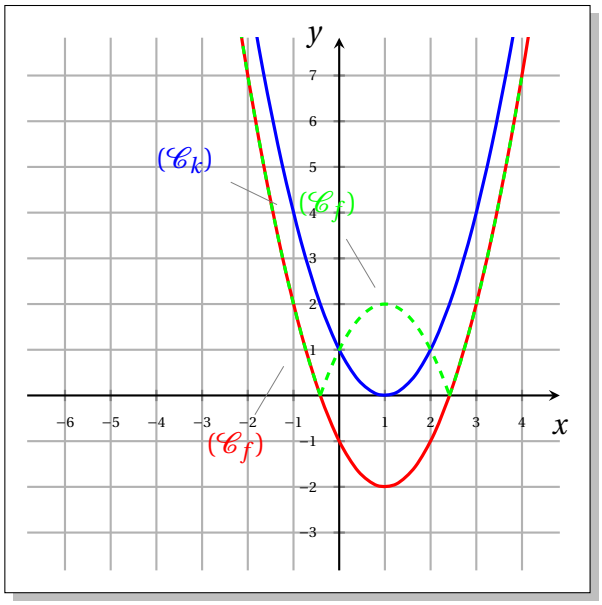
4) **إثبات أن (C_f) هو صورة المنحنى البياني للدالة مربع بانسحاب يطلب تعيين شعاعه**

من أجل كل نقطة $M(x,y)$ من منحنى الدالة f فإن معادلة (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي $y = (x-1)^2 - 2$ و منه $y + 2 = (x-1)^2$ بوضع $\begin{cases} Y = y + 2 \\ X = x - 1 \end{cases}$ المعادلة تصبح $Y = X^2$ حيث من أجل كل نقطة $M(x,y)$ من منحنى f

$\overrightarrow{M'M}\begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}$

و منه (C_f) صورة منحنى الدالة مربع بالانسحاب الذي شعاعة $\vec{i}-2\vec{j}$

رسم (C_f)



5) **تمثيل (C_h) و (C_k)**

$h(x)=-|f(x)|=\begin{cases}-f(x)\,;f(x)\geq 0\\ f(x)\,;f(x)\leq 0\end{cases}$ أي لما $f(x)\leq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f)

لما $f(x)\geq 0$ (C_h) و (C_f) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل

*) (C_k) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعة $2\vec{j}$

6) **إثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر (C_f)**

$M(x,y)$ نقطة من (C_f) حيث $y=(x-1)^2-2$ هي معادلة (C_f) بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (X,Y) إحداثياتها بالنسبة للمعلم $(\omega,\vec{i},\vec{j})$

باستخدام دساتير تغيير معلم يكون لدينا $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y-2\end{cases}$ بتعويض قيمة x و y في معادلة منحنى الدالة f نجد عبارة الدالة f في المعلم $(\omega,\vec{i},\vec{j})$ نجد $Y-2=(X-1+1)^2-2$ أي $Y=X^2$

لتكن الدالة F حيث $F(X)=X^2$

إثبان ان الدالة $F(X)$ زوجية :

من أجل كل $X\in\mathbb{R}$ فإن $-X\in\mathbb{R}$ و لدينا : $F(X)=(-X)^2=X^2$ و منه الدالة زوجية إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر (C_f)

الجزء الثاني

$g(x)=x^2-2|x|-1$

1) **إثبات أن الدالة g زوجية ثم فسر ذلك بيانيا :**

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا

$g(-x)=(-x)^2-2|-x|-1$

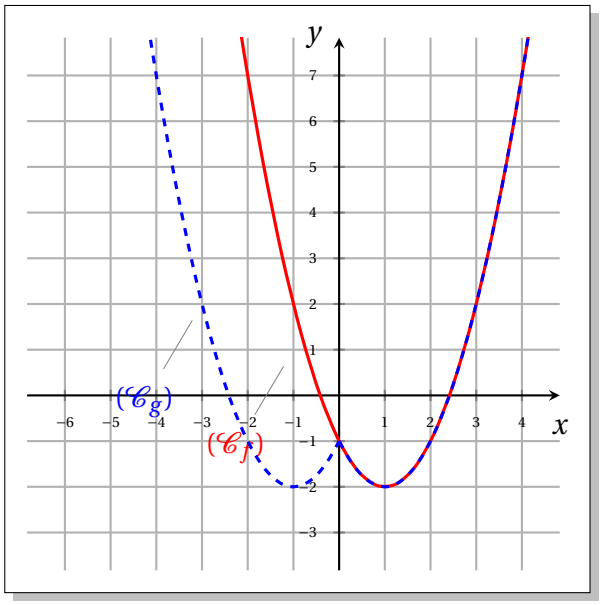
$g(-x)=x^2-2|x|-1$

$g(\quad x)\quad g(x)$

2) كتابة عبارة g بدون القيمة المطلقة :

$$g(x)=\begin{cases} g(x);\ x\geq 0 \\ x^2+2x-1;\ x\leq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad g(x)=\begin{cases} x^2-2x-1;\ x\geq 0 \\ x^2+2x-1;\ x\leq 0 \end{cases}$$

3) طريقة لرسم منحنى الدالة g انطلاقا من منحنى الدالة :



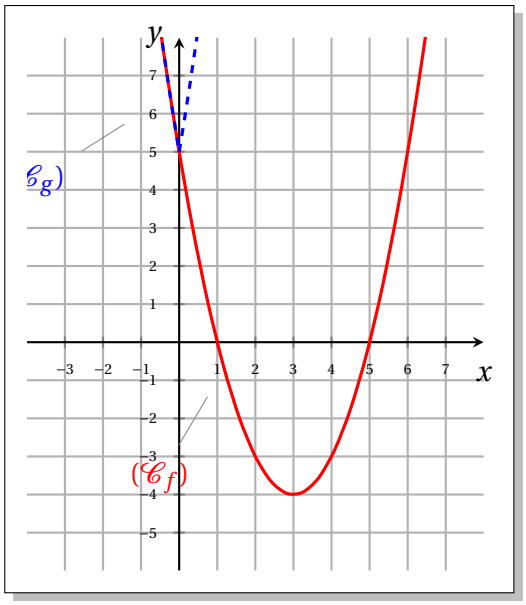
من أجل $x\geq 0$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f)
من أجل $x\leq 0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب

حل التمرين رقم 16 :

1) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x-3)^2-4$:

$$f(x)=x^2-6x+5$$
$$f(x)=x^2-2(3)x+5+3^2-3^2$$
$$f(x)=(x-3)^2-4$$

2) شرح طريقة رسم (C_f) :



(C_f) هو صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $3\vec{i}-4\vec{j}$

3) حساب $f(3-x)-f(3+x)$:

$$\begin{aligned} f(3-x)-f(3+x) &= (3-x-3)^2-4-(3-x-3)^2+4 \\ &= x^2-4-x^2+4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=3$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

4) ا) إثبات أن الدالة g زوجية

• من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و لدينا

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-|-x|) \\ g(-x) &= f(-|x|) \\ g(-x) &= g(x) \end{aligned}$$

ومنه g دالة زوجية

• من أجل كل عدد حقيقي فإن $g(x)=\begin{cases} f(-x)\,;x\geq 0 \\ f(x)\,;x\leq 0 \end{cases}$

و منه $g(x)=f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in]-\infty;0]$

ب) طريقة رسم (C_g)

من أجل $x \geq 0$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f)

من أجل $x \leq 0$ (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لانها دالة زوجية

ج) مناقشة حسب قيم m حلول المعادلة : $(x-3)^2=4+m$

$(x-3)^2=4+m$ أي $(x-3)^2-4=m$ معناه $f(x)=m$ (مناقشة أفقية)

• من أجل $m \in]-\infty;-4[$ لا يوجد حلول

• من أجل $m=-4$ يوجد حل واحد موجب

• من أجل $m \in]-4;5[$ يوجد حلين موجبين

• من أجل $m=5$ يوجد حلين أحدهما موجب و الاخر معدوم

• من أجل $m \in]5;+\infty[$ يوجد حلين أحدهما سالب و الاخر معدوم

الأستاذة نرجس مرواني
التعليم الثانوي
فروض دروس سلاسل تمارين ملخصات

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

merouaninardjiss@gmail.com الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات
0770349020 profmerouani