المادّة: رياضيات
المستوى: 2 علوم تجريبية

التّاريخ: 2023/05/25
المدّة: ساعتين

اختبار الفصل الثّالث

التّمرين الأول: (05 نقاط)

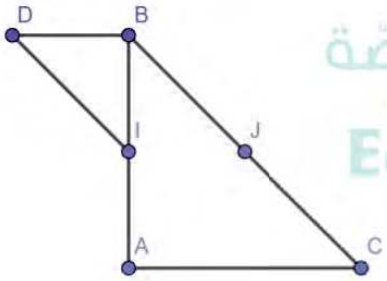
(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 5$ وبالعلاقة: $u_{n+1} = 4u_n - 3$.

و (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = \dfrac{3}{u_n - 1}$.

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$.
2. احسب v_0 ثم اكتب v_n بدلالة n.
3. بيّن أنّ $u_n = \dfrac{3}{v_n} + 1$ ثمّ استنتج u_n بدلالة n، ثمّ احسب نهايتها.
4. احسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n والجداء P_n حيث:

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ ، $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ و $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \ldots \times (u_n - 1)$.

التّمرين الثاني: (06 نقاط)



I. ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث AB = 4 و BDI مثلث قائم في B و متساوي الساقين، I منتصف $[AB]$، J منتصف $[BC]$.

احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$ ، $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID}$ و $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{ID}$.

II. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، نعتبر النّقط $A(-2;-1)$، $B(1;3)$ و $C(2;-4)$.

1. احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\|\overrightarrow{AB}\|$ و $\|\overrightarrow{AC}\|$. ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ABC.
2. اكتب معادلة الدّائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها A وتشمل النّقطة B.
3. (Δ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له.

أ. بيّن أنّ معادلة المستقيم (Δ) هي: $3x + 4y - 15 = 0$، تحقّق أنّ المستقيم (Δ) هو مماس للدائرة $(\mathscr{C})$.

ب. اكتب معادلة لكلّ من المستقيمين (Δ') و (Δ'') اللّذان يعامدان المستقيم (Δ) ويمسّان الدائرة $(\mathscr{C})$.

4. عين نقطتي ت[illegible]

$2x^2 + 2y^2 + 4$

التّمرين الثّالث: (09 نقاط)

لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ. احسب النّهايات عند حدود مجالات تعريف الدّالة f.

ب. بيّن أنّ (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة أحدها مائل (Δ) معادلته $y=x+1$، اكتب معادلة لكل من المستقيمين الآخرين.

ج. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنّسبة للمستقيم المقارب (Δ)، محدّدا إحداثيات نقطة تقاطعهما.

2. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x\neq -1$ و $x\neq 1$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

ب. ادرس تغيّرات الدّالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ. بيّن أنّ المنحنى $(\ _f\ )$ يقبل أربع مماسات معامل توجيهها -2. (لا يطلب كتابة معادلاتها)

ب. دون حساب $f''(x)$، بيّن أنّ $(\ _f\ )$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x\neq -1$ و $x\neq 1$ فإنّ: $f(-x)+f(x)=2$، ماذا تستنتج بالنّسبة للمنحنى (C_f)؟

ب. اكتب معادلة المماس $(\ \ )$ للمنحنى (C_f) عند $x_0=0$. ارسم (Δ)، $(\ \ )$ و (C_f).

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^3+x^2(m+1)-(m+1)=0$.

5. نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـــ: $g(x)=f\left(|x|\right)$، $(\ _g\ )$ تمثيلها البياني.

أ. بيّن أنّ الدالة g هي دالة زوجية.

ب. اكتب عبارة الدّالة g دون رمز القيمة المطلقة.

ج. اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) وارسمه في المعلم السابق.

بالتّوفيق

من إعداد: الأستاذ بن مسعود

Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

السنة الدراسية: 2022-2023	تصحيح اختبار الفصل الثالث	المادة: رياضيات
المستوى: 2 ع ت		الأستاذ: بن مسعود

التمرين الأول :

1) $V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1} - 1}$

$V_{n+1} = \frac{3}{4U_n - 3 - 1}$

$V_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{U_n - 1}$

$V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$

2) (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

$V_0 = \frac{3}{U_0 - 1} = \frac{3}{4}$ ومنه $V_n = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

3) لدينا : $V_n = \frac{3}{U_n - 1}$ ومنه $\frac{U_n - 1}{3} = \frac{1}{V_n}$

أي $U_n - 1 = \frac{3}{V_n}$ نجد : $U_n = \frac{3}{V_n} + 1$

في الأخير : $U_n = \frac{3}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n} + 1$

$\lim U_n = +\infty$ لأن $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

4) $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$

$S_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S'_n = \frac{3}{V_0} + 1 + \frac{3}{V_1} + 1 + \dots + \frac{3}{V_n} + 1$

$S'_n = 3\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}\right) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ مرة}}$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{3}$ وحدها الأول 4

$S'_n = 3\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)4^n\right) + n + 1$

$S'_n = 4\left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4}\right) + n + 1$

$S'_n = \frac{4}{3}\left(4^{n+1} - 1\right) + n + 1$

$P_n = (U_0 - 1)(U_1 - 1) \times \dots \times (U_n - 1)$

$P_n = \frac{3}{V_0} \times \frac{3}{V_1} \times \dots \times \frac{3}{V_n}$

$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \dots \times \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$P_n = \frac{3^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+\dots+n}}$

$P_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}} = 4^{\frac{n^2+3n+2}{2}}$

التمرين الثاني :

I) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ (متعامدان)

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BA} = -AB^2 = -16$

$\vec{AI} \cdot \vec{CJ} = \vec{AI} \cdot \vec{AI} = AI^2 = 4$ ($\vec{AI}$ هو المسقط العمودي لـ $\vec{CJ}$ على (AI))

$\vec{AC} \cdot \vec{JI} = -AC \times JI = -8$

$\vec{AC} \cdot \vec{ID} = AC \times ID \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -8$

$\vec{AJ} \cdot \vec{ID} = 0$ (متعامدان)

II) 1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ و $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 - 12 = 0$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $\quad \|\vec{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

2) (C) مركزها $A(-2,-1)$ نصف قطرها $r = AB = 5$

ومنه $(C) : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$

3) $(\Delta) : -3x - 4y + c = 0$

نعوض بإحداثيات B نجد : $c = 15$

ومنه $(\Delta) : 3x + 4y - 15 = 0$

$d(I, \Delta) = \frac{|3(-2) + 4(-1) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 = r$

ومنه (Δ) مماس لـ (C)

$4x - 3y + c$

www.ecol

(Δ) و (Δ') يمسان (C) معناه

$$d(\Delta;A) = d(\Delta',A) = \frac{|4(-2)-3(-1)+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5$$

ومنه $|-5+c| = 25$

$-5+c = 25$ أو $-5+c = -25$

$c = 30$ أو $c = -20$

في الأخير:

$(\Delta'): 4x-3y-20=0$ و $(\Delta): 4x-3y+30=0$

4) $x = 1-2y$ ∈ $\begin{cases} x+2y-1=0 & \cdots (1) \\ (x+2)^2+(y+1)^2=25 & \cdots (2) \end{cases}$

نعوض في (2)

$(3-2y)^2+(y+1)^2=25$

ننشر ونبسط نجد:

$y^2-2y-3=0$

نقبل حلين:

$y=-1$ أو $y=3$

ونجد $x=3$ أو $x=-5$

ومنه $(3,-1)$ و $(-5,3)$ هما نقطتي التقاطع.

5) $x^2+y^2+2mx+m=0$

$a=2m$, $b=0$, $c=m$

$\frac{a^2+b^2-4c}{4} = m^2-m$

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
m^2-m		$+$	$\oint$	$-$	$\oint$	$+$	

$m \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$: (C) دائرة مركزها $\Omega(-m,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{m^2-m}$

$m \in]0;1[$: مجموعة خالية

$m=1$ النقطة $(-1,0)$

$m=0$: النقطة $(0,0)$

التمرين الثالث:

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$

ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

(Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

و (C) يقبل مستقيمين مقاربين آخرين هما $x=1$ و $x=-1$

د) الوضعية

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	$\oint$	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	$\oint$	$-$		$-$	$\oint$	$+$	
$f(x)-y$		$-$	‖	$+$	$\oint$	$-$	‖	$+$	

$f(x)-y = \frac{x}{x^2-1}$

$x \in]-\infty;-1[\cup]0;1[$: (C) تقع تحت (Δ)

$x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[$: (C) فوق (Δ)

$x=0$: (C) و (Δ)

---

2) أ) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; f قابلة للاشتقاق على D_f

$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2-1)-(2x)(x^3+x^2-1)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

ب)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2	$+$		6	$-$	4	$-$	0	$-$	4	$-$	6	$+$	
x^2-3	$+$		0	$-$	-2	$-$	-3	$-$	-2	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$		$\oint$	$-$	‖	$-$	$\oint$	$-$	‖	$-$	$\oint$	$+$	

f متزايد تماما على المجالين $]-\infty;-\sqrt{3}[$ و $]\sqrt{3};+\infty[$

f متناقصة تماما على المجالات $]-\sqrt{3};-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;\sqrt{3}[$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\oint$	$-$	‖	$-$	$\oint$	$-$	‖	$-$	$\oint$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-3,6$	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	$3,6$	↗	$+\infty$

3) أ) $f'(x) = -2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = -2$

نبسط نجد $3x^4-7x^2+2=0$

بوضع $X=x^2$ نجد $3X^2-7X+2=0$

تقبل حلين

$X=\frac{1}{3}$ أو $X=2$

$x^2=\frac{1}{3}$ أو $x^2=2$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

ومنه (C) يقبل أربع مماسات معاملها -2.

ب) $f'(x)$ تنعدم عند $x_0=0$ وتغير إشارتها

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف هي $A(0,1)$

4) أ) $f(-x)+f(x) = \frac{-x^3+x^2-1}{x^2-1} + \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

$= \frac{2x^2-2}{x^2-1} = 2$

بما أن $f(-x)+f(x)=2$

فإن (C) يقبل مركز تناظر هي النقطة $A(0,1)$

ب) معادلة (T):

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

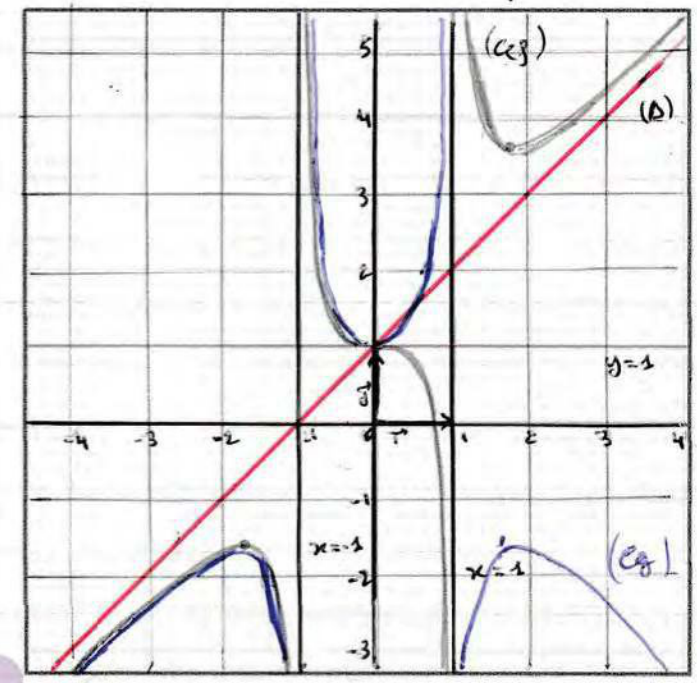
$y = 0(x-0)+1$

$y=1$

هو مماس (C) في A.

مدرسة الرجاء والتفوق للإعلامية
Ecole Erradja wa Tafaouk
www.ecol

* الرسم :



ج)

$$x^3+mx^2+x^2-m-1=0$$
$$x^3+x^2-1=-mx^2+m$$
$$x^3+x^2-1=(x^2-1)(-m)$$
$$\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=-m$$
$$f(x)=-m$$

مناقشة أفقية (تقاطع (C_f) مع المستقيمات $y=-m$)

* لما $-m<1-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ثلاث حلول، حلين سالبين
أي $m>\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ وحل موجب

* لما $-m=1-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ حلين أحدهما موجب
أي $m=\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ والآخر مضاعف سالب

* لما $1-\frac{3}{2}\sqrt{3}<-m<1$
أي $-1<m<\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ حل وحيد موجب

* لما $-m=1$
أي $m=-1$ حل وحيد معدوم

* لما $1<-m<1+\frac{3}{2}\sqrt{3}$ حل وحيد سالب
أي $-1-\frac{3}{2}\sqrt{3}<m<-1$

* لما $-m=\frac{3}{2}\sqrt{3}+1$ حلين أحدهما سالب
أي $m=-\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$ والآخر مضاعف موجب

* لما $-m>1+\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ثلاث حلول، حلين موجبين
أي : $\frac{3}{2}\sqrt{3}-1$

5) أ) مجموعة تعريف الدالة g متناظرة بالنسبة للصفر

$$g(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=g(x)$$

ومنه g دالة زوجية

ب)

$$g(x)=\begin{cases} f(-x)=\dfrac{-x^3+x^2-1}{x^2-1} & \text{لما } 1>x\geq 0 \text{ أو } x>1 \\ f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1} & \text{لما } -1<x<0 \text{ أو } x<-1 \end{cases}$$

ج)

لما $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ (C_g) منطبق على (C_f)
لأن $g(x)=f(x)$

ولما $x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$ ، بما أن g زوجية فإن (C_g) يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

انتهى

الأستاذ بن مسعود

مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE