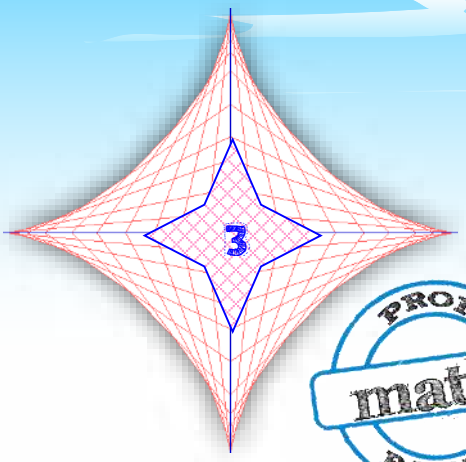


الاشتقاقية وتطبيقاتها

I. الاشتقاقية

1. العدد المشتق، دالة قابلة للاشتقاق عند عدد.

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. x_0 و x_0+h عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما

يؤول h إلى 0، أي $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

تسمى هذه النهاية **العدد المشتق للدالة f عند x_0** ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

☑ **ملاحظة:**

بوضع $x=x_0+h$ تصبح النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ كما يلي $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

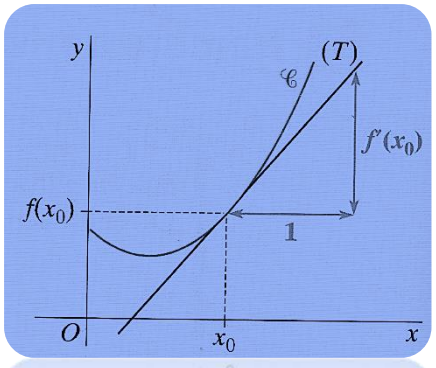
طريقة: لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند x_0 ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ لما

يؤول h إلى 0، أو ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما يؤول x إلى x_0.

☑ **نتيجة:**

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I وتسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ **الدالة المشتقة للدالة f**.

2. التفسير الهندسي للعدد المشتق (مماس لمنحنى دالة عند نقطة)



تعريف وخاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 من I فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0\,;f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته:

$$(T):y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

3. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
a (حيث a ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
ax (حيث a ثابت حقيقي)	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$

4. عمليات على الدوال المشتقة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و a عدد حقيقي.

الدالة	$f\pm g$	$a\times f$	$f\times g$	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
الدالة المشتقة	$f'\pm g'$	$a\times f'$	$f'\times g+f\times g'$	$\frac{-g'}{g^2}$	$\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$
				الدالة g لا تنعدم على I	

5. مشتقة مركب دالتين

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدالة g الاشتقاق على $f(I)$

فإن الدالة $g\circ f$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'[f(x)]$$

II. تطبيقات الاشتقاقية

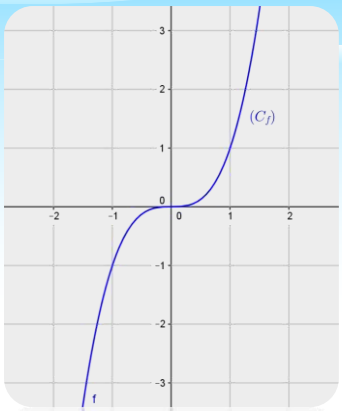


1. المشتقة واتجاه تغير دالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

☑ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من I)، فإن الدالة f متزايدة تماما على I .

☑ إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم



على سبيل المثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=3x^2$

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2. القيم الحدية المحلية

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

☑ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\le f(x_0)$.

☑ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\ge f(x_0)$.

☑ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

مبرهنة: لتكن دالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة.

☑ إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند قيمة x_0 من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I يشمل x_0 تقبل فيه f قيمة حدية $f(x_0)$.

تسمى $f(x_0)$ قيمة حدية محلية.

x	x_0	
$f'(x)$	$+$	0 $-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$ ↘

x	x_0	
$f'(x)$	$-$	0 $+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$ ↗

N.B:

☑ يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I.

☑ إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة x_0 من I فإن الرسم البياني للدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها x_0.

3. حصر دالة:

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة.

☑ إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$ $f(a)\le f(x)\le f(b)$

☑ إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x

تمرين تطبيقي: لتكن الدالة f المعرفة على $[-4,1]$ كما يلي: $f(x)=x^2+2x-1$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-4,1]$ و دالتها المشتقة f' هي: $f'(x)=2x+2$. بما أن $f'(-1)=0$

الدالة f' سالبة تماما على $[-4,-1]$ وإذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-4,-1]$.

الدالة f' موجبة تماما على $[-1,1]$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1,1]$.

جدول التغيرات:

x	-4		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	-2	↗	0

من أجل كل x من المجال $[-4,-1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(-4)$ أي $-2\le f(x)\le 7$

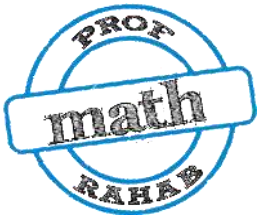
من أجل كل x من المجال $[-1,1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(2)$ أي $-2\le f(x)\le 0$

طريقة: لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على مجال $[a,b]$.

1. نبين أن الدالة f متزايدة تماما (أو متناقصة تماما) على المجال $[a,b]$
2. وبعد حساب $f(a)$ و $f(b)$ نبين أنهما من إشارتين مختلفتين.

$f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين تقر وجود x_0 و f متزايدة تماما (أو متناقصة تماما) تقر واحدية الحل x_0 .

تمرين تطبيقي: لتكن الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$.



☑ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,1]$.

☑ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.

حـل:

☑ دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,1]$

مشتقة الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0,1]$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=3x^2-6x+4$.

إشارة المشتقة f' : نضع $f'(x)=0$ هذا يكافئ $3x^2-6x+4=0$

حساب المميز Δ : $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(3)4=-12<0$

وبالتالي الدالة f' موجبة تماما على $[0,1]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$.

☑ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.

لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ إذن $f(0)$ و $f(1)$ من إشارتين مختلفتين و f متزايدة تماما على $[0,1]$.

نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[0,1]$.

4. عنصر حاد من الأعلى – عنصر حاد من الأسفل:

لتكن دالة f معرفة على مجال D_f .

☑ يسمي عدد حقيقي k عنصرا حادا من الأعلى $(Majorant)$ للدالة f على المجال D_f إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f ، $f(x)\le k$.

☑

قط إذا