# العمل و الطاقة الحركية الدورانية
## خاص بشعبتي الرياضي و التقني رياضي

**مفاهيم وتعاريف :**

**1- تعريف النقطة مادية :**

هي كل جسم مادي تكون أبعاده مهملة في دراسته.

تعريف الحركة الدائرية: يكون جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت, إذا كانت كل نقطة من نقاطه في حركة دائرية ممركزة على هذا المحور

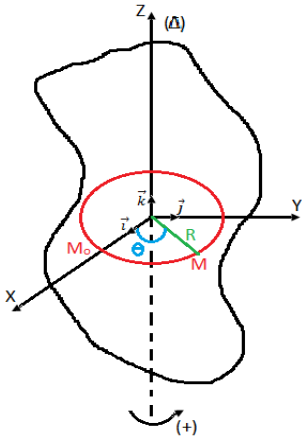
**2- مميزات الحركة الدائرية لنقطة مادية:**

أ- الفاصلة الزاوية والفاصلة المنحنية :

نختار معلما متعامدا ممنظما $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بحيث تنطبق $\vec{k}$ مع محور الدوران, وينطبق المستوى $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مع مستوى مسار النقطة M.

نعتبر المحور OX اتجاها مرجعيا.

تشير علامة (+) إلى المنحى الموجب. وبالتالي يمكن تحديد موقع النقطة M في كل لحظة ب:




الفاصلة المنحنية : $S = \overset{\frown}{M_0M}$ (m)

الفاصلة الزاوية : $\theta = (\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM})$ (rad) ب:

ملاحظة: الفاصلة المنحنية و الفاصلة الزاوية مقادير جبرية.

ب- العلاقة بين الفاصلة المنحنية S والفاصلة الزاوية θ :

ينتقل جسم نقطي من الموضع $M_1$ في اللحظة $t_1$ الى الموضع $M_2$ في اللحظة $t_2$ .

المسافة المقطوعة على المسار بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ ممثلة بالقوس $\overset{\frown}{M_1M_2}$ $s_2 - s_1 = \Delta s = M_1M_2$

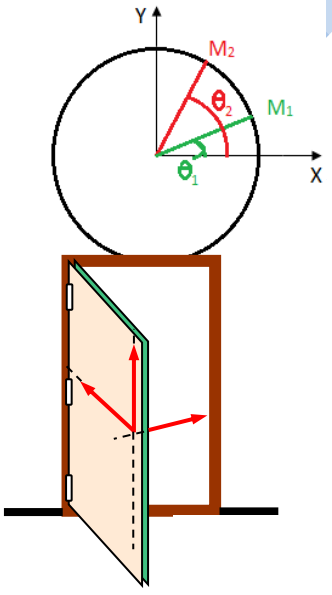
الزاوية الممسوحة بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ ممثلة بالقيمة : $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ اذن العلاقة بين الفاصلة المنحنية والفاصلة الزاوية تعطى: $S = R.\Theta$

ج- السرعة :

| السرعة الخطية المتوسطة $V_m$ | السرعة الزاوية المتوسطة |
|---|---|
| $V_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ | $w_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$ |
| $V_m$ : السرعة الخطية المتوسطة (m/s) | $w_m$ : السرعة الخطية المتوسطة (rad/s) |
| $\Delta S$ : المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ (m) | $\Delta\theta$ : الزاوية الممسوحة بين اللحظتين $t_1$ و $t_2$ (rad) |
| $\Delta t$ : المدة الزمنية (s) | $\Delta t$ : المدة الزمنية (s) |

**العلاقة بين السرعة المتوسطة و السرعة الزاوية المتوسطة :** $v_i = R\omega_i$

* وحدة القياس : نعبر في نظام الوحدات الدولية على الزاوية بالراديان (rd) والزمن بالثانية (s) فتكون وحدة السرعة الزاوية الراديان على الثانية (rd / s) . كما نعبر على طول القوس Δs بالمتر (m) والزمن Δt بالثانية (s) فتكون وحدة السرعة (m / s) .




**3- عزم قوة بالنسبة لمحور دوران ثابت :**

أ- مفهوم العزم :(نشاط الكتاب المدرسي ص 54) .

أمسك بابا من مقبضه و طبق عليه قوة نحو الأعلى بحيث يكون حامل القوة موازيا لمحور دوران الباب . هل يدور الباب؟

غير الآن اتجاه القوة بحيث يقطع حاملها محور دوران هذا الباب . هل يدور الباب؟

كيف يجب أن يكون اتجاه القوة حتى يكون لها فعل على دوران الباب؟

طبق هذه المرة قوة كيفية F على مقبض الباب بحيث لا يقطع حاملها محور دوران الباب و ليست موازية له. هل لهذه القوة أثر؟ ماذا تستنتج؟ .

نتيجة

حتى يكون لقوة F مطبقة على جسم صلب متحرك حول محور ثابت أثر دوراني على حركته يجب أن لا تكون هذه القوة موازية لمحور الدوران ولا يقطع حاملها هذا المحور.نقول أن لقوة F عزم بالنسبة لهذا المحور اذاكان لها أثر على دوران هذا الجسم. نرمز لعزم قوة بالنسبة لمحور $\Delta$ بالرمز $M_{F/\Delta}$

يحسب عزم قوة F بالنسبة لمحور $\Delta$ بجداء شدة هذه القوة في البعد العمودي بين حامل هذه القوة والمحور. وتكتب عبارة عزم القوة على

الشكل: $M_{\Delta}(\overrightarrow{F}) = \pm F.d$ حيث : d البعد العمودي (m) بين حامل F و $\Delta$ و F: شدة القوة (N)

## 4- مزدوجة قوتين :

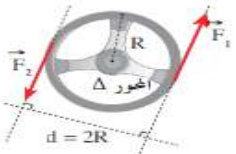
### أ- تعريف المزدوجة :

المزدوجة مجموعة قوتين بحيث تكون متساويتين في الشدة ومتعاكستين في الاتجاه وحاملهما متوازي ولها عزم غير منعدم.( الشكلين 1-2) .

أمثلة: مزدوجة محرك, مزدوجة الكبح, مزدوجة اللف.



الشكل -1-



الشكل -2-

### ب- عزم مزدوجة :

نشاط :

تؤثر مزدوجة قوتين $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ على مقود سيارة نصف قطره R .

1- اختر اتجاه دوران موجب.

2- أوجد عزم القوة $\vec{F_1}$ بالنسبة لمحور الدوران.

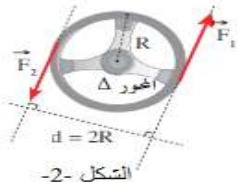
3- أوجد عزم القوة $\vec{F_2}$ بالنسبة لمحور الدوران.

4- أوجد مجموع عزمي القوتين.

5- استنتج عبارة عزم مزدوجة.



الشكل -1-



الشكل -2-

تحليل النشاط :

1- اتجاه دوران موجب موضح بالشكل - 2-

2- عزم القوة $\vec{F_1}$ بالنسبة لمحور الدوران $\Delta$ هو $M_{F_1/\Delta} = F_1.R$

3- عزم القوة $\vec{F_2}$ بالنسبة لمحور الدوران $\Delta$هو $M_{F_2/\Delta} = F_2.R$

4- مجموع عزمي القوتين:

$$M_C = M_1 + M_2$$

$$M_C = F_1.R + F_2.R$$

بما أن: $F = F_2 = F$ فإن:

$$M_C = F(R + R) = F(2R)$$ أي أن : $M_{C/\Delta} = Fd$

حيث: d هي المسافة (البعد العمودي ) بين حاملي القوتين $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$

الاستنتاج

يرجع حساب عزم مزدوجة قوتين $(\overrightarrow{F1}, \overrightarrow{F2})$ تؤثر على جسم صلب يدور حول محور $\Delta$ إلى حساب المجموع الجبري لـ عزمي القوتين .يتعلق عزم هذه المزدوجة بشدة إحدى القوتين وذراع المزدوجة الذي هوالبعد العمودي بين حاملي القوتين . وتكتب العبارة على الشكل :

$$M_C/\Delta = F.d$$ .

حيث : $F = F_2 = F$ : هي شدة احدى قوى المزدوجتين تقدر بالنيوتن:(N) و d :هي المسافة (البعد العمودي بين حامل القوتين) يقدر بالمتر(m).

ملاحظة :

لا يتعلق عزم مزدوجة قوتين موجودتين في المستوي العمودي على محور الدوران $\Delta$ لجسم صلب بموضع هذا المحور.

يحسب عزم المزدوجة بجداء شدة إحدى القوتين في البعد العمودي d بين حاملي القوتين : $M_{\Delta}(\overrightarrow{F}) = \pm F.d$

## 5- عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور ثابت: (عمل مخبري).

### أ- مركز الكتل :

تعريف : يعرف مركز كتل جملة نقاط مادية كتلة كل منها ..... $m_1, m_2, m_3, \ldots$ وموضع كل منها على التوالي .... $M_1, M_2, M_3, \ldots$ على أنه مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $M_i$ المرفقة بالكتل $m_i$. إذا اعتبرنا موضع مركز الكتل النقطة C يحسب موضعه بالعبارة التالية :

$$m_1\overrightarrow{CM_1} + m_2\overrightarrow{CM_2} + m_3\overrightarrow{CM_3} + \ldots\ldots = \overrightarrow{0}$$

بالنسبة لنقطة O نختارها كمبدأ تكتب العلاقة السابقة على الشكل :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum m_i}{\sum m_i}\overrightarrow{OM_{i\rightarrow}}$$

## ب- مركز العطالة :

نشاط:

ضع صفيحة من زجاج على طاولة ثم خذ قطعة صابون واغرز فيها ثلاثة أعمدة صغيرة ( أعواد ثقاب مثلا ) في مواضع مختلفة حيث أحد الأعمدة يكون في مركز القطعة؛ بلل قطعة الصابون ثم ضعها على اللوح الزجاجي وادفعها لتتحرك عليه .

1- هل لكل الأعمدة مسارات متشابهة خلال الحركة ؟

- مسارات الأعمدة غير متشابهة خلال الحركة .

2- ماهو العمود الذي له مسار خاص ؟ وما نوع هذا المسار ؟

- العمود الذي له مسار خاص يقع في مركز القطعة و له مسار مستقيم .

الاستنتاج

في الأجسام الصلبة التي نعتبرها مجموعة نقط مادية , توجد نقطة واحدة لها حركة خاصة ( حركة مستقيمة منتظمة إذا كانت الجملة معزولة ) ندعوها مركز عطالة الجملة ونرمز لها عادة بالرمز C . إذا كانت الكتلة لا تتعلق بسرعة الجسم كما هو الحال في دراستنا , ينطبق مركز العطالة على مركز الكتل .

## ج- عطالة الأجسام الصلبة :

نشاط1:

خذ عربتين متماثلتين وضع عليهما إناءين متماثلين فارغين .

أملأ أحد الإناءين بالرمل والأخر بالصوف .

ادفع بيدك العربة الأولى , ثم ادفع بنفس الكيفية العربة الثانية ليتحركا بحركة انسحابية .

- ما هي العربة التي أحسست أنها تسارعت حركتها أكثر عند الإقلاع ؟ - العربة المحملة بالصوف .
- ما هي العربة التي أحسست أنها تقاوم أكثر التغير في السرعة ؟ - العربة الثقيلة .
- في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الانسحابي ؟ - تتعلق هذه المقاومة للأثر الانسحابي بالكتلة .

نشاط 2:

1) خذ قرصين متماثلين ( نفس القطر ونفس السمك ) واحد من خشب والأخر من رصاص مثلا .

اجعل كل قرص يدور حول محور أفقي يمر من مركزه .

طبق على حافة كل قرص وبنفس الكيفية قوة لها قيمة تجعلهما يدوران حول هذين المحورين .

أي قرص يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة ؟

القرص الذي يبدي مقاومة أكبر هو القرص الثقيل .

في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني ؟

تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني بالكتلة

2) خذ كمية من الجبس امزجه بالماء ثم اقسمه إلى نصفي متساويين .

اصنع بهما قرصين أحدهما قطره R والآخر قطره 2R تقريبا .

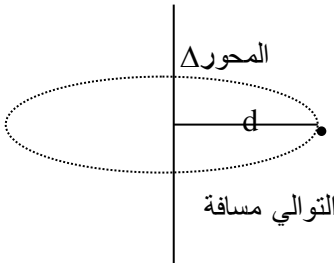
طبق على حافة كل قرص وبنفس الكيفية قوة لها نفس الشدة تجعلهما يدوران حول محوريهما.

- أي قرص يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني للقوة ؟
- القرص الذي يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة هو الصغير في نصف القطر.
- في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني ؟
- تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني بنصف القطر .

نتيجة

تبدي الأجسام الصلبة المتحركة حول محور( Δ ) مقاومة للأثر الدوراني للقوة المطبقة عليها ندعوها العطالة الدورانية . تتعلق هذه العطالة في الأجسام الصلبة بكتلة وبنصف قطر الجسم .

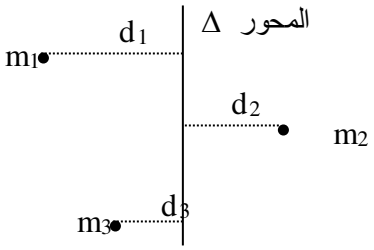
## د- عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور ثابت:




يعرف عزم العطالة $J_{/\Delta}$ بالنسبة للمحور Δ لجسم نقطي كتلته m ويبعد مسافة عمودية d عن هذا المحور بالعبارة التالية : $J_{/\Delta} = md^2$

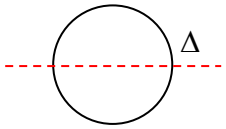
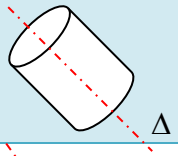
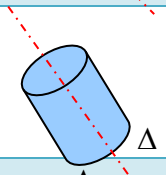
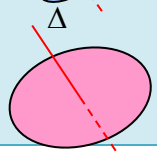
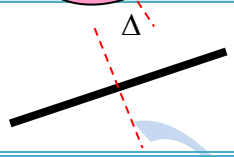
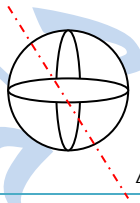
وحدة عزم العطالة في النظام الدولي هي : $kg \cdot m^2$

يحسب عزم عطالة جملة نقاط مادية كتلة كل نقطة $m_1 , m_2 , m_3 \ldots$ تبعد كل منها عن محور الدوران على التوالي مسافة عمودية $d_1 , d_2 , d_3 \ldots$ بمجموع عزوم عطالة كل نقطة بالنسبة لنفس المحور : $J_{/\Delta} = \Sigma m_i d_i^2$




عزم عطالة بعض الأجسام الصلبة المتجانسة بالنسبة لمحور مار من مركزها:

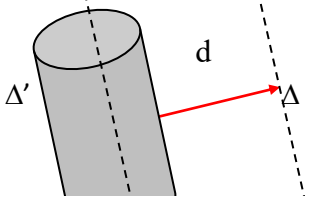
يوضح الجدول التالي عزم عطالة الأجسام بالنسبة لمحورΔ مار من مركز عطالتها :

| الجسم | المحور | عزم العطالة | الشكل |
|---|---|---|---|
| حلقة نصف قطرها R وكتلتها M | محور الحلقة | $J_{/\Delta} = MR^2$ |  |
| حلقة نصف قطرها R وكتلتها M | محور قطري | $J_{/\Delta} = 1/2\ MR^2$ |  |
| أسطوانة مجوفة نصف قطرها R وكتلتها M | محور الأسطوانة | $J_{/\Delta} = MR^2$ |  |
| أسطوانة مصمتة نصف قطرها R وكتلتها M | محور الأسطوانة | $J_{/\Delta} = 1/2\ MR^2$ |  |
| قرص نصف قطره R وكتلته M | محور القرص | $J_{/\Delta} = 1/2\ MR^2$ |  |
| قضيب كتلته M و طوله L . | محور عمودي على القضيب ويمر من منتصفه | $J_{/\Delta} = 1/12\ ML^2$ |  |
| كرة مصمتة نصف قطرها R وكتلتها M | محور يمر من مركزها | $J_{/\Delta} = 2/5\ MR^2$ |  |

حالة دوران جسم حول محورΔ ليمر من مركزعطالته :

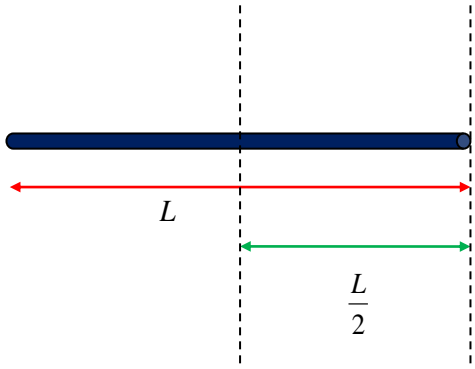
نظرية هويغنز:

عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور(Δ') لا يمر من مركزه يساوي عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحور Δ مار من مركز الجسم و يوازي المحور (Δ' ) زائدا جداء كتلة الجسم في مربع المسافة الفاصلة بين هذين المحورين : $J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + Md^2$



تطبيق :

أوجد عزم عطالة ساق طولها L وكتلتها m بالنسبة لمحور $\Delta'$ عمودي على مستويها ومار من أحد طرفيها .



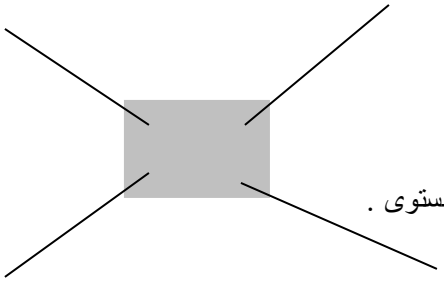

الحل: بتطبيق نظرية هويغنز:

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + md^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$J_{/\Delta'} = \frac{1}{3}mL^2$$

## 6- شروط توازن جسم صلب خاضع لعدة قوى: (عمل مخبري).



نشاط1: خذ جسما خفيفا من فلين أو "بوليستران"

استعن بزميلك وطبقا عليه أربع قوى كيفية بواسطة خيوط مطاطية .

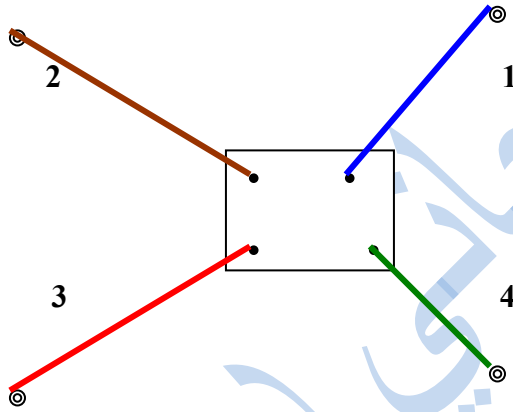
حقق توازن الجسم في وضعية كيفية للأيدي

هل يمكنكما الحصول على توازن حيث لا تكون حوامل القوى في نفس المستوى ؟

نشاط2 : للقيام بالحسابات نقتصر على دراسة أوضاع التوازن التي تكون فيها القوى في نفس المستوى .

خذ ورق مقوى , طبق أربع قوى بواسطة خيوط مطاطية مثبتة بدبابيس على لوح من خشب عليه ورقة بيضاء تسمح لك بتعيين موضع الجسم والخيوط .

1- علم على الورقة بقلم شكل الجسم وحوامل الخيوط المطاطية ونقاط تثبيتها . رقم المطاطات .




2- استنتج شدة القوى المطبقة على الجسم باستعمال القارورة المعايرة

3- مثل على الورقة أشعة القوى المطبقة على الجسم باختيار سلم .

4- جد المجموع الشعاعي للقوى الأربع . ماذا تلاحظ ؟ - نلاحظ أنه معدوم.

5- احسب عزم كل قوة بالنسبة إلى نقطة كيفية تختارها .

6- احسب المجموع الجبري لهذه العزوم . ماذا تلاحظ ؟ نلاحظ أنه معدوم .

7- استنتج عبارتي شرطي التوازن .

- عبارتي شرط توازن جسم صلب خاضع لعدةقوى تقع في نفس المستوى هما:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \quad *$$

$$M_{/\Delta} = M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} + M_{F4/\Delta} = 0 \quad *$$

8- هل يبقى الجسم في حالة توازن إذا تحقق شرط واحد من شرطي التوازن ؟

9- اقترح طريقة عملية تبين فيها ذلك .

نشاط 3

عوض في التجربة السابقة قوتين بقوة واحدة (عوض المطاطين 1و 2 بمطاط واحد 5 ) محافظا على نفس وضعية توازن الجسم السابق (المرسوم على الورقة ) . لتعيين خصائص هذه القوة نتبع المراحل التالية :

تعيين حامل هذه القوة :

1- ارسم على الورقة المجموع الشعاعي للقوتين المحذوفتين .

2- كيف يجب أن يكون حامل المطاط 5 لتحقيق التوازن ؟

* يجب أن يكون حامل المطاط 5 موازيا لحامل القوة $F_5$ التي تمثل المجموع الشعاعي للقوتين المحذوفتين .

تعيين نقطة تطبيق هذه القوة :

استعمل شرط التوازن الثاني $\Sigma M_{F/\Delta} = 0$ لتعيين نقطة تثبيت الخيط المطاطي 5 على الجسم حتى يتحقق التوازن السابق . ( يخضع الجسم لتأثير الخيوط المطاطية 3 , 4 , 5) .

تعيين شدة هذه القوة :

حقق التوازن المطلوب بسحب المطاط 5 دون تغيير استطالتي المطاطين 3 و 4 .

استنتج شدة وجهة هذه القوة .

مدد على الورقة حوامل القوى الثلاث . ماذا تلاحظ ؟

* عند تمديد حوامل القوى الثلاث نجد أنها تلتقي في نقطة واحدة .

- هل عبارتي شرطي توازن الجسم الصلب تبقى محققة ؟

* نعم .

- استنتج صيغة أخرى لشرطي توازن جسم صلب خاضع لثلاثة قوى غير متوازية .

* $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

* أن تكون القوى الثلاثة متقاطعة في نفس النقطة .

نتيجة

يكون جسما صلبا خاضعا لعدة قوى في حالة توازن في معلم عطالي إذا كان :

1- كل القوى المؤثرة عليه تقع في نفس المستوى .

2- المجموع الشعاعي للقوى المطبقة على الجسم معدوم : $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

3- المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة عليه معدوم : $\sum M_{F/\Delta} = 0$ .

## 6-عبارة عمل مزدوجة :

عمل قوة ذات عزم ثابت لمزدوجة :

عندما يدور الجسم بزاوية صغيرة $d\theta$, تقطع نقطة تأثير القوة $\vec{F}$ قوسا صغيرا $\widehat{M_1M_2}$ يمكن اعتباره مستقيميا ونعبر عنه ب $\vec{dl}$.

باعتبار أن $\vec{F}$ تقريبا ثابتة, نعبر عن العمل الجزئي ب:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dl} \qquad \Longleftarrow \quad \delta W = F.dl.\cos\alpha$$

نعلم أن: $dl = Rd\theta$ $\Longleftarrow$ $\delta W = F.R\cos\alpha.d\theta$

حسب الشكل لدينا: $d = R\cos\alpha$ ولدينا $M_\Delta(\vec{F}) = F.d$

إذن: $\delta W = M_\Delta(\vec{F}).d\theta$

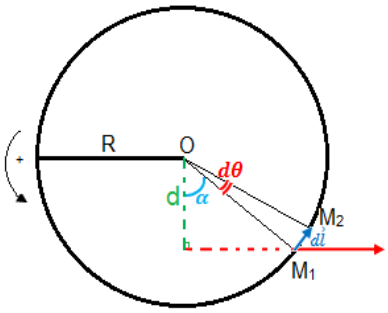
عند دوران الجسم بزاوية $\Delta\theta$, تنجز القوة $\vec{F}$ عملا مساويا لمجموع الأعمال الجزئية :

بما أن: $W(\vec{F}) = \sum M_\Delta(\vec{F}).d\theta$ فإن: $M_\Delta(\vec{F}) =$

$$W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F})\sum.d\theta$$

وبالتالي :

$$W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\Delta\theta$$




بإتباع نفس المنهجية السابقة نبين أن العمل الجزئي لمزدوجة هو: $\delta W = M_\Delta.d$

بالنسبة لدوران بزاوية $\Delta\theta$, يكون عمل المزدوجة هو $W = \sum \delta W_i$

نعلم أن العزم ثابت وبالتالي تعطى عبارة عمل مزدوجة ذات عزم ثابت بالعبارة: $W = M_\Delta.\Delta\theta$

## 7- الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت :

نعتبر جسما صلبا (S) في دوران حول محور ثابت ($\Delta$) بسرعة زاوية $\omega$

كل نقطة من نقاط الجسم (S) تنجز حركة إزاحة بالنسبة لمحور الدوران.

$$E_{c_i} = {}^1/_2\, m_i v_i^2$$

نعلم أن: $v_i = r_i.\omega$ $\Longrightarrow$ $E_{c_i} = {}^1/_2\, m_i r_i^2 \omega^2$

الطاقة الحركية للجسم (S) هي: $E_C = \sum_i E_{C_i}$ اذن: $E_C = {}^1/_2\, \omega^2 \sum_i m_i r_i^2$

نضع: $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$

ومنه تعطى عبارة الطاقة الحركية لجسم في حالة حركة دورانية بالعبارة التالية: $E_c = {}^1/_2 J_\Delta \omega^2$ حيث :

$J_\Delta$: عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور ($\Delta$) وحدته في (S.I) هي: $(Kg.m^2)$. وهويتعلق فقط بتوزيع الكتلة المكونة له حول المحور $\Delta$).

