# الطريق الى البكالوريا

عدد التمارين : 88

الشعب العلمية

**الأستاذ مرنيز وليد**

**3 conseils pour devenir bon en maths**

Ne pas apprendre, comprendre !

Faire des exercices

Ne pas regarder les solutions

**اخر تحديث :** 23 ديسمبر 2019

السنة الدراسية

# المحتويات

I بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية 2

II تمارين تدريبية 6

III مواضيع بكالوريات جزائرية 14

1 شعبة علوم تجريبية 15

2 شعبة تقني رياضي 29

3 شعبة رياضيات 36

IV مواضيع بكالوريات أجنبية 42

V مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة 49

4 شعبة علوم تجريبية 50

5 شعبة رياضيات 53

...

# القسم I

# بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية

# المتتاليات العددية

## ◄ طريقة توليد متتالية عددية

يوجد طريقيتين لتعريف متتالية عددية :

- عبارة الحد العام $u_n = f(n)$
- علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

## ◄ التمثيل البياني لمتتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

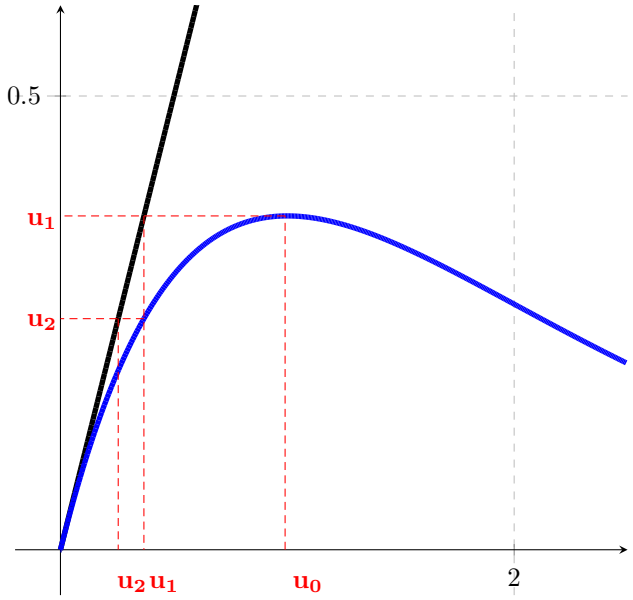
**طريقة :**

نقوم برسم التمثيل البياني $(C_f)$ للدالة المرفقة بالمتتالية $(u_n)$ و المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$.

**مثال :**

لتكن المتتالية $u_n$ معرفة:

بحدها الاول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$




## ◄ دراسة اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ نتبع احدى الطرق الاتية :

- ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ (اخراج العامل المشترك و استعمال جدول الاشارة)

– اذا كان الفرق $0$ $u_n$ $u_{n+1}$ اذن المتتالية متزايدة

- اذا كانت جميع الحدود **موجبة**، نقوم بحساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
  - اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ، اذن المتتالية متزايدة
  - اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ اذن المتتالية متناقصة
- باستعمال مبدأ **البرهان بالتراجع**، نثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

## ◄ المتتالية الحسابية

### عبارة الحد العام

1. متتالية حسابية $(u_n)$ معرفة :
   - بحدها الاول $u_0$ او $u_p$
   - من اجل كل عدد طبيعي $n$

$u_n = u_0 + nr$ أو $u_n = u_p + (n-p)r$

حيث $r$ هو أساس $(u_n)$

2. نقول ان المتتالية $(u_n)$ حسابية حدها الاول $u_0$ و اساسها $r$ اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، الفرق بين كل حدين متتابعين هو ثابت اي

$u_{n+1} - u_n = r$

### الوسط الحسابي

اذا كانت $a$ ، $b$ و $c$ اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فان : $a + c = 2b$

### المجموع

مجموع متتالية حسابية:

- حدها الاول $u_0$ :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

- حدها الاول $u_p$

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

حيث : $(n-p+1)$ عدد حدود المتتالية من $u_p$ حتى $u_n$.

**بصفة عامة**

$S_n =$ (د

### اتجاه التغير

- اذا كان $r > 0$ فان المتتالية $u_n$ متزايدة تماما
- اذا كان $r < 0$ فان المتتالية $u_n$ متناقصة تماما
- اذا كان $r = 0$ فان المتتالية $(u_n)$ ثابتة

## ◄ المتتالية الهندسية

### عبارة الحد العام

1. متتالية هندسية$(u_n)$ معرفة
   - بحدها الاول $v_0$ او $v_p$
   - من اجل كل عدد طبيعي $n$

$v_n = v_0 \times r^n$ أو $v_n = v_p \times r^{(n-p)}$

2. نقول ان المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية حدها الاول $v_0$ و اساسها $q \neq 0$ اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، النسبة

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

حيث $q$ عدد ثابت يمثل اساس المتتالية.

### الوسط الهندسي

اذا كانت $a$ ، $b$ و $c$ اعداد حقيقية ماخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فان : $a \times c = b^2$

### المجموع

مجموع متتالية هندسية:

- حدها الاول $v_0$ :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- حدها الاول $v_p$

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

حيث : $(n - p + 1)$ عدد حدود المتتالية من $v_p$ حتى $v_n$.

عدد حدود المتتالية = دليل الحد الاخير - دليل الحد الاول +1

**بصفة عامة**

### اتجاه التغير

- اذا كان $q > 1$ ، المتتالية $(q^n)$ متزايدة
- اذا كان $0 < q < 1$ ، المتتالية $(q^n)$ متناقصة.

ومن اجل متتالية هندسية كيفية، ناخذ بعين الاعتبار الحد الاول $v_0$

- اذا كان $v_0 > 0$ ، $(v_n)$ و $(q^n)$ لهما نفس اتجاه التغير
- اذا كان $v_0 < 0$ ، $(v_n)$ و $(q^n)$ لهما اتجاه تغير متعاكسان
- اذا كان $q = 1$ او $q = 0$ المتتالية $(q^n)$ ثابتة
- اذا كان $q < 0$ المتتالية $(q^n)$ غير رتيبة

### نهاية متتالية هندسية

- اذا كان $q > 1$ فان $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ (متباعدة)
- اذا كان $q = 1$، $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ (متقاربة)
- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ (متقاربة)
- اذا كان $q \leq -1$ فان النهاية غير موجودة (متباعدة)

## ◄ كيفية حساب نهاية متتالية عددية

1. **متتالية معرفة بعلاقة تراجعية** $u_{n+1} = f(u_n)$.

لحساب نهاية متتالية نتبع احدى الطرق التالية:

- **الطريقة 1 :**(متتالية محدودة)

اذا كانت المتتالية $(u_n)$ متزايدة و محدودة من الاعلى $u_n \leq M$ فهي **متقاربة** نحو عدد حقيقي $l \leq M$

- اذا كانت المتتالية $(u_n)$ متناقصة و محدودة من الاسفل $u_n \geq m$ فهي **متقاربة** نحو عدد حقيقي $l \geq m$
- **الطريقة 2 :**

اذا كانت المتتالية $(u_n)$ متقاربة **(الطريقة 1)** نحو عدد حقيقي $l$ و $f$ مستمرة عند $l$ ، اذن $l$ هو حل للمعادلة $f(l) = l$

- **الطريقة 3 :**

استعمال مبرهنة الحصر في حساب النهايات

-

مح لنا باثبات

2. متتالية معرفة بعبارة الحد العام $u_n = f(n)$.
نقوم بحساب نهاية المتتالية $(u_n)$ اي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

- اذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ فهي متقاربة
- اذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mp\infty$ فهي متباعدة.

⚠ النهاية اذا وجدت فهي وحيدة.

## ◄ متتاليتان متجاورتان

نقول عن متتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ انهما متجاورتان اذا وفقط اذا كان

- $(u_n)$ متزايدة
- $(v_n)$ متناقصة
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

## ◄ مبدأ البرهان بالتراجع

يستعمل مبدأ البرهان بالتراجع لاثبات خاصية متعلقة بالاعداد الطبيعية $n$.
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من اجل **كل** عدد طبيعي $n$ يكفي :

1. نتاكد من ان $P(0)$ صحيحة
2. اذا كانت $P(n)$ صحيحة فان $P(n+1)$ صحيحة

اذن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n$

### تطبيق :

لتكن $(u_n)$ متتالية معرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < u_n < 2$

### الحل:

1. **المرحلة 1 : (الخاصية الابتدائية)**
من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ اذن $0 < u_0 < 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

2. **المرحلة 2 : (الوراثية)**
من اجل عدد طبيعي $n > 0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ اي $0 < u_n < 2$ ونبرهن ان الخاصية $P(n+1)$ صحيحة اي $0 < u_{n+1} < 2$.
من **فرضية التراجع** لدينا :

$$0 < u_n < 2$$
$$2 < 2 + u_n < 4$$
$$\sqrt{2} < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{4}$$
$$\underbrace{0}_{\text{بالتعدي}} < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

اي ان الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل $n+1$

3. **المرحلة3 : (الاستنتاج)**
اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع و من اجل كل عدد طبيعي $n$ فان : $0 < u_n < 2$.

...

# القسم II

# تمارين تدريبية

# رموز مفتاحية

- تمارين للتدرب في المنزل
- تمارين للتدرب تتضمن افكار اساسية
- فكرة تستحق المحاولة
- تمارين محلولة
- تمارين للتعمق

## تمرين رقم 1:

$(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0 = 2$ و بالعلاقة : $u_2 + u_5 = 25$

**1)** عين اساس المتتالية الحسابية $(u_n)$.

**2)** اكتب الحد العام $u_n$ بدلالة $n$.

**3)** احسب قيمة الحد الذي رتبته 11.

**4)** احسب المجموع : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

## تمرين رقم 2:

$(u_n)$ متتالية حسابية حيث : $\begin{cases} u_0 + u_3 = 6 \\ u_2 + u_5 = 22 \end{cases}$

**1)** اوجد الحد الاول $u_0$ و الاساس $r$ لهذه المتتالية.

**2)** اكتب الحد العام $(u_n)$ بدلالة $n$.

**3)** هل العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية؟

**4)** ماهي قيمة و رتبة الحد الذي نبدء منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100 ؟

**5)** احسب بدلالة $n$ الجداء : $P_n = 2011^1 \times 2011^5 \times 2011^9 \times \cdots \times 2011^{4n+1}$.

## تمرين رقم 3:

$(u_n)$ متتالية هندسية حدها الاول : $u_1 = 2$ و اساسها $q = \frac{1}{3}$.

لتكن $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \ln(u_n)$.

اجب بصحيح او خطأ مع التبرير في كل حالة :

2) $(v_n)$ متتالية حسابية اساسها : $r = -\ln 3$.

3) لدينا : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

4) لدينا : $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = n\ln 2 - \frac{n(n-1)}{2}\ln 3$.

5) لدينا : $u_1 \times u_2 \cdots \times u_n = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

## تمرين رقم 4:



1) برهن بالتراجع على ان من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

2) استنتج قيمة المجموع : $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 101$.

## تمرين رقم 5:



$(u_n)$متتالية حسابية متزايدة حدها الاول : $u_1 = -4$ و $u_2^2 + u_3^2 = 37$.

1) اوجد $r$ اساس هذه المتتالية.

2) اكتب الحد العام $(u_n)$ بدلالة $n$.

3) هل يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 ؟

4) ماهي رتبته؟

5) احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

6) اوجد العدد الطبيعي $n$ بحيث $S_n = 282$.

## تمرين رقم 6:



$(v_n)$متتالية حسابية حدها الاول $v_1$ و

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$$

1) عين الحدود $v_1$ ، $v_2$ و $v_3$ للمتتالية واساسها.

2) احسب الحد العام $v_n$ بدلالة $n$.

**4)** عين قيمة العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $S_n = -21$.

## تمرين رقم 7:

$(u_n)$متتالية هندسية اساسها $\frac{3}{2}$ ومجموع حدودها الثلاثة الاولى $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ يساوي 38.

**1)** احسب الحدود $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$.

**2)** احسب الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

**3)** احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
ثم استنتج المجموع $S_5$ (يعطي $S_5$ على شكل كسر غير قابل للاختزال ).

## تمرين رقم 8:

$(u_n)$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الاول $u_0$ و الاساس $q$ بحيث : $8u_6 = 125u_9$.

**1)** احسب الاساس $q$. احسب بدلالة $u_0$ و $n$ المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

**2)** عين $u_0$ بحيث : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 150$ .

**3)** نفرض $u_0 = 90$ ، عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي $n$ الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$.

## تمرين رقم 9:

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 3u_n - 6$.
من اجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $v_n = u_n - 3$

**1)** بين ان المتتالية $(v_n)$ هندسية، ثم عين اساسها وحدها الاول.

**2)** احسب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$.

**3)** احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$ ، ثم استنتج بدلالة $n$ المجموع : $S' = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

## تمرين رقم 10:

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الاول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة : $u_{n+1} = \frac{1}{-}u_n + 2$.

1) احسب $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية $(u_n)$ ثم اثبت صحة تخمينك.

2) هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة ؟

ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$

1) اثبت ان المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

2) احسب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$.

3) بين ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة محددا نهايتها.

4) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

ج) نفرض $\alpha = 6$ . ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

## تمرين رقم 11:

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و بالعلاقة : $u_{n+1} = \alpha(u_n - 2)$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي غير معدوم.

1) عين العدد $\alpha$ حتى تكون $(u_n)$ متتالية ثابتة.

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة : $v_n = u_n + 4$.

ا) عين العدد $\alpha$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الاول و اساسها.

ب) من اجل قيمة $\alpha$ المحصل عليها في السؤال (أ.

- احسب بدلالة $n$ كل من المجموعين : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $T_n = (v_0)^3 + (v_1)^3 + (v_2)^3 + \cdots + (v_n)^3$.

## تمرين رقم 12:

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1) احسب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$. (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

2) $(w_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

ا) قارن بين الحدود الاربعة الاولى للمتتالية $(u_n)$ و الحدود الاربعة الاولى للمتتالية $(w_n)$.

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = w_n$.

3) $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ .

ا) بين ان : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) ليكن $S_n$ المجموع المعرف كمايلي : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

- اكتب $S_n$ بدلالة $n$ ، ثم عين نهاية المجموع $S_n$ لما $n$ يؤول الى $+\infty$.

## تمرين رقم 13:

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كمايلي: $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

**1)** ادرس رتابة المتتالية $(u_n)$.

**ا)** بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $u_n > n^2$.

**ب)** ما هي نهاية المتتالية $u_n$ ؟

**2)** خمن عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم برهن صحة تخمينك الذي وضعته.

## تمرين رقم 14:

لتكن المتتالية $(u_n)$ و المتتالية $(v_n)$ المعرفتين كمايلي : $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ :
$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$ نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

**1)** اثبت ان المتتالية $(w_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

**2)** احسب $w_n$ بدلالة $n$.

**3)** اثبت ان المتتالية $(t_n)$ متتالية ثابتة.

**4)** اثبت ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة على $\mathbb{N}$. و ان المتتالية $(v_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$.

**5)** عين $u_n$ و $v_n$ بدلالة $n$.

**6)** استنتج نهاية $u_n$ و نهاية $v_n$.

## تمرين رقم 15:

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$

**1)** احسب الحدود : $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ ، $u_5$. (يطلب كتابة هذه الحدود على الشكل $2^\alpha$ )

**2)** $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

**ا)** بين ان المتتالية $(v_n)$ هندسية معينا اساسها وحدها الاول.

**ب)** اكتب بدلالة $n$ عبارة الحد العام $v_n$ ، و استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

**ج)** احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

**د** $n$ $u_n > 3.96$

## تمرين رقم 16:

I) $(u_n)$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما و بحيث : $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$ و $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$

1) عين اساس المتتالية $(u_n)$ وحدها الاول $u_1$

2) اكتب $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$

II) $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n$

ا) بين ان $(v_n)$ متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

ب) احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

ج) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث : $\ln S_n = 0$

## تمرين رقم 17:

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = \frac{1}{4}$ و $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$

1) احسب $u_1$ و $u_2$

2) ا) بين بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$

ب) بين ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

ج) هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة؟ علل

3) ا) بين ان من اجل كل عدد طبيعي $n$ فان : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

ب) استنتج ان من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## تمرين رقم 18:

1) لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ و ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

ا) احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) انشئ المنحنى $(C)$

د) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $m$ من المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.

ه

2) $(u_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

ا) اثبت بالتراجع انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n > 0$ اثبت ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة

ب) استنتج ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم عين نهايتها.

3) $(w_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = \ln u_n$

ا) اثبت انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n = w_n - w_{n+1}$

ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ، اثبت ان : $S_n = w_0 - w_{n+1}$

ج) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

...

# القسم III

# مواضيع بكالوريات جزائرية

...

# 1

# شعبة علوم تجريبية

## تمرين رقم 19:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1) ا) برهن بالتراجع انه : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n > 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ واستنتج انها متقاربة.

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

اثبت ان المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

3) اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم بين انه : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و احسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times \cdots (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

## تمرين رقم 20:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]4;7[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1) ا

2) برهن انه : من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[4;7[$ فان $f(x)-x=\dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

ثم استنتج انه : من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[4;7[$ فان $f(x)-x>0$

3) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=4$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$

ا) برهن بالتراجع انه : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $4\leq u_n<7$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم بين انها متقاربة.

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $7-u_{n+1}<\dfrac{1}{4}(7-u_n)$

5) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<7-u_n<3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)$

## تمرين رقم 21:

**علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0$ حيث $u_0=1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5}$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n>-2$

ب) بين ان $(u_n)$ متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج انها متقاربة

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

- اثبت ان المتتالية $(v_n)$ حسابية اساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الاول

3) عبر بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$ ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n=\dfrac{1}{3}(1-n^2)$

## تمرين رقم 22:

© | **علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كمايلي : $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$.

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

3) $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n=2n+1$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $e^{u_n}=v_n$

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب المجموعين $S_n$ و $T_n$ حيث :

## تمرين رقم 23:

© | علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1) احسب الحدين : $u_1$ و $v_1$

2) ا) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما و المتتالية $(v_n)$ متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية $(w_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = u_n - v_n$

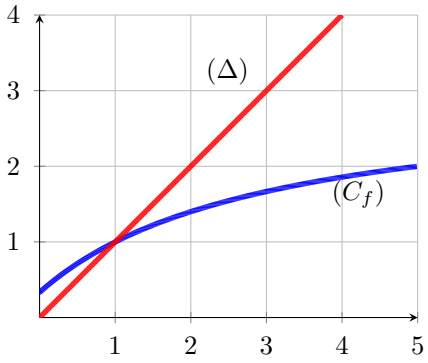
برهن ان المتتالية $(w_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها $q$ وحدها الاول $w_0$ ثم عبر عن $w_n$ بدلالة $n$

4) بين ان المتتالية $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان

## تمرين رقم 24:

© | علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$




$\alpha$ عدد حقيقي موجب، $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0$ حيث $u_0 = \alpha$

و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

I) عين قيمة $\alpha$ حتى تكون $(u_n)$ متتالية ثابتة

II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

1) ا) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

ا) برهن ان المتتالية $(v_n)$ هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الاول

ب) عبر بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة $n$ المجموع $S'_n$ حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + \frac{1}{u_{n+2}+1} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$

## تمرين رقم 25:

**علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي :
$u_0 = \frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ و $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

1) ا) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 < u_n < 1$

ب) بين ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

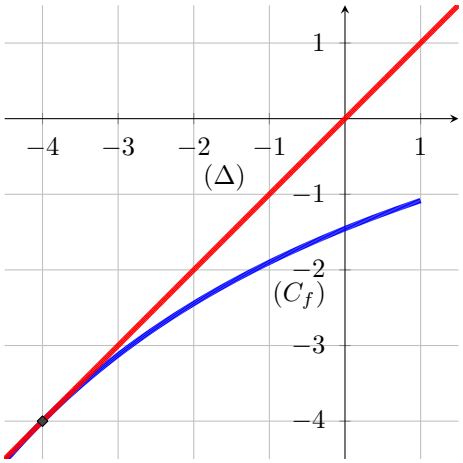
2) ا) بين ان المتتالية $(v_n)$ هندسية اساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام $v_n$ بدلالة $n$

ب) اثبت ان : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## تمرين رقم 26:

**علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
$f$ الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$ وليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل لها،
$(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$




I) تحقق ان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بين ان : من اجل كل $x \in [-4;1]$ فان $f(x) \in [-4;1]$

II) $(u_n)$ متتالية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1 الحدود)

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $-4 < u_n \leq 0$
ثم بين ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$
اثبت ان المتتالية $(v_n)$ حسابية اساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع $S$ حيث

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 \cdots v_{2016} \times u_{2016}$$

## تمرين رقم 27:

### علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $I = [0;4]$ كمايلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1) ا) بين ان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$

ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ ، $f(x)$ ينتمي الى $I$

2) لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، من اجل كل عدد طبيعي $n$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \leq u_n \leq 4$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج انها متقاربة

3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \neq 0$

4) لتكن $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

ا) برهن ان المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول $v_0$

ب) اكتب $v_n$ بدلالة $n$

ج) استنتج ان : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## تمرين رقم 28:

### علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (4.50 نقاط)

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ و لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1) بين ان المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها $q$ وحدها الاول $v_0$

2) ا) عبر بدلالة $n$ عن عبارة الحد العام $v_n$

ب) استنتج عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$

ج) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

4) تح

5) استنتج بدلالة $n$ المجموع : $S' = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$

## تمرين رقم 29:

**© | علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)**

**I)** $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$ $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) عين احداثي نقطة تقاطع المنحنى $(C)$ مع المستقيم $(\Delta)$ الذي $y = x$ معادلة له.

3) ارسم $(C)$ و $(\Delta)$.

**II)** $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ (بدون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \leq u_n < 4$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## تمرين رقم 30:

**علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

**1.** $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$

**I)** ا) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

**II)** بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $f(x) \geq 0$

**2.** $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n+2}$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \leq u_n \leq 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج انها متقاربة.

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

ج) احسب نهاية المتتالية $(u_n)$

د) اكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S'_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

## تمرين رقم 31:

**علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الأول (04.5 نقطة)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1) احسب $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$.

2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 + u_n > 0$

3) بين ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = 3(1 + u_n)$

ا) اثبت ان $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

ب) اكتب $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

ج) بين انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $\ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n = (n + 1)(-n + 2 + \ln 3)$

## تمرين رقم 32:

**© | علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الثاني (05 نقاط)**

المستوى منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

I) $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x + 1}{x + 1}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) عين اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]0; +\infty[$

2) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(D)$ ذي المعادلة $y = x$

3) مثل $(C_f)$ و $(D)$ على المجال $[0; 6]$

II) نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

1) ا) انشئ على حامل محور الفواصل الحدود : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ ؛ $v_0$ ، $v_1$ ، $v_2$ و $v_3$ دون حسابها.

ب) خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$

2) ا) اثبت انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث : $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$

3) ا) اثبت انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب) بين انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $0 < v_n \quad u_n \quad \frac{1}{-}^{n-1}$

## تمرين رقم 33:

**علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$
و $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = u_n + 4$.

1) بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

2) اكتب كلا من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$.

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ على $\mathbb{N}$.

4) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

5) لتكن $(w_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.

ا) بين ان المتتالية $(w_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - w_n)$.

## تمرين رقم 34:

**علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

1) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}^{-n}}$
( $e$ هو اساس اللوغاريتم النيبيري ).

ا) بين ان $(u_n)$ متتالية هندسية، يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

ب) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

ج) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

2) نضع، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = \ln(u_n)$ ( $\ln$ يرمز الى اللوغاريتم النيبيري ).

1) عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج نوع المتتالية $(v_n)$.

2) ا) احسب بدلالة $n$ العدد $P_n$ حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n)$.

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث : $P_n + 4n > 0$.

## تمرين رقم 35:

**علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الاول (04 نقاط)**

ا) المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1

**II)** المتتالية $(u_n)$ معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

**1)** برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 \leq u_n \leq 6$.

**2)** ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

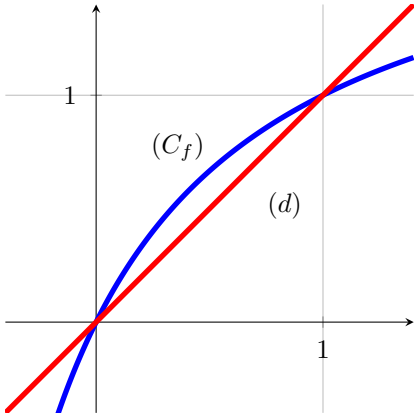
**3)** ا) برهن انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

## تمرين رقم 36:

**علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

في الشكل المقابل ، $(C_f)$ هو التمثيل البياني للدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ و $(d)$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$.




**1)** $u_n$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

ا) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة، ثم مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

**2)** ا) اثبت ان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 < u_n < 1$.

ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

**3)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

ا) برهن ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الاول $v_0$.

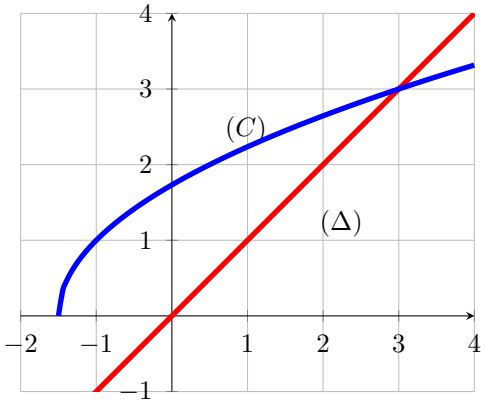
ب) احسب نهاية $(u_n)$

## تمرين رقم 37:

**علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الأول (05 نقاط)**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن $h$ الدالة المعرفة على المجال $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كمايلي : $h(x) = \sqrt{2x+3}$ ، $(C)$ تمثيلها البياني و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس. (انظر الشكل المقابل).




ا) اعد رسم الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ (دون حسابها و موضحا خطوط الانشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ و تقاربها.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < u_n < 3$

3) ا) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

ب) استنتج ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## تمرين رقم 38:

**علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $3 < u_n < 4$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج ان $(u_n)$ متزايدة تماما.

3) برر لماذا $(u_n)$ متقاربة.

4) $(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

ا) برهن ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

ب) اكتب كلا من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج $P = (u \quad 3)(u \quad 3)(u \quad 3) \qquad (u \quad 3) \quad n$

## تمرين رقم 39:

**علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الأول (03 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$
$(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$
**في كل حالة من الحالات الثلاث الاتية اقترحت ثلاث اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.**

1) المتتالية $(v_n)$ :

ا) حسابية.

ب) هندسية

ج) لا حسابية و لا هندسية

2) نهاية المتتالية $(u_n)$ هي :

ا) $+\infty$

ب) $-\frac{1}{2}$

ج) $-\infty$

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3}\right]$.

ا) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

ب) $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$

ج) $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

## تمرين رقم 40:

**علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

$\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.
$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$
$(v_n)$ متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

1) ا) بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\alpha$

ب) اكتب بدلالة $n$ و $\alpha$ ، عبارة $v_n$ ثم استنتج بدلالة $n$ و $\alpha$ ، عبارة $u_n$.

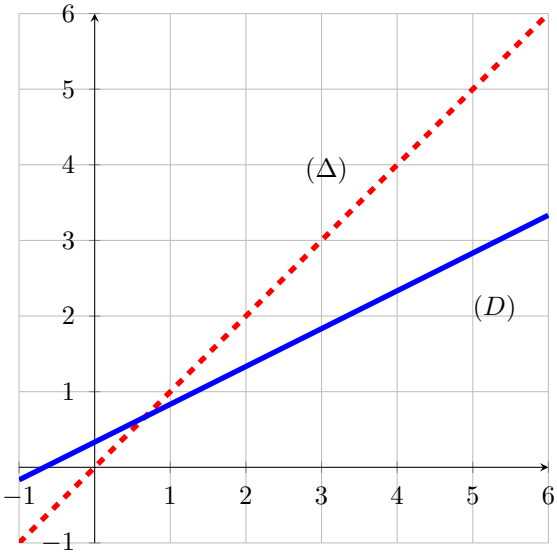
ج) عين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ التي تكون من اجلها المتتالية $(u_n)$ متقاربة.

2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$
- احسب بدلالة $n$ ، المجموعين $S_n$ و $T_n$ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

## تمرين رقم 41:

**علوم تجريبية - 2010 - الموضوع الثاني (05 نقاط)**

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$،
مثلنا المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$




**1)** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

**ا)** أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية $u_0, u_1, u_2, u_3$ و $u_4$ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

**ب)** عين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$.

**ج)** أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

**2) ا)** باستعمال الاستدلال بالتراجع ,أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n \geq \frac{2}{3}$

**ب)** إستنتج إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

**3)** نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

**ا)** بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

**ب)** أكتب بدلالة $n$ عبارة الحد العام $v_n$, وإستنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

**ج)** أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, ثم إستنتج المجموع $S'_n$ حيث :
$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

## تمرين رقم 42:

**علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الاول (03.5 نقطة)**

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$.
المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

**1)** أحـ

2) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) ا) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$

ج) بين أن $(u_n)$ متقاربة.

## تمرين رقم 43:

**علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الثاني (05 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول $u_1$ و أساسها $q$ حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) ا) أحسب $u_2$ و الأساس $q$ لهذه المتتالية و إستنتج الحد الأول $u_1$ .

ب) أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$.

ج) أحسب $S_n$ حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة $n$ ثم عين العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $S_n = 728$

2) $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

ا) أحسب $v_2$ و $v_3$.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن $(w_n)$ متتالية $(w_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج) أكتب $w_n$ بدلالة $n$ ثم إستنتج $v_n$ بدلالة $n$.

## تمرين رقم 44:

**علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

1) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $I = [1;2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

ا) بين أن الدالة $f$ متزايدة على $I$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ ، $f(x)$ ينتمي إلى $I$.

2) $(u_n)$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي $n$ ، $u_n$ ينتمي الى $I$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم استنتج أنها متقاربة.

3) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

ب) عين النهاية : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$ .

## تمرين رقم 45:

**علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الثاني (05 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = \frac{5}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1) ا) أرسم في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y = x$ و المنحنى $(d)$ الممثل للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

ب) باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ , $u_3$ , $u_4$.

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $u_n$ و تقاربها.

2) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n \leq 6$

ب) تحقق أن $(u_n)$ متزايدة.

ج) هل $(u_n)$ متقاربة ؟برر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n = u_n - 6$

ا) أثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .

...

# 2

# شعبة تقني رياضي

## تمرين رقم 46:

تقني رياضي - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

$(u_n)$ و $(v_n)$ المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$v_n = u_n - 3n + 1 \text{ و } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases}$$

1) اثبت ان المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

2) اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$

3) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

4) ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية لـ $7^n$ على 9.

ب) ماهو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد $1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$

ج) اثبت انه من اجل كل طبيعي $n$ : $6S_n - 7u_n \equiv 0\,[9]$

## تمرين رقم 47:

تقني رياضي - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(

و $(u_n)$ المتتالة العددية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{5}{4e}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n>\frac{1}{e}$.

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{e.u_n(\frac{1}{e}-u_n)}{e.u_n-1}$
ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و برر انها متقاربة.

2) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ كمايلي : $v_n=\frac{e.u_n}{e.u_n-1}$
اثبت ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول $v_0$ و عبارة $v_n$ بدلالة $n$

3) ا) تحقق انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_n=1+\frac{1}{e.u_n-1}$ و استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ب) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

## تمرين رقم 48:

**تقني رياضي - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

لتكن $(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كمايلي : $u_n=2(3)^n$
و $(v_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الاول $v_0=4$ و من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ $v_{n+1}=5v_n+u_n$

1) نضع من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $w_n=\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{2}$

- اثبت ان $(w_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الاول.

2) اكتب عبارة الحد العام $w_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_n=5^{n+1}-3^n$

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الاقليدية للعددين $3^n$ و $5^n$ على 8

4) عين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $v_n$ على 8

## تمرين رقم 49:

**تقني رياضي - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ: $u_1=\frac{1}{a}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم ، $u_{n+1}=\frac{n+1}{an}u_n$
حيث $a$ عدد حقيقي اكبر من او يساوي 2 .

1) ا) بين ان : من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n>0$ .

ب) بين ان المتتالية $u_n$ متناقصة تماما ثم استنتج انها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم ، $v_n=\frac{1}{an}u_n$

(ا) بين ان المتتالية $(v_n)$ هندسية اساسها $\frac{1}{a}$ و عين حدها الاول $v_1$ بدلالة $a$ .

(ب) جد بدلالة $n$ و $a$ عبارة الحد العام $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

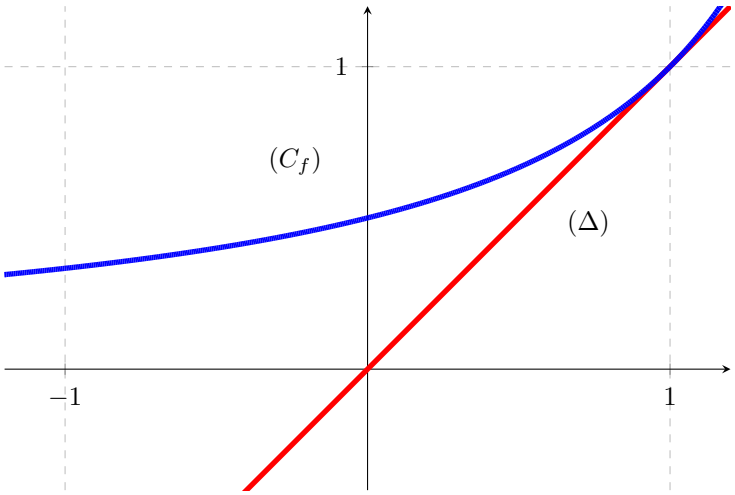
ثم عين قيمة $a$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2016}$

## تمرين رقم 50:

**تقني رياضي - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ: $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$. $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن $(\Delta)$ المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

$(u_n)$ المتتالية العدية المعرفة بحدها الاول $u_0$ حيث $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$




1) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ مبرزا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

2) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n < 1$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم استنتج انها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = \dfrac{2}{1-u_n}$

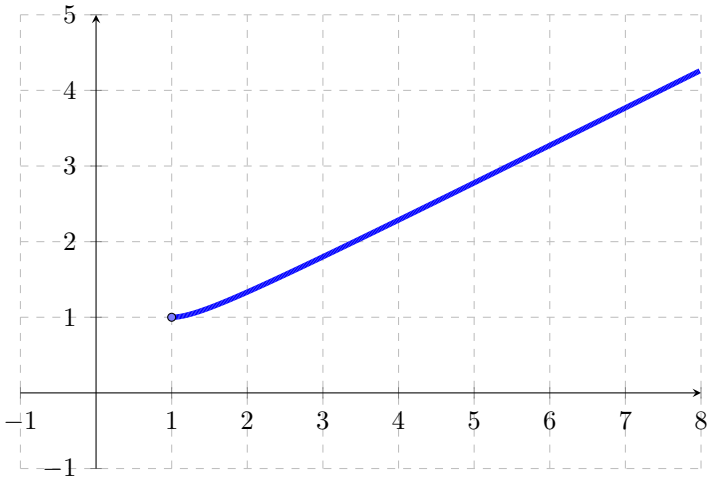
ا) برهن ان المتتالية $(v_n)$ حسابية اساسها 2 ثم عين عبارة حدها العام $v_n$ بدلالة $n$

ب) استنتج عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## تمرين رقم 51:

**تقني رياضي - 2016 - الموضوع الثاني (05 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، الشكل المقابل




**1)** بين ان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

**2)** لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$

**ا)** انقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الاربعة الاولى للمتتالية $(u_n)$ على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

**ب)** اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

**ج)** برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\leq u_n\leq 6$

**د)** ادرس اتجاه تغير المتاالية $(u_n)$

**هـ)** برر تقارب المتتالية $(u_n)$

**3)** نعتبر المتتاليتين العدديتين $(v_n)$ و $(w_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

**(ا)** برهن ان $(w_n)$ متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول.

**(ب)** اكتب $w_n$ بدلالة $n$ ثم $v_n$ بدلالة $n$

**(ج)** بين ان : $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

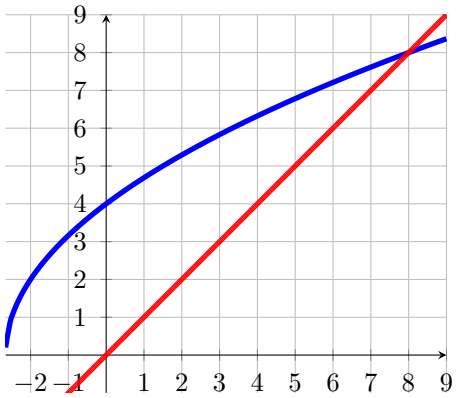
**4)** احسب بدلالة $n$ المجموع التالي : $S_n=\dfrac{1}{w_0}+\dfrac{1}{w_1}+\cdots+\dfrac{1}{w_n}$

## تمرين رقم 52:

**تقني رياضي - 2015 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحده الاول : $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\sqrt{6u_n+16}$

**1)** $h$ الدالة المعرفة على $\left[-\frac{8}{3};+\infty\right[$ بمايلي : $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (انظر الشكل)



ا) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ وتقاربها

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \leq u_n \leq 8$

ب) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

ج) استنتج اتجاه تغير $(u_n)$

2) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < 8 - u_n \leq \dfrac{1}{2}(8-u_n)$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## تمرين رقم 53:

**تقني رياضي - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

**I)** $f$ هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1) حدد حسب قيم $x$ ، اشارة $f(x) - x$

2) ا) عين اتجاه تغير $f$

ب) بين انه اذا كان $x \in [2;e+1]$ فان $f(x) \in [2;e+1]$

**II)** $(u_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = e+1$ و من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2;e+1]$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

3) برر تقارب المتتالية $(u_n)$ ، ثم احسب نهايتها.

## تمرين رقم 54:

**تقني رياضي - 2014 - الموضوع الثاني (05 نقاط)**

$f$ هي دال $[0;+\infty[$ $9$ $f(x) = 5^{(4x+2)}$

$(u_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

**1)** برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$

**2)** برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، فان $u_n$ عدد طبيعي.

**3)** استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

## تمرين رقم 55:

**تقني رياضي - 2013 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي :

$u_0 = e^2$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

$(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$.

**1)** بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

**2)** اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

**3)** احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ ، حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

**4)** احسب بدلالة $n$ الجداء $P_n$ ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

## تمرين رقم 56:

**تقني رياضي - 2011 - الموضوع الأول (05 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

**1)** اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ فان : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج ان : $u_n > 1$

**2)** ادرس اتجاه تغير $(u_n)$ ثم بين انها متقاربة، احسب نهاية $(u_n)$

**3)** ليكن الجداء $p_n$ المعرف كمايلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$
اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ فان : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

**4)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتمية النيبيري
عبر بدلالة $p_n$ عن $S_n$ حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ثم احسب نهاية $S_n$ لما $n$ يتنتهي الى $+\infty$

## تمرين رقم 57:

**تقني رياضي - 2008 - الموضوع الأول (07 نقاط)**

1) ا) ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0;2]$

ب) انشئ $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$)

ج) برهن انه اذا كان $x\in[0;2]$ فان $f(x)\in[0;2]$

2) نعرف المتتالية العددية $(u_n)$ على $\mathbb{N}$ كالاتي : $\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

ا) برر وجود المتتالية $(u_n)$. احسب الحدين $u_1$ و $u_2$

ب) مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى $(C)$ و المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y=x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

3) ا) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي $n$ ان : $0\leq u_n\leq\sqrt{3}$

ب) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي $n$ فان : $u_{n+1}>u_n$
ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب $(u_n)$ ؟

ج) تحقق ان : $u_{n+1}-\sqrt{3}\leq\dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم
عين عددا حقيقيا $k$ من $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1}-\sqrt{3}|\leq k|u_n-\sqrt{3}|$
بين انه من اجل $n\in\mathbb{N}^*$ : $|u_n-\sqrt{3}|\leq k^n|u_0-\sqrt{3}|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

## تمرين رقم 58:

**تقني رياضي - 2008 - الموضوع الثاني (08 نقاط)**

1) $f$ الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما ياتي : $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$
$(C_f)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الاطوال $2cm$)

ا) احسب نهايات الدالة $f$ عند اطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس اتجاه تغير $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين ان المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ ثم ارسم $(C_f)$ و $(D)$

د) بين ان صورة المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بحدها الاول $u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$

ا) باستخدام $(C_f)$ و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثل $u_0$ و $u_1$ و $u_2$ على حامل محور الفواصل $(ox)$.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية $(u_n)$

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فان : $1\leq u_n\leq\dfrac{5}{2}$ و ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

د) استنتج ان $(u_n)$ متقاربة و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

# 3

# شعبة رياضيات

## تمرين رقم 59:

**رياضيات - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)**

**1)** حل المعادلة $(E)\ldots 505x - 673y = 1$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث $x$ و $y$ عددان صحيحان.

( لاحظ أن: $673 \times 3 = 2019$ و $505 \times 4 = 2020$ ) .

**2)** بين أنه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة $(E)$ فإن : $x$ و $y$ من نفس الإشارة .

**3)** نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$

- أكتب $u_\alpha$ بدلالة $\alpha$ ثم أكتب $v_\beta$ بدلالة $\beta$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان .

**4)** ا) عين الحدود المشتركة للمتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ ثم بين ان هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية $(w_n)$ يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$

أحسب بدلالة $n$ الجداء $p = X_1.X_2 \ldots X_n$

## تمرين رقم 60:

**رياضيات - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدها الأول $u_1$ حيث $u_1 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ،

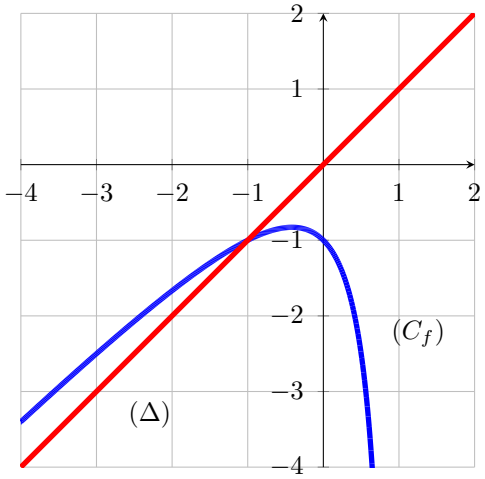
$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1.$$

1. 1) تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$
   2) استنتج كتابة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$
2. تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n = n(n-2) + 1$ .
3. عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها : $n-2$ يقسم $n-5$ .
4. ا) من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 2$ , بين أن : $PGCD(n-2; u_n) = 1$ .
   ب) عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$ .

## تمرين رقم 61:

**رياضيات - 2018 - الموضوع الاول (04 نقاط)**

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$
$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = -3$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$
ليكن $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و $(\Delta)$ هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل المقابل).




1) اعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $-3 \leq u_n < -1$

3) ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} + 1 \geq \dfrac{3}{4}(u_n + 1)$

4) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \leq (u_0+1) + (u_1+1) + \cdots + (u_n+1) < 0$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

## تمرين رقم 62:

**رياضيات - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (05 نقاط)**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الاول $u_0$ حيث $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 4u_n + 1$

1) ا) بين ان: من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ب) تحقق ان : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ العددان الطبيعيان $u_n$ و $u_{n+1}$ اوليين فيما بينهما.

2) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

(ا) اثبت ان المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها $q$ وحدها الاول $v_0$

(ب) عبر بدلالة $n$ عن المجموع $S_n$ حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$

3) عين من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، القاسم المشترك الاكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$

4) ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، باقي القسمة الاقليدية للعدد $4^n$ على 7.

(ب) عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يقبل العدد $A_n$ المعرف بـ: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ ، القسمة على 7

## تمرين رقم 63:

**رياضيات - 2017 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$

1) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $3u_n = 7^{n+1} - 4$

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

ا) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ ثم جد علاقة بين $S_n$ و $S'_n$

ب) استنتج ان : من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

3) ا) عين قيم $n$ الطبيعية حتى يكون $S'_n$ قابلا للقسمة على 5

## تمرين رقم 64:

**رياضيات - 2016 - الموضوع الاول (04 نقاط)**

$(u_n)$ متتا

$$\ln(u_1) + \ln(u_2) = 11$$

1) احسب $u_1$ و $u_2$ ثم استنتج قيمة الاساس $q$

2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$

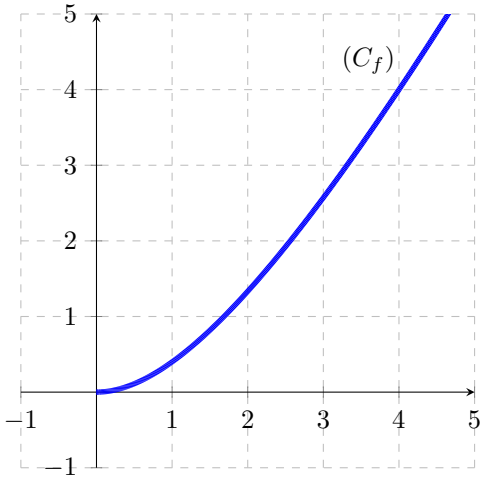
ا) عبر عن $u_n$ بدلالة $n$

ب) نضع : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_n)$ احسب $S_n$ بدلالة $n$.

## تمرين رقم 65:

**رياضيات - 2014 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)**

الدالة العددية $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+4}$ . $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل ادناه.




1) بين ان الدالة $f$ متزايدة تماما.

2) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$
$(\Delta)$ المستقيم الذي معادلته $y = x$

ا) باستعمال المنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ مثل ، على حامل محور الفواصل الحدود: $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$ دون حسابها

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \leq u_n \leq 3$

ب) بين ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة

ج) استنتج ان $(u_n)$ متقاربة.

4) ا) ادرس اشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ و استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{6}{7}u_n$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 \leq u_n \leq 3\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب نهاية المتتالية $(u_n)$ عندما يؤول $n$ الى $+\infty$

## تمرين رقم 66:

**رياضيات - 2009 - الموضوع الأول (06 نقاط)**

1) نعرف الدالة العددية $f$ على المجال $[1;5]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$
ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ . الوحدة على المحورين $3cm$

ا) ادرس تغيرات الدالة $f$

ب) انشئ المنحنى البياني $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=5$ و بالعبارة :

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$$

ا) احسب $u_1$ و $u_2$

ب) استعمل المنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ لتمثيل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ على محور الفواصل.

3) ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\geq\sqrt{5}$

ب) بين ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب $(u_n)$ ؟

4) ا) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي $n$ فان : $(u_{n+}-\sqrt{5})\leq\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{5})$

ب) استنتج ان : $(u_n-\sqrt{5})\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{5})$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

## تمرين رقم 67:

**رياضيات - 2008 - الموضوع الاول (06 نقاط)**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ يرمز $(C)$ الى منحنى $f$ في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2cm$ )

1) احسب $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ا) ادرس تغيرات الدالة $f$

ب) باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" ، انشئ المنحنى $(C)$

ج) ارسم في نفس المعلم المستقيم $(D)$ الذي معادلته : $y=x$

2) نعرف المتتالية $(u_n)$ على المجموعة $\mathbb{N}$ كالاتي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

ا) باستعمال $(D)$ و $(C)$ ، مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها

3) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : : $2\leq u_n\leq5$ و $u_{n+1}>u_n$

ب) استنتج ان $(u_n)$ متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

## تمرين رقم 68:

**رياضيات - 2008 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

$(u_n)$ المتتالية المعرفة بحدها الاول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

**1)** احسب $u_1$ و $u_2$ و $u_3$

**2)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع ان $(v_n)$ متتالية ثابتة
- استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**3)** $(w_n)$ المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع $S$ حيث : $S = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

...

# القسم IV

# مواضيع بكالوريات أجنبية

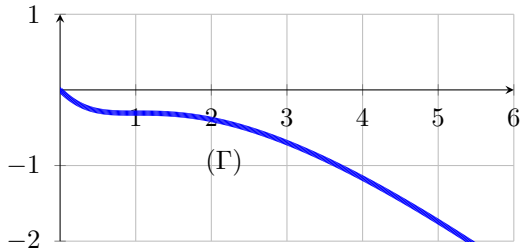
## تمرين رقم 69:

**بكالوريا تونس 2016**

المنحنى $(\Gamma)$ المقابل هو التمثيل البياني ، في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x+\ln(1+x^2)$$

$(\Gamma)$ يقطع محور الفواصل، فقط عند المبدأ $O$




**1)** بقراءة بيانية، برر انه من اجل كل $x$ من $[0;+\infty[$ : $\ln(1+x^2)\leq x$

**2)** نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(1+u_n^2) \qquad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

**ا)** بين انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n>0$

**ب)** بين انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}u_n$

**ج)** استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\leq\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
استنتج ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة، واعط نهايتها.

**3)** لتكن المتتالية $S_n$ المعرفة على بـ: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

**ا)** بين ان المتتالية $(S_n)$ متزايدة تماما.

**ب)** بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n\leq 3-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

**ج)** استنتج ان المتتالية $(S_n)$ متقاربة.

## تمرين رقم 70:

**بكالوريا تونس 2015**

**1)** لتكن المتتالية الهندسية $(u_n)$ التي حدها الاول $u_0=\dfrac{1}{3}$ و اساسها $q=\dfrac{1}{3}$

**ا)** احسب $u_1$

**ب)** عين $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**ج)** من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع: $+u_n$ $S_n=u_0+u_1+$ بين ان $\dfrac{1}{n+1}$ $1$ $\dfrac{1}{-}$ $=S_n$

3) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة، من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n=(1+u_0)(1+u_1)\times\cdots\times(1+u_n)$

ا) احسب $v_0$ و $v_1$

ب) بين ان المتتالية $v_n$ متزايدة

ج) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n\leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

د) بين ان المتتالية $(v_n)$ متقاربة.

هـ) لتكن $l$ نهاية المتتالية $(v_n)$. بين ان $1<l<\sqrt{e}$

## تمرين رقم 71:

**بكالوريا تونس 2010**

نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتان كمايلي : $u_0=1$ ، $v_0=2$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\alpha u_n+(1-\alpha)v_n$ و $v_{n+1}=(1-\alpha)u_n+\alpha v_n$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي مع $\frac{1}{2}<\alpha<1$

1) لتكن $(w_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=v_n-u_n$

ا) احسب $w_0$ و $w_1$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $w_n=(2\alpha-1)^n$

ج) استنتج نهاية المتتالية $(w_n)$

2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n\leq v_n$

ب) بين ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة و ان المتتالية $(v_n)$ متناقصة

ج) استنتج ان المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ متقاربتان نحو نفس النهاية

د) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n+v_n=3$ و استنتج قيمة النهاية

## تمرين رقم 72:

**بكالوريا المغرب 2016**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بمايلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

1) ا) تحقق من ان $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ب) بين بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ان $u_n<3$

2) لتكن $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ا) بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

ب) استنتج ان $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ج) $\frac{1+3v_n}{}$ $\mathbb{N}$

## تمرين رقم 73:

**بكالوريا فرنسا 2017**

**(Antilles Guyane)**

**1)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

**ا)** ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم استنتج القيم الحدية للدالة $f$ ؟

**2)** اثبت انه من اجل كل $n\geq 3$ ، المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$ على المجال $[1,e]$

**ا)** على البيان لدينا التمثيلات البيانية لكل من المستقيمات $D_3$ ، $D_4$ و $D_5$ ذو المعادلات $y=\dfrac{1}{3}$ ، $y=\dfrac{1}{4}$ و $y=\dfrac{1}{5}$ على التوالي.

**ب)** ضع تخمينا لاتجاه تغير المتتالية $(\alpha_n)$

**ج)** قارن بين $f(\alpha_n)$ و $f(\alpha_{n+1})$ وذلك من اجل كل $n\geq 3$

**د)** حدد اتجاه تغير المتتالية $(\alpha_n)$

**هـ)** استنتج ان المتتالية $(\alpha_n)$ متقاربة

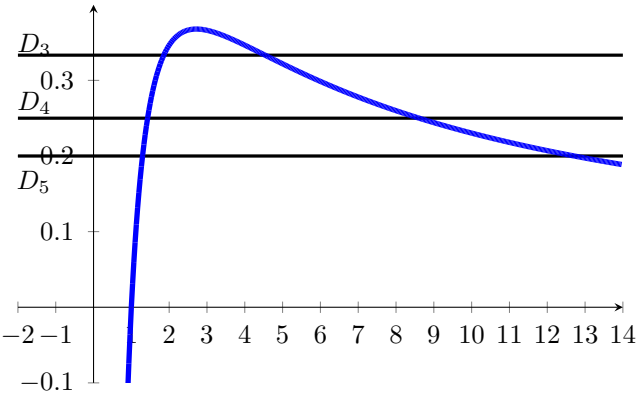
**3)** نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$ ، المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{n}$ تقبل حلا اخر $\beta_n$ حيث $1\leq\alpha_n\leq e\leq\beta_n$

**ا)** نفرض ان المتتالية $\beta_n$ متزايدة.

اثبت انه من اجل كل $n\geq 3$ فان

$$\beta_n\geq n\frac{\beta_n}{3}$$

**ب)** استنتج نهاية المتتالية $(\beta_n)$




## تمرين رقم 74:

**بكالوريا فرنسا 2015**

**(Polynésie )**

**1)** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم بـ: $u_n=e^{v_n}$ و المتتالية $(v_n)$ المعرفة بـ: $v_1=\ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، $v_{n+1}=\ln(2-e^{-v_n})$

ا

ب) احسب كل من $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$. (تعطى النتائج على شكل كسور)

ج) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

2) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

ا) عبر عن $v_n$ بدلالة $u_n$ ثم بدلالة $n$

3) ا) لتكن المتتالية $(S_n)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم بـ: $Sn = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

ب) تحقق ان $S_3 = \ln(4)$

ج) عبر عن $S_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(S_n)$

## تمرين رقم 75:

**بكالوريا فرنسا 2015**

**(Centres étrangers)**

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ: $u_0 = a$ ، و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$. حيث $a$ عدد حقيقي ثابت غير معدوم.

1) لتكن $g$ الدالة المعرفة، من اجل كل عدد حقيقي $x$ بـ: $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

ا) احسب $g'(x)$ ، وتحقق انه، من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

ب) حدد تغيرات الدالة $g$ ، واعط قيمتها الحدية الصغرى.

ج) بملاحظة ان $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ، ادرس اتجاه تغير المتتالية $u_n$

2) في هذا السؤال، نفرض ان $a \leq 0$

ا) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، ان $u_n \leq 0$

ب) استنتج، من الاسئلة السابقة، ان $(u_n)$ متقاربة.

ج) اعط نهاية المتتالية $(u_n)$ ، في حالة $a = 0$

3) في هذا السؤال، نفرض ان $a > 0$

ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$

ب) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n \geq a + n \times g(a)$

ج) عين نهاية المتتالية $(u_n)$

## تمرين رقم 76:

**بكالوريا فرنسا 2014**

**(Polynésie)**

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$

2) لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$

ا) اكتب $v_n$ بدلالة $n$.

ب) ماهي طبيعة المتتالية $(v_n)$ ؟

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_n = (n+1)(n+2)$

د) بين انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $S_n = u_{n+1} - u_0$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$

## تمرين رقم 77:

**بكالوريا فرنسا 2013**

**(Métropole)**

لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) ا) احسب $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n \leq n + 3$

ب) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

3) لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$

ا) بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

ج) احسب نهاية المتتالية $(u_n)$

4) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ نضع : $Sn = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

ا) عبر عن $S_n$ بدلالة $n$.

ب) عين نهاية المتتالية $(T_n)$

## تمرين رقم 78:

**بكالوريا فرنسا 2012**

**(Antilles Guyane)**

لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$

1) احسب $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$

2) ا $n$ $u_n$

3) من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم نضع : $v_n = \frac{u_n}{n}$

ا) اثبت ان $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول $v_1$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم ، $u_n = \frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة $f$ و المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x\ln 2$

ا) عين نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$

ب) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$.

## تمرين رقم 79:

**بكالوريا فرنسا 2010**

**(Antilles Guyane)**

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) احسب $u_2$ ثم استنتج ان $(u_n)$ لا هي هندسية و لا هي حسابية.

2) نعرف المتتالية $(v_n)$ من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

ا) احسب $v_0$

ب) عبر عن $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$

ج) استنتج ان المتتالية $(v_n)$ هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

د) عبر عن $v_n$ بدلالة $n$.

3) نعرف المتتالية $(w_n)$ من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

ا) احسب $w_0$

ب) باستعمال العلاقة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن $w_{n+1}$ بدلالة $u_n$ و $v_n$

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $w_{n+1} = w_n + 2$

د) عبر عن $w_n$ بدلالة $n$

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5) من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

...

# القسم V

# مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة

# 4

# شعبة علوم تجريبية

## تمرين رقم 80:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \leq n + 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ محدودة من الاسفل. هل هي متقاربة؟ برر.

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n - n$

ا) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول.

ب) اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

ج) احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

3) نعتبر المتتالية $(t_n)$ المعرفة بـ: $t_n = \ln(v_n)$

ا) برهن أن المتتالية $(t_n)$ حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول.

ب) احسب المجموع : $S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$

## تمرين رقم 81:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)**

$f$ دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=x-\ln(x+2)$.

**1)** أدرس تغيرات الدالة $f$.

**2)** $(u_n)$ متتالية معرفة كمايلي : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

**ا)** برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\geq -1$.

**ب)** أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

**ج)** استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و احسب نهايتها.

**3)** $(v_n)$ متتالية معرفة كمايلي: $v_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$v_n=\ln\left[(u_0+2)\times(u_1+2)\times\cdots(u_{n-1}+2)\right]$$

**ا)** أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=3-u_n$

**ب)** استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(u_0+2)\times(u_1+2)\times\cdots\times(u_{n-1}+2)\right]$

## تمرين رقم 82:

© | **بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

**1)** $(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

**ا)** برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\geq n$

**ب)** استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**ج)** بين ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما

**2)** $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=u_n-n+1$

**ا)** برهن ان المتتالية $(v_n)$ هندسية ثم اكتب $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$

**ب)** احسب قيمة المجموع : $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_{n-1}^2$ بدلالة $n$.

**ج)** احسب قيمة المجموع : $K_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+\cdots+(u_{n-1}-n+1)^2$ بدلالة $n$.

## تمرين رقم 83:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_0=6\\3u_{n+1}=u_n+1\end{cases}$

**1)** ا $u_n>\frac{1}{-}\quad n$

ج) عين نهاية المتتالية $(u_n)$

2) لنعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

ا) بين ان $(v_n)$ متتالية حسابية، يطلب تحديد اساسها $r$ وحدها الاول.

ب) عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

ج) عين نهاية ثانية للمتتالية $(u_n)$

## تمرين رقم 84:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)**

نعتبر $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$
حيث $\alpha$ عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[ - \{0\}$
نضع و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

1) اثبت ان $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول بدلالة $\alpha$.

2) هل المتتالية $(v_n)$ متقاربة ؟

3) احسب بدلالة $\alpha$ و $n$ المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

4) عين قيمة العدد الحقيقي $\alpha$ علما ان $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$
- استنتج عندئذ $(u_n)$ بدلالة $n$ ثم بين ان $(u_n)$ متقاربة.

5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \cdots v_n$

ا) بين ان : $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب) عين اصغر عدد طبيعي $n$ حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

# 5

# شعبة رياضيات

## تمرين رقم 85:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

1) احسب القاسم المشترك الاكبر للعددين $4^5-1$ و $4^6-1$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$ و $u_1=1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$

ا) احسب الحدود : $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$ .

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=4u_n+1$

ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فان $u_n$ عدد طبيعي، ثم استنتج $PGCD(u_n;u_{n+1})$

3) لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$

ا) بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي $n$ ثم عبارة $u_n$

ج) عين من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $PGCD(4^{n+1}-1;4^n-1)$

## تمرين رقم 86:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

ا) اكتب الحد العام $u_n$ بدلالة $n$

ب) احسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة $n$.

ج) اذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من $(u_n)$ هو 2025 فما هو الحد الاول من هذه الحدود

2) $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = (2n+1) \times 2^{(4n+5)}$

ا) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 7

ب) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون باقي قسمة $v_n$ على 7 هو 3

ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

د) استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$ بدلالة $n$

## تمرين رقم 87:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2017 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

$v_0$ و $q$ عددان طبيعيان غير معدومين. $(v_n)$ متتالية هندسية حدها الاول $v_0$ و اساسها $q$

1) عين $q$ و $v_0$ علما ان $q$ اولي مع $v_0$ و $3v_0^2 = v_3 - v_1$

2) نفرض فيما يلي ان : $v_0 = 8$ و $q = 3$ ونضع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = v_0 \times v_1 \times v_n$
احسب كل من $S_n$ و $T_n$ بدلالة $n$

ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $3n$ على 13

ب) عين قيم $n$ التي يكون من اجلها $S_n$ مضاعفا للعدد 13

## تمرين رقم 88:

**بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$. $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) اثبت من اجل كل عدد طبيعي $n$ ان $0 \leq u_n \leq v_n$

2) بين من اجل كل عدد طبيعي $n$ ان $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. ( يمكن استعمال النتيجة $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 1$.
حيث $x > 0$ و $y > 0$ )

3) استنتج ان $v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(b-a)$ من اجل كل عدد طبيعي $n$.

4) اثبت ان المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

5) فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$.

بوا $u_3$ $10^{-3}$

...

# الفهرس

النهايات بالمقارنة, 51
مبرهنة الحصر, 12, 16, 20, 21, 23, 33, 35, 38--40

متتالية حسابية, 15, 16, 19, 31, 36, 50, 52, 53
متتالية هندسية, 9--11, 17--20, 22--30, 32, 34, 38, 43, 44, 47, 48, 50--54
متجاورتان, 17, 54