الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 1

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$.

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

② لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + \lambda n - 1$ حيث λ عدد طبيعي .

أ/ أثبت أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب/ نضع $\lambda = 2$ ، أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث : $S_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$.

④ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

كلما صغرت العقول زاد صوتها ،
و كلما كبرت العقول زاد صمتها .

التمرين 02

صندوق يحتوي على 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم -1 وثلاثة منها تحمل الرقم 0 وإثنتان منها تحمل الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 . لا نميز بين الكرات عند اللمس .

I- نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد .

① أحسب احتمال الحوادث التالية : A : " سحب كرتين من نفس اللون " .

B : " سحب كرة سوداء على الأكثر " ، C : " سحب كرة سوداء على الأقل " .

② ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الرقمين المسجلين على الكرتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X^2 ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X^2)$.

II- نسحب عشوائيا من الصندوق n كرة في آن واحد حيث $1 \leq n \leq 9$.

نسمي $P(D)$ احتمال الحدث D : " سحب كرة واحدة حمراء فقط " .

أحسب $P(D)$ بدلالة n ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n من أجل $P(D) = \frac{7}{15}$.

التمرين 03

في كل سؤال يوجد إقتراح واحد صحيح عينه مع التبرير .

① فريق ك

لاعبين ويريد

أ/ 277134 ، ب/ 705432 ، جـ/ 9240 .

② h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ القيمة المتوسطة لـ h على المجال $[1;3]$:

أ/ $\mu = 2 - \frac{\ln 3}{3}$ ، ب/ $\mu = 1 - \frac{1}{4}(ln\,3)^2$ ، جـ/ $\mu = \frac{1}{2}(ln\,3)^2$.

③ المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{1}{e^{1-n}}$ هي متتالية هندسية أساسها :

أ) $\frac{1}{e}$ ، ب) $\sqrt{e}$ ، جـ) e .

التمرين 04

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + lnx$.

① أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② أ/ بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$.

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - e + \frac{1-ln\,x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الرسم $2cm$.

① بين أن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

② بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - e$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس الوضع النسبي بينهما .

③ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال : $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

④ بين أن $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

⑤ أنشئ (C_f) و (Δ) .

⑥ نعتبر الدالتين H و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ كمايلي : $H(x) = \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$ و $h(x) = \frac{1-\ln x}{x}$.

أ/ بين أن H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

جـ/ احسب بـ cm^2 العدد A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 5$ و $x = e$.

"يجتهد الإنسان في خداع نفسه ، كي لا يفسد يومه الجميل"

الحل المفصل لإختبار رقم01

التمرين 01

① البرهان بالتراجع : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

لدينا $u_0 = 2^{-0} - 2(0) + 1 = 2$ ، ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي ونبرهن

$P(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1} = 2^{-n-1} - 2(n+1) + 1$

أي نثبت أن $u_{n+1} = 2^{-n-1} - 2n - 1$ ؟؟

لدينا : $u_n - 2\,u_{n+1} = 2n + 3$.

أي : $u_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{u_n}{2}$.

أي : $u_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{2^{-n}-2n+1}{2}$

أي : $u_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + 2^{-n-1} - n + \frac{1}{2}$

ومنه $u_{n+1} = 2^{-n-1} - 2n - 1$.

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

② أ/ اثبات أنه يوجد عدد λ تكون من أجله (v_n) هندسية

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda(n+1) - 1$

أي : $v_{n+1} = -n - \frac{3}{2} + \frac{u_n}{2} + \lambda n + \lambda - 1$

أي : $v_{n+1} = -n - \frac{5}{2} + \frac{u_n}{2} + \lambda n + \lambda$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2\lambda n + 2\lambda - 5 - 2n)$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \lambda n - 1 + 2\lambda + \lambda n - 4 - 2n)$

(v_n) هندسية لما $2\lambda + \lambda n - 4 - 2n = 0$

أي : $\lambda(2+n) - 2(2+n) = 0$

أي : $\lambda(2+n) = 2(2+n)$ ، ومنه $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

إذن لما $\lambda = 2$ تكون (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_0 = u_0 + \lambda(0) - 1 = 1$

ب/ نضع $\lambda = 2$ ، أكتب v_n بدلالة n

من أجل أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$

ومنه $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

❖ استنتاج u_n : لدينا $v_n = u_n + 2n - 1$

ومنه

③ عبر عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$.

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n}$$

إذن : $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

④ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = 0$

التمرين 02

عدد السحبات الممكنة : $C_{10}^2 = 45$

① حساب $P(A)$ ، $P(A) = \frac{C_8^2+C_2^2}{45} = \frac{29}{45}$

الحدث A معناه سحب إما (NN) أو (RR) .

❖ حساب $P(B)$ ، $P(B) = \frac{C_8^1\times C_2^1+C_2^2}{45} = \frac{17}{45}$

الحدث B معناه سحب إما (NR) أو (RR) .

❖ حساب $P(C)$ ، $P(C) = \frac{C_8^1\times C_2^1+C_8^2}{45} = \frac{44}{45}$

الحدث C معناه سحب إما (NR) أو (NN) .

الحدث $\bar{C}$ معناه سحب (RR) ،أي $P(\bar{C}) = \frac{C_2^2}{45} = \frac{1}{45}$

ومنه $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$

② أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

$$X(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

الحدث $X = -2$ معناه سحب كرتان تحملان الرقمان 2 و -1

$$P(X = -2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{45} = \frac{3}{45}$$

الحدث $X = -1$ معناه سحب كرتان تحملان الرقمان 1 و -1

$$P(X = -1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{45} = \frac{9}{45}$$

الحدث $X = 0$ معناه سحب كرتان تحملان الرقم 0 أو كرتان إحداهما تحمل الرقم 0 والأخرى لا تحمل الرقم 0 .

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2 + C_3^1 \times C_7^1}{45} = \frac{24}{45}$$

الحدث $X = 1$ معناه سحب كرتان تحملان الرقمان 1 ، أو كرتان تحملان الرقمان -1 ، $P(X = 1) = \frac{C_3^2+C_3^2}{45} = \frac{6}{45}$

الحدث $X = 2$ معناه سحب كرتان تحملان الرقمان 2 و 1

$X = x_i$	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{3}{45}$

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X^2

$$P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{24}{45}$$

$$P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{15}{45}$$

$$P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{6}{45}$$

$X^2 = x_i^2$	0	1	4
$P(X^2 = x_i^2)$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{6}{45}$

❖ أحسب أمله الرياضي $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \frac{0 \times 24 + 1 \times 15 + 4 \times 6}{45} = \frac{39}{45}$$

II- حساب $P(D)$ بدلالة n .

$$P(D) = \frac{C_2^1 C_8^{n-1}}{C_{10}^n} = \frac{2 \times \frac{8!}{(n-1)!(9-n)!}}{\frac{10!}{n!(10-n)!}}$$

ومنه $P(D) = 2 \times \frac{8!}{(n-1)!(9-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!}$

$$P(D) = 2 \times \frac{8!}{(n-1)!\,(9-n)!} \times \frac{n!\,(10-n)(9-n)!}{10 \times 9 \times 8!}$$

$$P(D) = \frac{2}{(n-1)!} \times \frac{n!\,(10-n)}{10 \times 9}$$

$$P(D) = \frac{2}{(n-1)!} \times \frac{n(n-1)!\,(10-n)}{10 \times 9}$$

$$P(D) = \frac{n(10-n)}{45} = \frac{10n - n^2}{45}$$

❖ عين قيم العدد الطبيعي n من أجل $P(D) = \frac{7}{15}$

$$P(D) = \frac{10n - n^2}{45} = \frac{7}{15}$$

يكافئ $n^2 - 10n + 21 = 0$ أي $n = 3$ أو $n = 7$

التمرين 03

① الإجابة الصحيحة هي : أ/ 277134 إمكانية لأن نختار حارس من بين 3 حراس و 10 لاعبين من بين 19 لاعب ومنه $C_3^1 \times C_{19}^{10} = 277134$.

② الإجابة الصحيحة هي : ب/ $\mu = 1 - \frac{1}{4}(ln\,3)^2$

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{(\ln 3)^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}\right) + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}(ln\,3)^2$$

③ الإجابة الصحيحة هي : جـ/ e لأن :

لدينا من جهة : $v_n = \frac{1}{e^{1-n}} = e^{n-1} = e^n \times e^{-1}$

ومن جهة أخرى $v_{n+1} = e^n$

ومنه $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^n}{e^n \times e^{-1}}$ ، أي $q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = e$

التمرين 04

I- g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + lnx$

① دراسة تغيرات الدالة g .

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2 - 2) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} [x^2 - 2 + \ln x] = +\infty$$

✍ g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0$$

لأن $x \in]0;+\infty[$ أي $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

② أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,31;\,1,32]$

$$\begin{cases} g(1,31) = -0,01 \\ g(1,32) = 0,02 \end{cases} \Rightarrow g(1,31) \times g(1,32) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,31 < \alpha < 1,32$.

ب/ إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	0	

II- f دالة بـ : $f(x) = x - e + \frac{1-\ln x}{x}$.

① بين أن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} (x-e) = -e \\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

❖ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - e + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

② تبيين أن $(\Delta): y = x - e$ مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-e)] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y = x - e$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

❖ دراسة الوضع النسبي بينهما .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (x-e) = \frac{1-\ln x}{x}$

من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ أي $x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(1 - \ln x)$.

لدينا $1 - \ln x \geq 0$ أي $-\ln x \geq -1$ أي $\ln x \leq 1$

أي $x \leq e$ أي $x \in]0; e]$.

لما يكون $x \in]0; e[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x \in]e; +\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x = e$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في $(e; 0)$.

③ أ/ تبيين أنه : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x} \times x - 1(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1 - 1 + \ln x}{x^2} = 1 + \frac{-2 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + -2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$.

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	**0**	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

④ تبيين أن $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$.

لدينا $f(\alpha) = \alpha - e + \frac{1-\ln\alpha}{\alpha}$ .....(1)

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$

ومنه $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ .....(2)

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha) = \alpha - e + \frac{1-(2-\alpha^2)}{\alpha} = \alpha - e + \frac{-1+\alpha^2}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \alpha - e - \frac{1}{\alpha} + \alpha = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$$

و هو المطلوب .

❖ استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$

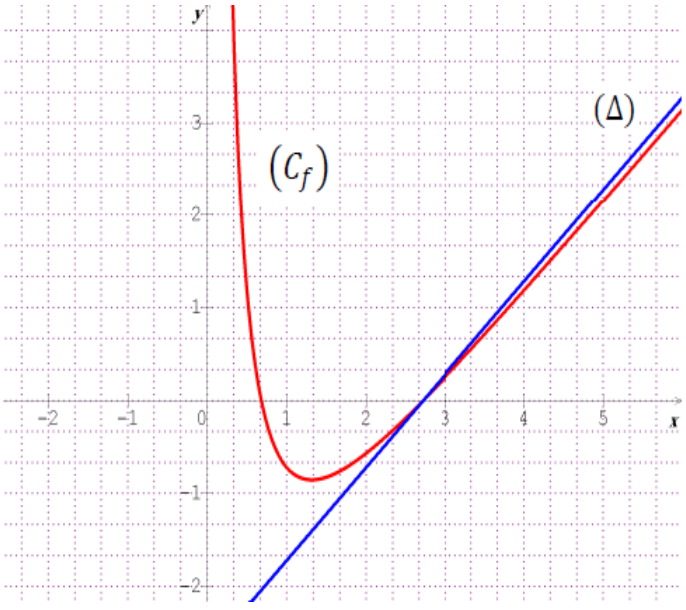
أي $-0{,}09 < 2\alpha - e < -0{,}07$

ولدينا من جهة أخرى $-0{,}76 < -\frac{1}{\alpha} < -0{,}75$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$-0{,}85 < 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha} < -0{,}82$$

⑤ أنشئ (C_f) و (Δ) .



⑥ نعتبر الدالتين H و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ كمايلي :
$H(x)=\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$ و $h(x)=\frac{1-\ln x}{x}$

أ/ بين أن H هي دالة أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$.

H هي دالة أصلية للدالة h معناه $H'(x)=h(x)$

الدالة H قابلة للإشتقاق ودالتها المشتقة هي :

$$H'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left[2\times\frac{1}{x}\times ln\,x\right]$$

$$H'(x)=\frac{1}{x}-\frac{ln\,x}{x}=\frac{1-ln\,x}{x}=h(x)$$

وهو المطلوب .

ب/ إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا $f(x)=x-e+\frac{1-\ln x}{x}$

ومنه $F(x)=\frac{1}{2}x^2-ex+\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

جـ/ احسب بـ cm^2 العدد A

لما يكون $x\in\,]e;5[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) ومنه

$$A=\int_e^5[y-f(x)]dx=\int_e^5-\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)dx$$

$$A=-\int_e^5 h(x)dx=\int_5^e h(x)dx=[H(x)]_5^e$$

$$A=\left[\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_5^e=$$

$$A=\left(\ln e-\frac{1}{2}(\ln e)^2\right)-\left(\ln 5-\frac{1}{2}(\ln 5)^2\right)$$

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2\ln 5-(\ln 5)^2}{2}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}-\frac{2\ln 5-(\ln 5)^2}{2}=\frac{1-2\ln 5+(\ln 5)^2}{2}$$

$$A=\left(\frac{1-2\ln 5+(\ln 5)^2}{2}\right)\times 2\times 2cm^2$$

$$A=(2-4\ln 5+2(\ln 5)^2)cm^2=0{,}74cm^2$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 2

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \end{cases}$.

① أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 3$.

جـ/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$.

جـ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$. ثم استنتج نهاية (u_n) .

③ نعتبر المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0-4}{3-u_0} + \frac{u_1-4}{3-u_1} + \cdots + \frac{u_n-4}{3-u_n}$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n < 4\left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right] - n - 1$.

④ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

" من لم يجد الأمان بين عائلته ، سيظل يرتجف للأبد "

التمرين 02

لدينا 3 أكياس متماثلة ، الكيس الأول U_1 يحوي كرية بيضاء وكرية سوداء ، الكيس الثاني U_2 يحوي كريتين بيضاوين وكرية سوداء أما الكيس الثالث U_3 يحوي ثلاث كريات بيضاء وكرية سوداء .

كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس ، نختار كيسا عشوائيا ونسحب منه كرية .

① أنجز شجرة الإحتمالات .

② أحسب احتمال الحدث A : " الحصول على كرية بيضاء " .

③ إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء ، ما إحتمال أن تكون من الكيس U_2 .

④ نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد ، ونقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب α دج ، حيث (α عدد طبيعي)ويسحب كرتين من الصندوق في آن واحد ، إذا سحب كريتين بيضاوين يخسر ما دفعه و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يعاد له ما دفعه ، وإذا سحب كريتين سوداوين يتحصل على $100\ DA$ ، وليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

أ/ برر أ

عب .

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1-2i$ و $z_B = -i$

في كل حالة من الحالات التالية ، عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير .

① حل المعادلة : $(1+2i)\bar{z}+2-i=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هو :

أ/ $z=-i$ ، ب/ $z=i$ ، جـ/ $z=1-2i$.

② عمدة للعدد المركب z حيث : $z=-3\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ هي :

أ/ $\frac{\pi}{7}$ ، ب/ $-\frac{\pi}{7}$ ، جـ/ $\pi-\frac{\pi}{7}$.

③ العدد المركب $L=\left(\frac{z_A-z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1446}$ يساوي :

أ/ $L=-1+i$ ، ب/ $L=1-i$ ، جـ/ $L=i$.

التمرين 04

لا تركب القطار الخطأ لمجرد أن الإنتظار مزعج

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x+1+e^{2x}$.

① أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

② بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث : $-0,7<\alpha<-0,6$.

③ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-x+(x+1)e^{-2x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$.

① أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب/ إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y=-x+1$.

جـ / أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)e^{-2x}$.

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث : $-1,2<x_1<-1,1$ و $1,1<x_2<1,2$.

④ أنشئ (C_f) و (Δ) ، نأخذ $f(\alpha)=2,9$.

⑤ بإستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$.

⑥ أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=-1$

بالتوفيق إن شاء الله

الحل المفصل لإختبار رقم 02

التمرين 01

① أ/ تبيين أن : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

لدينا : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} = \frac{2u_n+2-2}{\sqrt{u_n+1}} = \frac{2u_n+2}{\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

أي : $= \frac{2(u_n+1)}{\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}} = \frac{2(u_n+1)\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}\sqrt{u_n+1}} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$

أي : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$ ، وهو المطلوب .

ب/ برهن بالتراجع أن : $1 < u_n < 3$.

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $1 < u_n < 3$.

لدينا $u_0 = 2$ ،ومنه $1 < u_0 < 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 < u_{n+1} < 3$ ؟؟

لدينا : $1 < u_n < 3$ أي $2 < u_n + 1 < 4$

أي : $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 1} < 2$ أي $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{u_n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

أي : $-\sqrt{2} < -\frac{2}{\sqrt{u_n+1}} < -1$ .... (*)

لدينا : $1 < u_n < 3$ أي $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 1} < 2$

أي : $2\sqrt{2} < 2\sqrt{u_n + 1} < 4$ .... (**)

بجمع المتراجحتين (*) و (**) طرفا لطرف نجد :

$$\sqrt{2} < 2\sqrt{u_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{u_n + 1}} < 4 - 1$$

ومنه $1 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 3$ ، إذن $1 < u_{n+1} < 3$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أن : $1 < u_n < 3$.

جـ/ تبيين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n + 1}} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n + 1}}{\sqrt{u_n + 1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n + 1})}{\sqrt{u_n + 1}}$$

$$= \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n + 1})(2 + \sqrt{u_n + 1})}{\sqrt{u_n + 1}(2 + \sqrt{u_n + 1})}$$

$$\frac{u_n(4 - u_n - 1)}{\sqrt{u_n + 1}(2 + \sqrt{u_n + 1})} = \frac{u_n(3 - u_n)}{\sqrt{u_n + 1}(2 + \sqrt{u_n + 1})}$$

لدينا : $n < 3$ أي n

و لدينا :

إذن نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 3 فهي متقاربة .

② أ/ تبيين أن : $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$.

لدينا $9 - (u_{n+1})^2 = 9 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\right)^2 = 9 - \frac{4(u_n)^2}{u_n+1}$:

أي : $9 - (u_{n+1})^2 = \frac{9u_n+9-4(u_n)^2}{u_n+1}$

معلومة : يمكن تحليل ثلاثي كثير الحدود من الدرجة الثانية إذا كان ($\Delta > 0$) كمايلي :

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ومنه $-4(u_n)^2 + 9u_n + 9 = -4\left(u_n + \frac{3}{4}\right)(u_n - 3)$

ومنه $9 - (u_{n+1})^2 = \frac{-4\left(u_n+\frac{3}{4}\right)(u_n-3)}{u_n+1} = \frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$

ومنه $9 - (u_{n+1})^2 = \frac{(4u_n+4-1)}{u_n+1}(3 - u_n)$

ومنه $9 - (u_{n+1})^2 = \left(\frac{4(u_n+1)}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1}\right)(3 - u_n)$

ومنه $9 - (u_{n+1})^2 = \left(4 - \frac{1}{u_n+1}\right)(3 - u_n)$

لدينا من جهة أخرى $u_n < 3$ أي $u_n + 1 < 4$

أي $4 - \frac{1}{u_n+1} < \frac{15}{4}$ أي $-\frac{1}{u_n+1} < -\frac{1}{4}$ أي $\frac{1}{u_n+1} > \frac{1}{4}$

أي $4 - \frac{1}{u_n+1} < 4$ وبما أن $0 < 3 - u_n < 2$

إذن بضرب طرفي المتراجحة في $(3 - u_n)$ نجد

$$\left(4 - \frac{1}{u_n + 1}\right)(3 - u_n) < 4(3 - u_n)$$

إذن $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$ ، وهو المطلوب .

ب/ تبيين أنه : $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$.

لدينا : $9 - (u_{n+1})^2 < 4(3 - u_n)$

أي : $(3 - u_{n+1})(3 + u_{n+1}) < 4(3 - u_n)$

وبما أن $3 + u_{n+1} > 0$ فإن : $3 - u_{n+1} < \frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}}$

ولدينا (u_n) متزايدة تماما إذن $u_0 < \cdots < u_n < u_{n+1}$

أي : $2 < u_{n+1}$ ، ومنه $5 < 3 + u_{n+1}$

أي : $\frac{1}{3+u_{n+1}} < \frac{1}{5}$ ، ومنه $\frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$

ومنه $3 - u_{n+1} < \frac{4(3-u_n)}{3+u_{n+1}} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$

ومنه $3 - u_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - u_n)$ ، وهو المطلوب .

- :

لدينا : $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$ ومنه :

$$3-u_1<\frac{4}{5}(3-u_0)$$
$$3-u_2<\frac{4}{5}(3-u_1)$$
$$\vdots$$
$$3-u_{n-1}<\frac{4}{5}(3-u_{n-2})$$
$$3-u_n<\frac{4}{5}(3-u_{n-1})$$

بضرب المتراجحات طرفا لطرف نجد :

$$3-u_n<\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{4}{5}\right)(3-u_0)$$

أي $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n(3-2)$ ومنه $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$

❖ استنتاج نهاية (u_n) .

لدينا : $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$ و لدينا أيضا : $3-u_n>0$

إذن $0<3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$

لأن $-1<\frac{4}{5}<1$ إذن حسب مبرهنة الحصر فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)=0$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=3$

③ نعتبر S_n حيث: $S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+\cdots+\frac{u_n-4}{3-u_n}$.

بين أنه : $S_n<4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]-n-1$.

لدينا : $\frac{u_n-4}{3-u_n}=\frac{u_n-3-1}{3-u_n}=\frac{-1-(3-u_n)}{3-u_n}=\frac{-1}{3-u_n}-1$

بالتعويض نجد :

$$S_n=\frac{-1}{3-u_0}-1+\frac{-1}{3-u_1}-1+\cdots+\frac{-1}{3-u_n}-1$$
$$S_n=\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\cdots+\frac{-1}{3-u_n}\right)-n-1$$
$$S_n=S'_n-n-1$$

حيث $S'_n=\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\cdots+\frac{-1}{3-u_n}$

لدينا سابقا $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$ أي $\frac{1}{3-u_n}>\left(\frac{5}{4}\right)^n$

أي $\frac{-1}{3-u_n}<-\left(\frac{5}{4}\right)^n$ ، ومنه بالتعويض نجد

$$\frac{-1}{3-u_0}<-\left(\frac{5}{4}\right)^0$$
$$\frac{-1}{3-u_1}<-\left(\frac{5}{4}\right)^1$$
$$\vdots$$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$\frac{-1}{3-u_0}+\cdots+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0+\cdots+\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$
$$S'_n<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0+\cdots+\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$
$$S'_n<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0\left(\frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{4}}\right)\right]$$
$$S'_n<-\left[\left(\frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{\frac{-1}{4}}\right)\right]$$
$$S'_n<4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right)$$

وبما أن $S_n=S'_n-n-1$ فإن

$$S_n<4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]-n-1$$

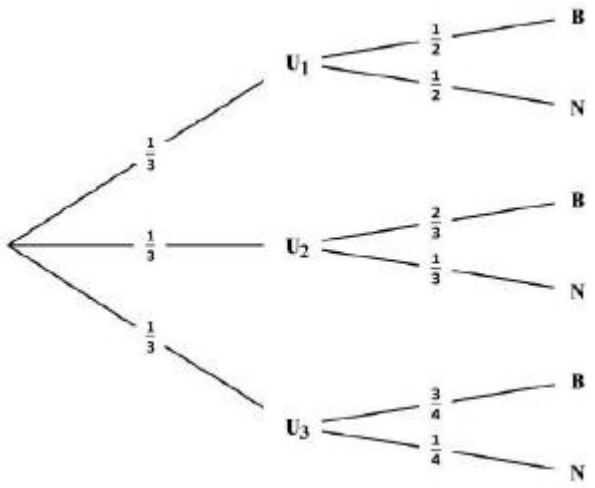
④ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]-n-1\right)=-\infty$

حسب مبرهنة النهايات بالمقارنة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$

التمرين 02

① أنجز شجرة الإحتمالات .



② أحسب احتمال A : " الحصول على كرية بيضاء " .

$$P(A)=P(U_1\cap B)+P(U_2\cap B)+P(U_3\cap B)$$
$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{23}{36}$$

③ إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء ، ما إحتمال أن

$$P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{23}{36}} = \frac{8}{23}$$

④ أ/ تبرير أن $X(\Omega) = \{100-\alpha; 0; -\alpha\}$.

الحدث $(X = 100-\alpha)$ معناه سحب (NN) .

الحدث $(X = 0)$ معناه سحب (NB) .

الحدث $(X = -\alpha)$ معناه سحب (BB) .

ب/ عرف قانون إحتماله .

$$P(X = 100-\alpha) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_9^2} = \frac{18}{36}$$

$$P(X = -\alpha) = \frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{15}{36}$$

$X = x_i$	$100-\alpha$	0	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{15}{36}$

❖ عين أصغر قيمة ممكنة لـ α

تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب إذا وفقط إذا كان :

$E(X) < 0$ أي $\frac{300-3\alpha-15\alpha}{36} < 0$ أي $300 - 18\alpha < 0$

أي $-18\alpha < -300$ ، أي $\alpha > \frac{300}{18} \simeq 16{,}66$

إذن أصغر قيمة ممكنة لـ α هي $\alpha = 17$.

التمرين 03

① الإجابة الصحيحة هي : أ/ $z = -i$ ، لأن

لدينا $(1+2i)\bar{z} + 2 - i = 0$ ، أي $\bar{z} = \frac{-2+i}{1-2i}$

أي $\bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-2+4i+i+2}{1^2+2^2} = \frac{5i}{5} = i$

لدينا : $\bar{z} = i$ ، ومنه $z = -i$.

② الإجابة الصحيحة هي : ب/ $-\frac{\pi}{7}$ ، لأن

$$z = -3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

لأن $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7}$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$

③ الإجابة الصحيحة هي : جـ/ $L = i$.

لدينا : $\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{1-2i+i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{}$ $\frac{\sqrt{2}}{}$

لدينا

ومنه $arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ ، ومنه $\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$

ومنه $L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1446} = \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{1446} = e^{\frac{-1446\pi}{4}i}$

$$L = \cos\left(-\frac{1446\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{1446\pi}{4}\right)$$

$$L = \cos\left(\frac{-1448\pi + 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-1448\pi + 2\pi}{4}\right)$$

$$L = \cos\left(-362\pi + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-362\pi + \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$L = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

التمرين 04

I- g دالة $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$.

① أ/ أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(2x + 1 + e^{2x}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x + 1 + e^{2x}) = +\infty$$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = 2 + 2e^{2x} > 0$$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

② تبيين أن $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α .

g مستمرة و متزايدة تماما على $[-0{,}7; -0{,}6]$

$g(-0{,}7) \times g(-0{,}7) < 0$ ، إذن $\begin{cases} g(-0{,}7) = -0{,}1 \\ g(-0{,}6) = 0{,}1 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$

تقبل حل وحيدا α حيث : $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

③ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II- f دالة حيث : $f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$.

① أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[1 + e^{-2x}(x + 1 - xe^{2x})]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[1 + e^{-2x}\left(x + 1 - \frac{1}{2}(2x)e^{2x}\right)\right] = -\infty$$

$-2x$ $-2x$

$\lim_{x\to+\infty} f($

$= \lim_{x\to+\infty}[$

ب/ إستنتج أن $(\Delta): y = -x + 1$ مستقيم مقارب مائل.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty}[xe^{-2x} + e^{-2x}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}(-2xe^{-2x}) + e^{-2x}\right] = 0$$

$(\Delta): y = -x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

جـ / دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-x+1) = (x+1)e^{-2x}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-2x} > 0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)$ ومنه

لما يكون $x \in]-\infty; -1[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x \in]-1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x = -1$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في $(-1; 2)$.

② أ/ تبيين أنه : $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$.

$$f'(x) = -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1)$$

$$f'(x) = -1 + e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x}$$

$$f'(x) = -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$f'(x) = -e^{-2x}\left(\frac{1}{e^{-2x}} + 1 + 2x\right)$$

$$f'(x) = -e^{-2x}(e^{2x} + 1 + 2x) = -g(x)e^{-2x}$$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-2x} > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

③ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث : $-1{,}1 < x_1 < -1{,}2$ و $1{,}2 < x_2 < 1{,}1$

f مستمرة و متزايدة تماما على $[-1{,}2; -1{,}1]$

$f(-1{,}2) \simeq -0{,}8$ و $f(-1{,}1) \simeq 0{,}05$ ، إذن $f(-1{,}2) \times f(-11) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا x_1 حيث : $-1{,}2 < x_1 < -1{,}1$.

$f(1{,}1) \simeq 0{,}13$ و $f(1{,}2) \simeq -0{,}02$ ، إذن $f(1{,}1) \times f(1{,}2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا x_2 حيث : $1{,}1 < x_2 < 1{,}2$.

ومنه نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث : $-1{,}2 < x_1 < -1{,}1$ و $1{,}1 < x_2 < 1{,}2$.

⑤ المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية لـ $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$

$u(x) = x + 1$	$u'(x) = 1$
$v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$	$v'(x) = e^{-2x}$

$$\int (x+1)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}[(x+1)e^{-2x}] + \int \frac{1}{2}e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}[(x+1)e^{-2x}] + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right] = \left(\frac{-x-1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= \left(\frac{-2x-2}{4} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} = \left(\frac{-2x-3}{4}\right)e^{-2x} + C$$

⑥ أحسب A مساحة الحيز

لما يكون $x \in [-1; 1]$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) ومنه

$$A = \int_{-1}^{1}[f(x) - (1-x)]dx = \int_{-1}^{1}(x+1)e^{-2x}dx$$

$$A = \left[\left(\frac{-2x-3}{4}\right)e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-5e^{-2}}{4} - \left(-\frac{1}{4}e^{2}\right)$$

$$A = \left(\frac{e^2 - 5e^{-2}}{4}\right)ua$$

الرسم



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 3

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$.

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة . ثم حدد نهايتها .

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - 3| < \frac{2}{5}|u_n - 3|$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n (3 - u_0)$.

③ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = n(3 - u_n)$.

أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

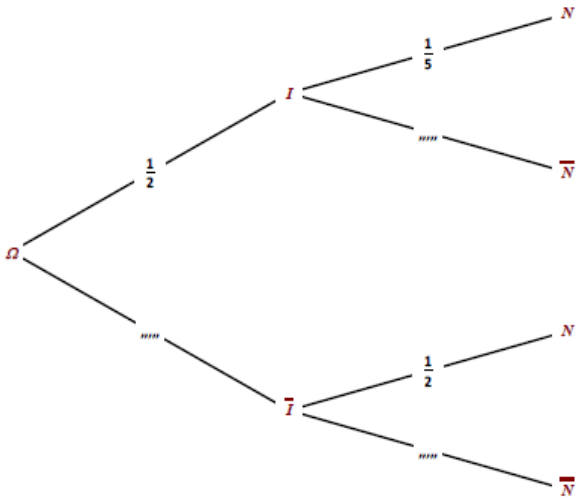
" ستعلمك أمك كل شيء إلا العيش بدونها "

التمرين 02

صندوق يحتوي على 4 كرات سوداء و كرية واحدة بيضاء ، لا نميز بين الكرات عند اللمس .

✍ نعتبر اللعبة التالية :

يقوم اللاعب برمي زهرة نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء إلى الصندوق ، وإذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء إلى الصندوق ، بعد ذلك يسحب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .



✍ نعتبر الأحداث التالية : I : " الرقم الظاهر فردي "

N : " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

① أحسب الإحتمالات $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\bar{I}}(N)$ و $P(N \cap I)$.

②أ/ أكمل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة

ب/ بين أن $P(N) = \frac{7}{20}$

③ علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟

④ ليكن

ب/ أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكرات البيضاء المسحوبة . جـ / إستنتج التباين $V(X)$.

التمرين 03

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$.

① أ/ عين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = (z-3)(z^2 + az + b)$

ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

② المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

النقاط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $z_A = 3$ ، $z_B = i\sqrt{3}$ ، $z_C = -i\sqrt{3}$ ، $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

✍ بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

③ عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

④ F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ/ احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OF) و (OE) متعامدان .

ب/ عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

سُئل أعرابي ما رأيك في فلان ؟ فقال لو كان في بني إسرائيل حين أمرهم موسى بذبح بقرة لما ذبحو غيره .

التمرين 04

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 1$.

① أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

② بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث : $1{,}56 < \alpha < 1{,}57$.

③ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 1$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

② أ/ بين أن f هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أ/ إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ ، معادلته $y = -x + 1$.

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

④ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

⑤ أ/ بين أن $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha - 1}$، ثم بين أن $f(\alpha) < 0$.

ب/ أستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين موجبين .

⑥ أنشئ (C_f) و (Δ) و (T)، وحدة الرسم $2cm$.

⑦ λ عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 2[$ و $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : و و .

أ/ أحسب

الحل المفصل لإختبار رقم03

التمرين 01

① ب/ البرهان بالتراجع أن : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$.

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$.

لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ ،ومنه $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$ ؟؟

لدينا : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$ أي $1 \leq 2u_n \leq 6$

أي : $4 \leq 2u_n + 3 \leq 9$ أي $2 \leq \sqrt{2u_n+3} \leq 3$

أي : $\frac{1}{2} \leq 2 \leq \sqrt{2u_n+3} \leq 3$.

ومنه $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$ ،

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$.

ب/ تبيين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+3} - u_n =$$

$$= \frac{(\sqrt{2u_n+3} - u_n)(\sqrt{2u_n+3} + u_n)}{(\sqrt{2u_n+3} + u_n)}$$

$$= \frac{2u_n + 3 - {u_n}^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} = \frac{-{u_n}^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

إشارة الفرق من إشارة البسط لأن $\sqrt{2u_n+3} + u_n > 0$

u_n	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$		$-$	0	$+$ 0	$-$

بما أن $\frac{1}{2} \leq u_n < 3$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه نستنتج المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

❖ استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة .

❖ حدد نهايتها

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ومنه $l = \sqrt{3}$ ، إذن l^2

ومنه

الحل السالب مرفوض لأن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

② أ/ تبيين أنه : $|u_{n+1} - 3| < \frac{2}{5}|u_n - 3|$.

لدينا من جهة $|u_{n+1} - 3| = |\sqrt{2u_n+3} - 3|$

$$= \left|\frac{(\sqrt{2u_n+3} - 3)(\sqrt{2u_n+3} + 3)}{\sqrt{2u_n+3} + 3}\right|$$

$$= \left|\frac{2u_n + 3 - 9}{\sqrt{2u_n+3} + 3}\right| = \left|\frac{2u_n - 6}{\sqrt{2u_n+3} + 3}\right| = \frac{2|u_n - 3|}{\sqrt{2u_n+3} + 3}$$

لأن $\sqrt{2u_n+3} + 3 > 0$

و لدينا من جهة أخرى $u_n \geq \frac{1}{2}$ ومنه $2u_n \geq 1$

ومنه $2u_n + 3 \geq 4$ ، ومنه $\sqrt{2u_n+3} \geq 2$

ومنه $\sqrt{2u_n+3} + 3 \geq 5$ ، أي $\frac{1}{\sqrt{2u_n+3}+3} \leq \frac{1}{5}$

بضرب الطرفين في $2|u_n - 3|$ نجد :

$$\frac{2|u_n - 3|}{\sqrt{2u_n+3} + 3} \leq \frac{2}{5}|u_n - 3|$$

ومنه $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{5}|u_n - 3|$

ب/ استنتاج أنه : $3 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n (3 - u_0)$.

لدينا مما سبق : $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{5}|u_n - 3|$

$$|u_1 - 3| \leq \frac{2}{5}|u_0 - 3|$$

$$|u_2 - 3| \leq \frac{2}{5}|u_1 - 3|$$

$$|u_3 - 3| \leq \frac{2}{5}|u_2 - 3|$$

$$\vdots$$

$$|u_n - 3| \leq \frac{2}{5}|u_{n-1} - 3|$$

بضرب أطراف المتباينة طرفا لطرف نجد :

$$|u_n - 3| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n |u_0 - 3|$$

لدينا $u_0 - 3 < 0$ إذن $|u_0 - 3| = 3 - u_0$

و $u_n - 3 < 0$ ، إذن $|u_n - 3| = 3 - u_n$

ومنه بالتعويض نجد $3 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n (3 - u_0)$

③ أ/ تبيين أنه : $\frac{4}{v_{n+1}}$.

ولدينا سابقا $|u_{n+1}-3| \leq \frac{2}{5}|u_n-3|$

أي أن : $3-u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(3-u_n)$

ومنه $\frac{3-u_{n+1}}{3-u_n} \leq \frac{2}{5}$ ..... (1)

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $n \geq 1$

ومنه : $\frac{1}{n} \leq 1$ ، أي $\frac{1}{n}+1 \leq 2$ أي أن $\frac{n+1}{n} \leq 2$ ...(2)

بضرب طرفي المتباينة (1) و (2) طرفا لطرف نجد :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 2\left(\frac{2}{5}\right)$ ، وبالتالي $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$ و هو المطلوب .

ب/ استنتاج أنه : $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

لدينا مما سبق $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$ ومنه

$$\frac{v_2}{v_1} \leq \frac{4}{5}$$
$$\frac{v_3}{v_2} \leq \frac{4}{5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \leq \frac{4}{5}$$

بضرب المتباينات طرف لطرف نجد $\frac{v_n}{v_1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

وبما أن $v_1 = 1(3-u_1) = 3-2 = 1$

إذن $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

④ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

لدينا : $v_n = n(3-u_n) > 0$ لأن $3 > u_n$

ولدينا أيضا $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ وبالتالي $0 < v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 0$ لأن $-1 < \frac{4}{5} < 1$

ومنه حسب مبرهنة الحصر فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

التمرين 02

① حساب $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\bar{I}}(N)$ و $P(N \cap I)$.

$P(I) = \frac{3}{6}$ ، ومنه $P(I) = \frac{1}{2}$

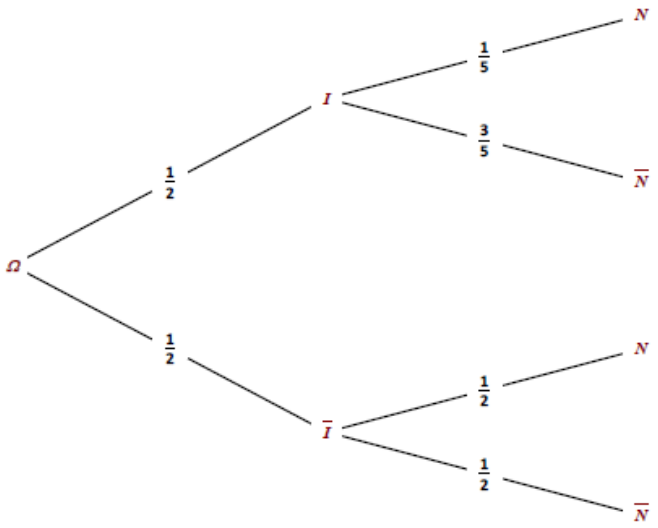
$P_I(N) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20}$ ، ومنه $P_I(N) = \frac{1}{5}$

$P_{\bar{I}}(N) = \frac{C_5^3}{C_6^3} = \frac{10}{20}$ ، ومنه $P_{\bar{I}}(N) = \frac{1}{2}$

لدينا I

- —

② أ/ أكمل شجرة الإحتمالات



ب/ تبيين أن $P(N) = \frac{7}{20}$.

$$P(N) = P(N \cap I) + P(N \cap \bar{I}) =$$
$$P(N) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}+\frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

③ علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟

$$P_N(\bar{I}) = \frac{P(N \cap \bar{I})}{P(N)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{20}} = \frac{5}{7}$$

④ ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة . أي $X \in \{0,1,2\}$

أ/ تبيين أن $P(X=1) = \frac{11}{20}$

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{C_2^1\times C_4^2}{C_6^3}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{C_1^1\times C_5^2}{C_6^3}\right)$$
$$P(X=1) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{12}{20}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{10}{20}\right) = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

❖ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

$$P(X=0) = P(N) = \frac{7}{20}$$
$$P(X=2) = \frac{1}{2}\times\frac{C_2^2\times C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{20} = \frac{2}{20}$$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{2}{20}$

ب/ أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكرات البيضاء

القيمة المتوسطة هي الأمل الرياضي $E(X) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

جـ / إستنتاج التباين .

$V(X) = (0$

التمرين 03

① أ/ تعيين العددين a و b .

لدينا : $(z-3)(z^2+az+b)$ ، بعد النشر والتبسيط نجد :

$z^3+(a-3)z^2+(b-3a)z-3b$

بالمطابقة نجد : $a-3=-3$ ، ومنه $a=0$

$-3b=-9$ ، ومنه $b=3$ ، ومنه بالتعويض نجد :

$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(z^2+3)$

ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

المعادلة (E) تكافئ $z=3$ أو $z^2=-3$ أي

$z=3$ أو $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

② تبيين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{3+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}\times\frac{2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}=\frac{6\sqrt{3}i-6}{-12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

لدينا : $\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

وهذا يعني أن $|z_A-z_C|=|z_B-z_C|$ أي $CA=CB$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين .

لدينا : $arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=arg\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\theta_1$

لدينا : $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ أي $\theta_1=-\frac{\pi}{3}$.

وهذا يعني أن $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{3}$ ، إذن نستنتج أن

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

طريقة ثانية : يمكن حساب AB و AC و BC .

③ عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة D

بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

نعلم أن : $z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_O)$

وبما أن E صورة النقطة D فإن

$z_E-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D-z_O)$

أي $z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}z_D$ أي $z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

أي $z_E=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}$ أي $z_E=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

أي $z_E=2\left[\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right]=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

أي $\sqrt{3}-i$ E

④ النقط

أ/ حساب $\frac{z_F}{z_E}$.

$$\frac{z_F}{z_E}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}\times\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}=\frac{-\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1^2}=i$$

إذن $\frac{z_F}{z_E}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

❖ استنتاج أن (OF) و (OE) متعامدان .

لدينا $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي $\frac{z_F}{z_E}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه نستنتج أن المستقيمين (OF) و (OE) متعامدان .

ب/ عين z_G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

لدينا $\frac{z_F}{z_E}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن : $OE=OF$ و $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{\pi}{2}$

$OEGF$ مربع معناه $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{FG}$ أي $z_E=z_G-z_F$

أي : $z_G=1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$

التمرين 04

① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}[(x-1)e^{x-1}-1]=-1$$

توضيح : بوضع $x-1=t$ ، إذن

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{x-1}=\lim_{x\to-\infty}te^t=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[(x-1)e^{x-1}-1]=+\infty$$

$$g'(x)=e^{x-1}+(x-1)e^{x-1}=xe^{x-1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{x-1}>0$ ومنه

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ومنه نستنتج أن

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-1-e^{-1}$	↗	$+\infty$

② تبيين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α

g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1{,}56;1{,}57]$

$g(1{,}56)\times g(1{,}57)<0$ أي $\begin{cases}g(1{,}56)=-0{,}01\\ g(1{,}57)=0{,}007\end{cases}$ و

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن $g(x)=0$

. 1,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- f دالة $f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 1$

① حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [xe^{x-1} - 2e^{x-1} - x + 1]$$
$$\lim_{x\to-\infty} [xe^{x} \times e^{-1} - 2e^{x-1} - x + 1] = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x}[(x-2)e^{-1} - xe^{-x}] + 1 = +\infty$$

② أ/ تبيين أن f هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

f هي دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ معناه $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = e^{x-1} + (x-2)e^{x-1} - 1$$
$$= (1 + x - 2)e^{x-1} - 1 = (x-1)e^{x-1} - 1 = g(x)$$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

③ أ/ إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x+1)]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} [xe^{x} \times e^{-1} - 2e^{x-1}] = 0$$

ب/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x+1) = (x-2)e^{x-1}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{x-1} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ ، ومنه

- لما $x \in]-\infty;2[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .
- لما $x \in]2;+\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .
- لما $x = 2$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في $(2;-1)$

④ كتابة معادلة المماس (T) عند $x_0 = -1$.

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$
$$(T): y = (-2e^{-2} - 1)x - 5e^{-2} + 1$$

⑤ أ/ تبيين أن $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}$.

لدينا $f(\alpha) = (\alpha-2)e^{\alpha-1} - \alpha + 1$ .... (1)

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ، أي $e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1}$ ...(2)

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$= \frac{\alpha-1-1}{\alpha-1} - \alpha + 1 = 1 + \frac{-1}{\alpha-1} - \alpha + 1$$
$$= 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1} = f(\alpha)$$

❖ تبيين أن $f(\alpha) < 0$.

لدينا : $1,56 < \alpha < 1,57$ ، أي $0,56 < \alpha - 1 < 0,57$

أي $1,75 < \frac{1}{\alpha-1} < 1,78$ ، أي $-1,78 < \frac{-1}{\alpha-1} < -1,75$

ولدينا $1,56 < \alpha < 1,57$ أي $0,43 < 2 - \alpha < 0,44$

ومنه $-1,35 < f(\alpha) < -1,31$ ، أي $f(\alpha) < 0$

ب/ استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين موجبين

f مستمرة ومتناقصة على $[0;\alpha]$ و $f(0) = 0,2$ و $f(\alpha) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;\alpha[$.

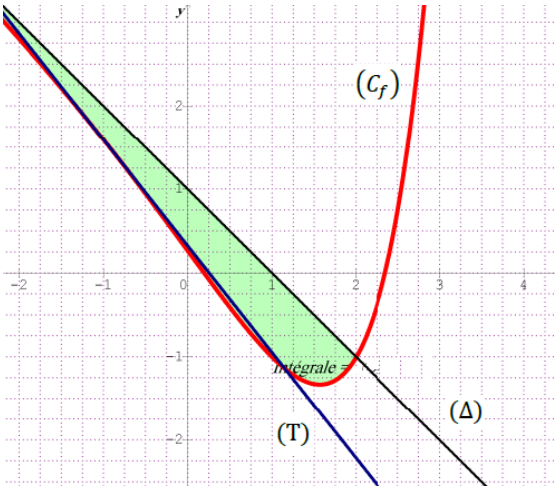
f مستمرة ومتناقصة على $[\alpha;+\infty[$ و $f(\alpha) < 0$ و

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]\alpha;+\infty[$

ومنه نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين موجبين

⑥ أنشئ (C_f) و (Δ) و (T)، وحدة الرسم $2cm$.



⑦ أ/ حساب $A(\lambda)$.

لما $x \in]-\infty;2[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .

$$A(\lambda) = -\int_{\lambda}^{2} (f(x) - (-x+1))dx = -\int_{\lambda}^{2} (x-2)e^{x-1}dx$$

$u(x) = x-2$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^{x-1}$	$v'(x) = e^{x-1}$

$$A(\lambda) = -\left([(x-2)e^{x-1}]_{\lambda}^{2} - \int_{\lambda}^{2} e^{x-1}dx\right)$$
$$A(\lambda) = -[(x-2)e^{x-1}]_{\lambda}^{2} + [e^{x-1}]_{\lambda}^{2} =$$
A(

$\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 4

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2} \end{cases}$.

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

② أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$

ب/ إستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة ، وبرر تقاربها . ثم حدد نهايتها .

③ أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 < \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 3 < 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

④ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = ln(u_n - 2)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

⑤ أحسب بدلالة n العدد $P_n = (u_0 - 2) \times (u_1 - 2) \times \ldots \times (u_n - 2)$ ، ثم استنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 81$.

التمرين 02

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق U_2 على كرتين حمراوين و 5 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق U_3 على 3 كرات تحمل الرقم 1 و كرتين تحملان الرقم 2 .

I- نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من U_1 ، ولا نهتم بالصندوقين U_2 و U_3 .

① ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون .

② ماهو احتمال الحصول على كرية بيضاء على الأقل .

كثرة الإختلاط تفقد المرء هيبته وتجعله مألوفا مستهلكا ، احتفظ دائما بالكثير من نفسك لنفسك

③ ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

II- نسحب الآن كرة من U_3 ، إذا كان رقمها هو 1 نسحب كرة من U_1 ، و إذا كان رقمها هو 2 نسحب كرة من U_2 .

① ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء .

② علما أن الكرة المسحوبة حمراء ماهو احتمال أن كونها مسحوبة من . نسمي الأحد رقم 1 "

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتين لاحقتيهما :
$z_A = \sqrt{3}+3i$ ، $z_B = \sqrt{3}-3+i(\sqrt{3}+3)$.

① أكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي ، ثم بين أن ${z_A}^{2025}$ عددا حقيقيا سالبا .

② أ/ أكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي .

ب/ استنتج طبيعة المثلث OAB . وقيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

③ أ/ بين أن $OB = 2\sqrt{6}$ وأن $(\vec{u},\overrightarrow{OB}) = \frac{7\pi}{12}$ ، ثم أكتب z_B على الشكل المثلثي .

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

④ نعتبر النقطة C من المستوي التي لاحقتها $z_C = z_B - z_A$. بين أن $OABC$ متوازي أضلاع .

التمرين 04

I- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $[-4;+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2\ln(1-2x) & ;x \in [-4;0] \\ f(x) = ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) & ; \quad x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

" إحذر ! وراء كل اهتمام مفاجئ ، مصلحة "

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

① بين أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 0$.

② أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x}$ ، وبين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ ، ماذا تستنتج .

ب/ فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .

جـ / عين معادلتي المماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) عند المبدأ .

③ أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) = x - ln\,2 + ln(1+e^{-x})$.

جـ / إستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x - ln\,2$.

د / أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

④ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

⑤ أ/ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والأخر α حيث $-1{,}73 < \alpha < 1{,}72$.

ب / أرسم (Δ) والمنحنى (C_f) .

⑥ أ/ بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين في $[-4;+\infty[$ الدالة الأصلية H للدالة $h(x) = ln(1-2x)$ حيث $H(-1) = 0$.

ب/ أحسب المساحة S ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها :
$x = -4$ ، $x = 0$ ، $y = x - \ln 2$.

⑦ m عدد حقيقي غير معدوم ، g_m الدالة العددية المعرفة على المجال $[-4;0[$ بـ : $g_m(x) = 1 + mf(x)$.
نسمي (C_m) المنحنى الممثل للدالة g_m .

✍ بين أن .

الحل المفصل لإختبار رقم 04

التمرين 01

① ب/ برهن بالتراجع أن : $3 \leq u_n \leq 11$.

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $3 \leq u_n \leq 11$.

لدينا $u_0 = 11$ ،ومنه $3 < u_0 \leq 11$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $3 \leq u_{n+1} \leq 11$ ؟؟

لدينا : $3 \leq u_n \leq 11$ أي $1 \leq u_n - 2 \leq 9$

أي : $1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$ أي : $3 \leq 2 + \sqrt{u_n - 2} \leq 5$

أي: $3 \leq u_{n+1} \leq 5 < 11$ ،ومنه $3 \leq u_{n+1} \leq 11$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $3 \leq u_n < 11$.

② أ/ التحقق: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}(1 - \sqrt{u_n - 2})$

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \sqrt{u_n - 2} - u_n =$$
$$\sqrt{u_n - 2} - (u_n - 2) = \sqrt{u_n - 2} - \left(\sqrt{u_n - 2}\right)^2$$
$$= \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$$

ب/ تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة

$\sqrt{u_n - 2} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - \sqrt{u_n - 2}$

لدينا : $3 \leq u_n < 11$ أي $1 \leq u_n - 2 < 9$

أي$1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$ أي $-3 \leq -\sqrt{u_n - 2} \leq -1$

أي $-2 \leq 1 - \sqrt{u_n - 2} \leq 0$

ومنه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه (u_n) متناقصة

❖ استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 فهي متقاربة .

❖ حدد نهايتها

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة إذن

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

ومنه $2 + \sqrt{l - 2} = l$ ، إذن $\sqrt{l - 2} = l - 2$

ومنه $\left(\sqrt{l - 2}\right)^2 = (l - 2)^2$ ، أي

$l^2 + 4 - 4l$ ، ومنه

② أ/ تبيين أنه : $0 \leq u_{n+1} - 3 < \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

لدينا : $3 \leq u_n \leq 11$ ، ومنه $1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$

ومنه $3 \leq \sqrt{u_n - 2} + 2 \leq 5$ أي $3 \leq u_{n+1} \leq 5$

ومنه $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq 2$ أي $1 \leq u_{n+1} - 3 \leq 2$ .... (1)

❖ يبقى لنا أن نثبت أن $u_{n+1} - 3 < \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

لدينا : $u_{n+1} - 3 = \frac{(\sqrt{u_n - 2} - 1)(\sqrt{u_n - 2} + 1)}{(\sqrt{u_n - 2} + 1)}$

أي $u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 2 - 1}{\sqrt{u_n - 2} + 1} = \frac{u_n - 3}{\sqrt{u_n - 2} + 1}$

لدينا مما سبق $1 \leq \sqrt{u_n - 2} \leq 3$

ومنه $2 \leq \sqrt{u_n - 2} + 1 \leq 4$

ومنه $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{u_n - 2} + 1} \leq \frac{1}{2}$ ، ومنه $\frac{1}{\sqrt{u_n - 2} + 1} \leq \frac{1}{2}$

بضرب طرفي المتراجحة في $(u_n - 3)$ نجد :

$$\frac{u_n - 3}{\sqrt{u_n - 2} + 1} \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$$

وبما أن $u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{\sqrt{u_n - 2} + 1}$

فإن $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$ ..... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

ب/ استنتاج أنه : $0 \leq u_n - 3 < 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا مما سبق : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

$$0 \leq u_1 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 3)$$
$$0 \leq u_2 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 - 3)$$
$$\vdots$$
$$0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 3)$$

بضرب أطراف المتباينة طرفا لطرف نجد :

$$0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 3)$$

لدينا $u_0 - 3 = 11 - 3 = 8$ إذن

$$0 \leq u_n - 3 \leq 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

④ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية .

$$v_{n+1} = ln(u_{n+1} - 2) = ln(2 + \sqrt{u_n - 2} - 2)$$

$v_{n+1} = ln($ ——— – –

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_0 = ln(u_0 - 2) = ln\,9$

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = ln\,9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

❖ استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n .

لدينا : $v_n = ln(u_n - 2)$ ، ومنه $u_n = e^{v_n} + 2$

ومنه $u_n = e^{ln\,9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 2$

⑤ أحسب بدلالة n العدد :

$$P_n = (u_0 - 2) \times (u_1 - 2) \times \ldots \times (u_n - 2)$$

لدينا مما سبق $u_n - 2 = e^{v_n}$ ومنه بالتعويض نجد

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}$$

$$P_n = e^{v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)} = e^{ln\,9\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)}$$

$$P_n = e^{2\,ln\,9\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

❖ استنتاج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 81$.

لدينا $-1 < \frac{1}{2} < 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{2\,ln\,9} = e^{ln\,9^2} = 81$

التمرين 02

I- ① احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون

$$\frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

② ماهو احتمال الحصول على كرية بيضاء على الأقل

$$\frac{C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1 + C_3^3 C_4^0}{C_7^3} = \frac{31}{35}$$

③ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

✍ قيم المتغير العشوائي X هي $\{0,1,2,3\}$

$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}$ ، $P(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$

$P(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$ ، $P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

II- ① احتمال الحصول على كرة حمراء .

② علما أن الكرة المسحوبة حمراء ماهو احتمال أن كونها مسحوبة من U_1 .

$$P_R(U_{1(R)}) = \frac{\frac{12}{35}}{\frac{16}{35}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

التمرين 03

① كتابة العدد المركب z_A على الشكل الأسي .

$$r = |z_A| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

نضع $arg(z_A) = \theta$ ، ومنه $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ومنه : $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

❖ تبيين أن ${z_A}^{2025}$ عددا حقيقيا سالبا .

$${z_A}^{2025} = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2025} = \left(2\sqrt{3}\right)^{2025} \times e^{i\frac{2025\pi}{3}}$$

$${z_A}^{2025} = \left(2\sqrt{3}\right)^{2025} \times e^{i675\pi} = \left(2\sqrt{3}\right)^{2025} \times e^{i\pi}$$

$${z_A}^{2025} = -\left(2\sqrt{3}\right)^{2025} \in \mathbb{R}^-$$

② أ/ كتابة $\frac{z_B - z_A}{z_A}$ على الشكل الجبري والأسي .

$$\frac{z_B - z_A}{z_A} = \frac{\sqrt{3} - 3 + i(\sqrt{3} + 3) - \sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} + 3i}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{i^2 3 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{i(\sqrt{3} + 3i)}{\sqrt{3} + 3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب/ استنتاج طبيعة المثلث OAB .

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_A - z_O|} = \frac{AB}{OA} = 1$$

ومنه $AB = OA$

لدينا $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ أي، $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$.

ومنه OAB مثلث قائم في A ومتساوي الساقين .

❖ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$$

③ أ/ تبيين أن $OB = 2\sqrt{6}$ وأن $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{7\pi}{12}$.

$$OB = \sqrt{3 + 9}$$

2

$$(\vec{u},\overrightarrow{OB}) = (\vec{u},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

❖ كتابة z_B على الشكل المثلثي .

لدينا $|z_B| = 2\sqrt{6}$ و $arg(z_B) = \frac{7\pi}{12}$ ومنه

$$z_B = 2\sqrt{6}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{6}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

ب/ استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\sqrt{3} - 3 + i(\sqrt{3}+3) = 2\sqrt{6}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{6}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

ومنه $\begin{cases} 2\sqrt{6}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-3 \\ 2\sqrt{6}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}} \\ sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}} \end{cases}$

④ تبيين أن $OABC$ متوازي أضلاع .

لدينا $z_C = -3 + \sqrt{3}i$

$OABC$ متوازي أضلاع معناه $z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$

لدينا من جهة $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3 + \sqrt{3}i$

ومن جهة أخرى $z_{\overrightarrow{OC}} = z_C = -3 + \sqrt{3}i$

وهو المطلوب .

التمرين 04

① تبيين أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^<} f(x) = \lim_{x\to 0^<} (x^2 - 2\,ln(1-2x)) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^>} f(x) = \lim_{x\to 0^>} ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = 0$$

ومنه $\lim_{x\to 0^<} f(x) = \lim_{x\to 0^>} f(x) = f(0)$.

ومنه نستنتج أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 0$.

② أ/حساب $\lim_{x\to 0^<} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^<} \left(\frac{x^2 - 2\,ln(1-2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^<} \left(x - \frac{2\,ln(1-2x)}{x}\right)$$

مساعدة : نضرب ونقسم على -2 ، ومنه

$$\lim_{x\to 0^<} \left(x + 4\left(\frac{ln(1-2x)}{-2x}\right)\right)$$

بوضع $t = -2x$ ، لما $x \to 0^<$ فإن $t \to 0^>$ ومنه :

$$\lim_{x\to 0^<} \left(\frac{ln(1-2x)}{-2x}\right) = \lim_{t\to 0^>} \left(\frac{ln(1+t)}{t}\right) = 1$$

ومنه $\lim_{x\to 0^<} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^<} \left(\frac{ln(1-2x)}{-2x} + 4\right) = 1 + 4 = 5$

❖ تبيين أن $\lim_{x\to 0^>} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ ، ماذا تستنتج .

$$\lim_{x\to 0^>} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^>} \frac{ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^>} \frac{ln(1+e^x) - ln\,2}{x}$$

بوضع $u(x) = ln(1+e^x)$ ، و $u(0) = ln\,2$

الدالة u تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه

$$\lim_{x\to 0^>} \frac{ln(1+e^x) - ln\,2}{x} = \lim_{x\to 0^>} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = u'(0) = \frac{1}{2}$$

لأن $u'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ ، ومنه $u'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$.

نستنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين $x_0 = 0$ وتقبل الإشتقاق على يسار $x_0 = 0$.

ب/ فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .

المنحنى (C_f) يقبل على يسار المبدأ نصف مماس معامل توجيهه $f'_g(0) = 4$.

المنحنى (C_f) يقبل على يمين المبدأ نصف مماس معامل توجيهه $f'_d(0) = \frac{1}{2}$.

جـ / عين معادلتي المماسين (T_1) و (T_2) لـ (C_f) عند المبدأ

$$(T_1): y = f'_g(0)(x-0) + f(0)$$

$$(T_1): y = 4x$$

$$(T_2): y = f'_d(0)(x-0) + f(0)$$

$$(T_2): y = \frac{1}{2}x$$

③ أ/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+e^x}{2}\right) = +\infty$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب/ بين أنه : $f(x) = x - ln\,2 + ln(1+e^{-x})$.

لدينا : $f(x) = ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = ln(1+e^x) - ln\,2$

ومنه $f(x) = ln\left[e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right] - ln\,2$

ومنه $f(x) = ln[e^x(e^{-x}+1)] - ln\,2$

ومنه $f(x) = ln(e^x) + ln(e^{-x}+1) - ln\,2$

ومنه $f(x) = x - ln\,2 + ln(1+e^{-x})$

جـ / إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x - ln2)] = \lim_{x\to+\infty} [ln(1+e^{-x})] = 0$$

ومنه $(\Delta): y = x - ln\,2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

د / دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x - ln\,2)$ أي إشارة e^{-x}

أي $1+e^{-x}>1$ وبما أن الدالة $x\mapsto lnx$ متزايدة فإن $ln(1+e^{-x})>0$ ومنه $f(x)-(x-ln2)>0$

ومنه نستنتج أن (C_f) يقع فوق (Δ) .

④ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[-4;0]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=2x+\frac{4}{1-2x}=\frac{-4x^2+2x+4}{1-2x}$$

من أجل كل $x\in[-4;0]$ فإن $1-2x>0$ ، ومنه

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-4x^2+2x+4$

لدينا $\Delta=68$ ومنه $\begin{cases}x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\notin[-4;0]\\ x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4}\end{cases}$

x	-4		x_2		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖

ومنه f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4};0\right[$

ومتناقصة تماما على المجال $\left[-4;\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right]$.

✍ f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{\frac{e^x}{2}}{\frac{1+e^x}{2}}=\frac{e^x}{1+e^x}>0$$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x	-4		x_2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$16-4ln3$	↘	$f(x_2)$	↗		↗	$+\infty$

⑤ تبيين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والأخر α حيث $-1,73<\alpha<1,72$.

✍ لدينا $f(0)=0$.

✍ f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,73;-1,72]$

ولدينا $f(-1,73)=0,002$ و $f(-1,72)=-0,022$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,73<\alpha<1,72$.

⑥ أ/ المكاملة بالتجزئة عين في $]-4;+\infty[$ الدالة الأصلية H .

$\int_{-1}^{x} ln(1-2t)\,dt=[t\,ln(1-2t)]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x}\frac{-2t}{1-2t}dt$

لكن :

$$\int_{-1}^{x}\frac{-2t}{1-2t}dt=\int_{-1}^{x}\frac{1-2t-1}{1-2t}dt=\int_{-1}^{x}\left(1-\frac{1}{1-2t}\right)dt$$

$$\int_{-1}^{x}1dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\frac{-2}{1-2t}dt=[t]_{-1}^{x}+\frac{1}{2}[ln(1-2t)]_{-1}^{x}$$

$$=[t\,ln(1-2t)]_{-1}^{x}-[t]_{-1}^{x}-\frac{1}{2}[ln(1-2t)]_{-1}^{x}$$ ومنه

$$=xln(1-2x)+ln3-(x+1)-\frac{1}{2}[\ln(1-2x)-ln3]$$

$$H(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln(1-2x)-(x+1)+\frac{3}{2}ln3+C$$

ب/ حساب S :

$$S=\int_{-4}^{0}(f(x)-(x-ln2))dx=$$

$$S=\int_{-4}^{0}(x^2-2\ln(1-2x)-x+ln2)dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}-2H(x)-\frac{x^2}{2}+xln2\right]_{-4}^{0}=\left(\frac{76}{3}+ln16-18ln3\right)ua$$

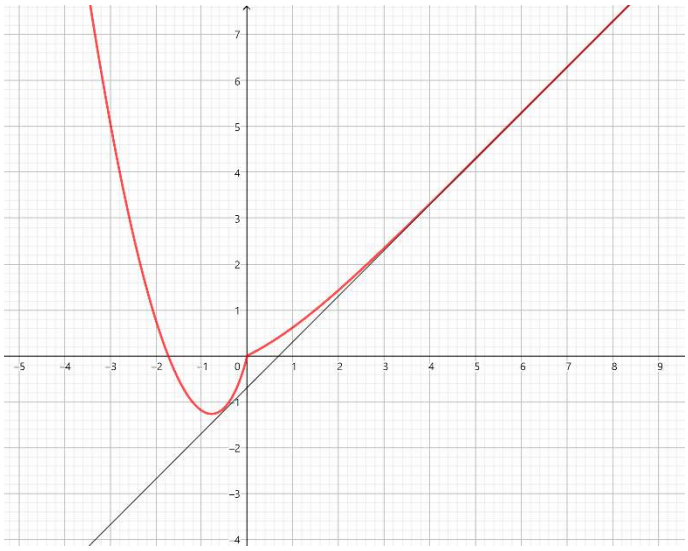
⑦ تبيين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيين إحداثيات كل منهما ..

لدينا : $y=1+mf(x)$ أي $1+mf(x)-y=0$

أي : $\begin{cases}f(x)=0\\ 1-y=0\end{cases}$ ، أي $\begin{cases}f(x)=0\\ y=1\end{cases}$

حسب السؤال ⑤ فإن $f(x)=0$ تكافئ $\begin{cases}x=0\\ x=\alpha\end{cases}$

ومنه جميع المنحنيات (C_m) تشمل $(0;1)$ و $(\alpha;1)$.



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 5

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{5-u_n} \end{cases}$.

① أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5-u_n}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$.

② أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

③ أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \frac{4}{5}(u_n - 1)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$. ثم استنتج نهاية (u_n) .

④ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n . ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

⑤ أ/ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{2024}{u_0-3} + \frac{2024}{u_1-3} + \cdots + \frac{2024}{u_n-3}$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

التمرين 02

بدلا من إضاعة المزيد من الوقت في جمع الأوراق المتناثرة ، قم بإغلاق النافذة

يحتوي كيس على ثلاث كرات تحمل الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 3 كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس .

I- نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

① ما هو احتمال الحدث A : " الحصول على كرتين من نفس الرقم " .

② ماهو احتمال الحدث B : " الحصول على كرتين تحملان عددين جداؤهما زوجي " .

③ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha\beta}\right)$ بحيث α و β يمثلان الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله .

ب/ أحسب العدد $E(2007X + 1993)$.

II- n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع الإرجاع .

① أحسب P_n إحتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم .

② عين أصغر

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C و D نقاط لواحقها على الترتيب : $z_A = 1$ ، $z_B = 5 - 2i$ ، $z_C = 3 + 4i$ و $z_D = -3 + 2i$.

① بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $(z_A + z_C)^{8n} = (z_B + z_D)^{20n}$.

② بين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

③ لتكن I منتصف $[BC]$ ، اكتب معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

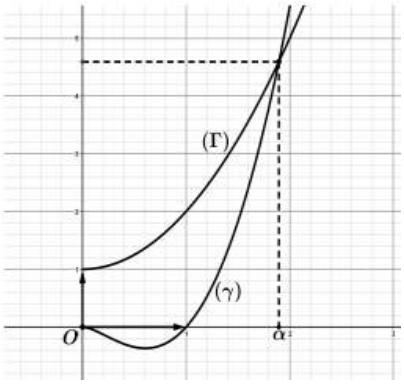
④ لتكن E نظيرة C بالنسبة لـ B ، بين أن لاحقة E هي : $z_E = 7 - 8i$.

⑤ عين مركز وزاوية الدوران r الذي يحول B إلى C ويحول C إلى D .

التمرين 04

البار بأمه لا يضيع ولا يخيب ولا يخسر . اللهم أحفظ أمهاتنا

I- في الشكل المقابل ، المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد ، (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2 ln(x^2)$ ، و (τ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto 1 + x^2$ ، و α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (τ) .



① بقراءة بيانية حدد الوضع النسبي بين (γ) و (τ) على $]0;+\infty[$

② g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + x - xlnx$.

أ/ استنتج إشارة $g(x^2)$ على $]0;+\infty[$.

ب/ تحقق أن $1,89 < \alpha < 1,9$.

جـ/ بين أن : $ln\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

II- f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا .

② أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال : $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أثبت أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

④ أنشئ (C_f) .

⑤ m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $mx^2 + m + lnx = 0$.

⑥ أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[$: $lnx < f(x) < \frac{1}{2}lnx$.

ب/ λ عدد حقيقي من المجال $]0;1[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $\int_{\lambda}^{1} lnxdx = \lambda(1 - ln\lambda) - 1$.

جـ/ $A(\lambda)$ هي مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = \lambda$.

✍ بين أن :

الحل المفصل لإختبار رقم 05

التمرين 01

① أ/ التحقق أنه : $u_{n+1} = -1 + \frac{8}{5-u_n}$

$$-1 + \frac{8}{5-u_n} = \frac{-1(5-u_n)+8}{5-u_n} = \frac{-5+u_n+8}{5-u_n}$$
$$= \frac{u_n+3}{5-u_n} = u_{n+1}$$

ب/ البرهان بالتراجع أن : $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$.

نسمي الخاصية $P(n) \dots 1 \le u_n \le \frac{5}{2}$.

لدينا $u_0 = 2$ ،ومنه $1 < u_0 \le \frac{5}{2}$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 \le u_{n+1} \le \frac{5}{2}$ ؟؟

لدينا : $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$ أي $-\frac{5}{2} \le -u_n \le -1$

أي : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{5-u_n} \le \frac{2}{5}$ أي : $\frac{5}{2} \le 5-u_n \le 4$

أي: $\frac{16}{5} \le \frac{8}{5-u_n} \le 2$ ،ومنه $1 \le -1 + \frac{8}{5-u_n} \le \frac{11}{5} \le \frac{5}{2}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$.

② دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+3}{5-u_n} - u_n = \frac{u_n+3-5u_n+{u_n}^2}{5-u_n}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{{u_n}^2-4u_n+3}{5-u_n} = \frac{(u_n-1)(u_n-3)}{5-u_n}$$

لدينا : $\frac{5}{2} \le 5-u_n \le 4$ ، و $0 \le u_n - 1 \le \frac{1}{2}$.

و $-2 \le u_n - 3 \le -\frac{1}{2}$.

ومنه أن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

❖ استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

③ أ/ البرهان أنه : $u_{n+1} - 1 < \frac{4}{5}(u_n - 1)$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+3}{5-u_n} - 1 = \frac{u_n+3-5+u_n}{5-u_n} = \frac{2(u_n-1)}{5-u_n}$$

لدينا : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{5-u_n} \le \frac{2}{5}$ ، ومنه

وبما أن $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{5-u_n}$ فإن

$$u_{n+1} - 1 < \frac{4}{5}(u_n - 1)$$

② أ/ استنتاج أن : $0 \le u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

لدينا : $0 \le u_n - 1 \le \frac{1}{2}$ .... (1)

❖ يبقى لنا أن نثبت أن $u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

لدينا مما سبق : $u_{n+1} - 1 \le \frac{4}{5}(u_n - 1)$

$$u_1 - 1 \le \frac{4}{5}(u_0 - 1)$$
$$u_2 - 1 \le \frac{4}{5}(u_1 - 1)$$
$$\vdots$$
$$u_n - 1 \le \frac{4}{5}(u_{n-1} - 1)$$

بضرب أطراف المتباينة طرفا لطرف نجد :

$$u_n - 1 \le \left(\frac{4}{5}\right)^n (u_0 - 1)$$
$$u_n - 1 \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

ومنه نستنتج أن $0 \le u_n - 1 < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

❖ استنتاج نهاية (u_n) .

لدينا : $-1 < \frac{4}{5} < 1$ ، إذن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

ومنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

④ أ/ إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n+3}{5-u_n} - 1}{3 - \frac{u_n+3}{5-u_n}} = \frac{\frac{u_n+3-5+u_n}{5-u_n}}{\frac{15-3u_n-u_n-3}{5-u_n}}$$
$$v_{n+1} = \frac{2u_n-2}{-4u_n+12} = \frac{2}{4}\left(\frac{u_n-1}{3-u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{3-u_0} = \frac{2-1}{3-2} = 1$

ب/ كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

❖

$3v_n -$

1

$u_n(v_n+1)=3v_n+1$ أي $v_nu_n+u_n=3v_n+1$ أي

$u_n=\frac{3v_n+1}{v_n+1}$ أي $u_n=\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{v_n+1}$ ومنه .

❖ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا : $-1<\frac{1}{2}<1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

⑤ أ/ حساب : $S_n=\frac{2024}{u_0-3}+\frac{2024}{u_1-3}+\cdots+\frac{2024}{u_n-3}$

لدينا $u_n=\frac{3v_n+1}{v_n+1}$ ومنه $u_n-3=\frac{3v_n+1}{v_n+1}-3$

أي $u_n-3=\frac{-2}{v_n+1}$ ومنه $\frac{1}{u_n-3}=-\frac{v_n+1}{2}$

ومنه $\frac{2024}{u_n-3}=-1012v_n-1012$ ، ومنه بالتعويض

$S_n=(-1012v_0-1012)+\cdots+(-1012v_n-1012)$

$S_n=-1012(v_0+v_1+\cdots+v_n)-1012(n+1)$

$$S_n=-1012v_0\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)-1012(n+1)$$

$$S_n=2024\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)-1012(n+1)$$

ب/ تبيين أنه $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

لدينا : $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$

$P_n=v_0\times(v_0\times q)\times(v_0\times q^2)\ldots\times(v_0\times q^n)$

$P_n=(v_0\times v_0\times\ldots\times v_0)\times(q\times q^2\times\ldots\times q^n)$

$P_n={v_0}^{n+1}\times q^{1+2+\cdots+n}={v_0}^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$P_n=(1)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

التمرين 02

عدد الإمكانيات : $C_7^2=21$.

① حساب $P(A)$: $P(A)=\frac{C_3^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$.

② حساب $P(B)$: $P(B)=\frac{C_3^1C_4^1+C_3^2}{C_7^2}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$.

③ أ/ قيم X هي : $\left\{-1;0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

❖ تعيين قانون احتماله .

$P(X=-1)=\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}$ ، $P(X=0)=\frac{C_3^1C_3^1}{21}=\frac{9}{21}$

$P\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{C_3^1C_1^1}{21}=\frac{3}{21}$ ، $P\left(X=\sqrt{2}\right)=\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}$

$P\left(X=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{C_1^1C_3^1}{21}=\frac{3}{21}$

$X=x_i$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$

ب/ حساب العدد $E(2007X+1993)$.

$E(X)=-\frac{3}{21}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{21}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{21}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{21}=0.15$

$E(2007X+1993)=2007E(X)+1993$

$E(2007X+1993)=2007\times0.15+1993$

$E(2007X+1993)=2294.05$

II- ① حساب P_n

لدينا $\overline{P_n}$: " عدم سحب أي كرية تحمل الرقم 1 "

$P_n=1-\overline{P_n}=1-\frac{4^n}{7^n}=1-\left(\frac{4}{7}\right)^n$

② عين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث $P_n\geq0.99$.

$P_n\geq0.99$ يكافئ $1-\left(\frac{4}{7}\right)^n\geq0.99$ يكافئ

$-\left(\frac{4}{7}\right)^n\geq-0.01$ يكافئ $\left(\frac{4}{7}\right)^n\leq0.01$

$n\ln\left(\frac{4}{7}\right)\leq ln(0.01)$ يكافئ $n\geq\frac{ln(0.01)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)}$ ، أي

أي $n\geq8.22$ ومنه أصغر عدد طبيعي n ، بحيث

$P_n\geq0.99$ هو $n=9$.

التمرين 03

① تبيين أن : $(z_A+z_C)^{8n}=(z_B+z_D)^{20n}$.

✍ لدينا من جهة $z_A+z_C=4+4i$ ، ومنه

$(z_A+z_C)^{8n}=(4+4i)^{8n}=4^{8n}(1+i)^{8n}$

$=4^{8n}[(1+i)^2]^{4n}=4^{8n}(2i)^{4n}=4^{8n}[(2i)^2]^{2n}$

$=4^{8n}[-4]^{2n}=4^{8n}[4]^{2n}=4^{10n}$

✍ ومن جهة أخرى $z_B+z_D=2$ ، ومنه

$(z_B+z_D)^{20n}=(2)^{20n}=[(2)^2]^{10n}=4^{10n}$

ومنه : $(z_A+z_C)^{8n}=(z_B+z_D)^{20n}$.

② تبيين أن : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2+4i}{4-2i}\times\frac{4+2i}{4+2i}=\frac{8+4i+16i-8}{4^2+2^2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

❖ استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1$ ، أي $AC=AB$.

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، أي $\frac{\pi}{}$ $(\overrightarrow{AB},$

ناقين .

③ اكتب معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

بما أن ABC قائم في A فإن مركز الدائرة هو منتصف الوتر $[BC]$ ، أي مركز الدائرة (γ) هو النقطة I ، أي

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5-2i+3+4i}{2} = 4+i$$

نصف القطر هو $r = \frac{BC}{2} = \frac{|z_C - z_B|}{2}$ ، ومنه

$$r = \frac{|-2+6i|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2+6^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

❖ **معلومة : معادلة الدائرة من الشكل :**

$$(x-x_I)^2 + (y-y_i)^2 = r^2$$

ومنه $(x-4)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

④ لتكن E نظيرة C بالنسبة لـ B ، بين أن: $z_E = 7-8i$

E نظيرة C بالنسبة لـ B معناه $z_B = \frac{z_C + z_E}{2}$ ومنه

$z_E = 2z_B - z_C$ ، أي $z_E = 2(5-2i) - 3 - 4i$

ومنه $z_E = 7-8i$ ، وهو المطلوب .

⑤ عين مركز وزاوية الدوران r الذي يحول B إلى C ويحول C إلى D .

لدينا : $\begin{cases} z_C = az_B + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ ومنه بالطرح نجد :

$z_D - z_C = a(z_C - z_B)$ أي $a = \frac{z_D - z_C}{z_C - z_B}$

$$a = \frac{-6-2i}{-2+6i} \times \frac{-2-6i}{-2-6i} = \frac{12+36i+4i-12}{(-2)^2+6^2} = i$$

بالتعويض نجد : $b = z_C - az_B$ ، ومنه

$b = 1-i$ أي $b = 3+4i-i(5-2i)$

لدينا : $z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-i} = 1$.

ومنه مركز الدوران r هو النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 1$ وزاوية الدوران r هي $ar\,g(i) = \frac{\pi}{2}$.

التمرين 04

① بقراءة بيانية حدد الوضع النسبي بين (γ) و (τ) .

لما يكون $x \in]0;\alpha[$ فإن (τ) يقع فوق (γ) .

لما يكون $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن (τ) يقع تحت (γ) .

لما يكون $x = \alpha$ فإن (τ) يقطع (γ) في $(\alpha;\alpha^2+1)$.

② أ/ استنتاج إشارة ^{2} على .

لدينا :

ومنه إشارة $g(x^2)$ تعتمد على الوضع النسبي بين (γ) و (τ)

x	0		α		$+\infty$
$g(x^2)$	‖	$+$	0	$-$	

ب/ التحقق أن $1,89 < \alpha < 1,9$.

لدينا : $g(1,89^2) = 0,02$ و $g(1,9^2) = -0,02$.

ومنه $g(1,89^2) \times g(1,9^2) < 0$.

ومنه : $1,89 < \alpha < 1,9$.

ج/ تبيين أن : $ln\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

مما سبق وجدنا أن لما $x = \alpha$ فإن (τ) يقطع (γ)

ومنه $ln(\alpha^2) = \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$ ، أي $1+\alpha^2 = \alpha^2 ln(\alpha^2)$

ومنه $2ln\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha^2}$ ، أي $ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2} + 1$

ومنه $ln\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

① حساب : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسر النتائج

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{lnx}{1+x^2}\right) = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) .

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{lnx}{x} \times \frac{x}{1+x^2}\right) = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

② أ/ تبيين أن : $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2xlnx}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1+x^2-2x^2lnx}{x}}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x^2lnx}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2lnx^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$.لأن $x(1+x^2)^2 > 0$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	

③ إثبات أن : $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $f(\alpha)=\frac{ln\alpha}{1+\alpha^2}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)}{1+\alpha^2}=\frac{1+\frac{1}{\alpha^2}}{2(1+\alpha^2)}=$

$=\frac{\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}}{2(1+\alpha^2)}=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}\times\frac{1}{2(1+\alpha^2)}=\frac{1}{2\alpha^2}$

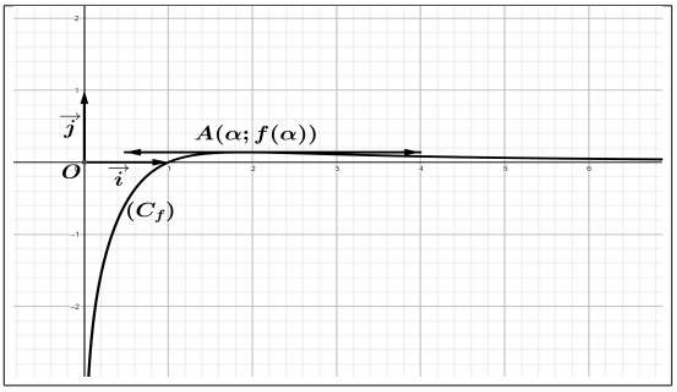
لدينا : $1,89<\alpha<1,9$ ، أي $(1,89)^2<\alpha^2<(1,9)^2$

يكافئ $2(1,89)^2<2\alpha^2<2(1,9)^2$

يكافئ $\frac{1}{2(1,9)^2}<\frac{1}{2\alpha^2}<\frac{1}{2(1,89)^2}$

يكافئ $0,138<f(\alpha)<0,139$

④ أنشئ (C_f) .



⑤ ناقش بيانيا : $mx^2+m+lnx=0$.

لدينا $mx^2+m+lnx=0$ يكافئ $m(x^2+1)=-lnx$

يكافئ $f(x)=-m$ يكافئ $\frac{lnx}{1+x^2}=-m$

ومنه حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع (C_f)

مع المستقيمات ذات المعادلة $y=-m$

لما $-m<0$ أي $m>0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما $-m<f(\alpha)<0$ أي $-f(\alpha)<-m<0$ المعادلة

تقبل حلان متمايزان .

لما $-m=f(\alpha)$ أي $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما $-m>f(\alpha)$ أي $m<-f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

⑥ أ/ تبيين أنه : $lnx<f(x)<\frac{1}{2}lnx$.

لدينا : $0<x<1$ يكافئ $0<x^2<1$

يكافئ $1<1+x^2<2$ ، يكافئ $\frac{1}{2}<\frac{1}{1+x^2}<1$

ومن أجل كل x من المجال $]0;1[$ فإن $lnx<0$

ومنه $lnx<\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{2}lnx$ أي $lnx<f(x)<\frac{1}{2}lnx$

ب/ تبيين أن : $\int_\lambda^1 lnxdx=\lambda(1-ln\lambda)-1$

$u(x)=lnx$	$u'(x)=\frac{1}{x}$
$v(x)=x$	$v'(x)=1$

$$\int_\lambda^1 lnxdx=[xlnx]_\lambda^1-\int_\lambda^1 1dx=[xlnx]_\lambda^1-[x]_\lambda^1$$

$$=-\lambda ln\lambda-(1-\lambda)=\lambda(1-ln\lambda)-1$$

جـ/ تبيين أن : $\frac{1-\lambda(1-ln\lambda)}{2}<A(\lambda)<1-\lambda(1-\ln\lambda)$

لدينا : من أجل كل x من $]0;1[$ فإن (C_f) يقع تحت محور الفواصل ومنه $A(\lambda)=\int_\lambda^1-f(x)dx$.

لدينا $lnx<f(x)<\frac{1}{2}lnx$.

يكافئ $-\frac{1}{2}lnx<-f(x)<-lnx$.

يكافئ $\int_\lambda^1-\frac{1}{2}lnxdx<\int_\lambda^1-f(x)dx<\int_\lambda^1-lnxdx$

يكافئ $-\frac{1}{2}\int_\lambda^1 lnxdx<\int_\lambda^1-f(x)dx<-\int_\lambda^1 lnxdx$

اي $-\frac{1}{2}(\lambda(1-ln\lambda)-1)<A(\lambda)<-(\lambda(1-ln\lambda)-1)$

يكافئ $\frac{1-\lambda(1-ln\lambda)}{2}<A(\lambda)<1-\lambda(1-ln\lambda)$

وهو المطلوب .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 6

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) \end{cases}$.

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2n + 5$.

ب/ بين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

② نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2(u_n - 2n - 1)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

③ (w_n) المتتالية المعرفة بـ $w_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}w_n + \frac{1}{n+1}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n + 1$ ، ثم بين أن (w_n) متتالية حسابية .

④ تحقق أن $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$ ، ثم احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 02

يبدو أن البشرية ، لم تعد بحاجة إلى الشيطان ☠

يلعب طفل بـ 15 كرية ، منها 10 كريات حمراء و 5 كريات زرقاء ، يضع 7 كريات حمراء و 3 كريات زرقاء في العلبة M و يضع الباقي في العلبة N .

① في أول لعبة يختار 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد من العلبة M وينظر كم كرية حمراء ظهرت .

ليكن X المتغير العشوائي المتعلق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتماله ، ثم أحسب العدد $E(1446 - 2025X)$.

② وفي ثاني لعبة يختار الطفل إحدى العلب ويسحب منها كرة واحدة .

أ/ مثل هذه الوضعية بشجرة الإحتمالات .

ب/ احسب $P(A)$ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

ج / علما أن الطفل سحب كرة حمراء ، ما إحتمال أن تكون من العلبة M ؟

التمرين 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس . ، و نقاط لواحقها :

،

ب/ أكتب كل من $(z_B - 4)$ و $(z_C - 4)$ على الشكل الأسي .

جـ/ n عدد طبيعي ، بين أن $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = 2^{4n} \times e^{n\pi i}$ ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n$ عدد حقيقيا موجبا .

② لتكن النقطتان D و E تحققان : $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

أ/ ماذا تمثل النقطة D بالنسبة لـ B و C ؟ و ماذا تمثل النقطة E بالنسبة لـ A و B و C ؟

ب/ بين أن لاحقة النقطة D هي $z_D = 3 + 3i$ ، ولاحقة النقطة E هي $z_E = -1 + i$.

جـ/ عين (τ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

التمرين 04

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

① أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0;1[$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

① أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

② أ/ بين أنه من أجل كل $x \neq 0$ فإن $g(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة .

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

③ لتكن النقطتين $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$ ، بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C_f) في النقطة J .

④ أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة I .

ب/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .

⑤ أنشئ كل من المنحنى (C_f) و المماس (T) ، (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$) .

⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$.

⑦ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $h(x) = f(-|x|)$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ/ بين أن الدالة h زوجية .

ب/ أشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه .

أي درس ترفض تعلمه ، سوف يتكرر حتى تتعلمه

الحل المفصل لإختبار رقم 06

التمرين 01

① أ/ البرهان بالتراجع أن : $u_n < 2n + 5$.

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $u_n < 2n + 5$.

لدينا $u_0 = 4$ ، ومنه $u_0 \leq 5$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1} < 2n + 7$ ؟؟

لدينا : $u_n < 2n + 5$ أي $u_n + 2n < 4n + 5$

أي : $u_n + 2n + 5 < 4n + 10$

أي : $\frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) < 2n + 5 < 2n + 7$

ومنه بالتعدي $u_{n+1} < 2n + 7$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $u_n < 2n + 5$.

ب/ تبيين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + 2n + 5 - 2u_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2n + 5 - u_n)$$

❖ استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن $u_n < 2n + 5$ فإن $2n + 5 - u_n > 0$

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما .

② أ/ إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية .

$$v_{n+1} = 2(u_{n+1} - 2(n+1) - 1)$$

$$v_{n+1} = 2(u_{n+1} - 2n - 3)$$

$$v_{n+1} = 2\left[\frac{1}{2}(u_n + 2n + 5) - 2n - 3\right]$$

$$v_{n+1} = 2\left[\frac{1}{2}(u_n + 2n + 5 - 4n - 6)\right]$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}[2(u_n - 2n - 1)] = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_0 = 2(u_0 - 2(0) - 1) = 6$

ب/ كتابة عبارة الحد العام للمتتالية .

لدينا

③ البرهان بالتراجع أنه : $w_n = 2n + 1$.

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $w_n = 2n + 1$.

لدينا $w_0 = 1$ ، و $w_0 = 2(0) + 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $w_{n+1} = 2n + 3$ ؟؟

لدينا : $w_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}w_n + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(2n+1) + \frac{1}{n+1}$

$$w_{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1}$$

ومنه $w_{n+1} = 2n + 3$ ، ومنه $P(n+1)$ صحيحة

ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أن : $w_n = 2n + 1$

❖ تبيين أن (w_n) متتالية حسابية .

$$w_{n+1} - w_n = 2n + 3 - (2n + 1) = 2 = r$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

④ التحقق أن $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$.

لدينا $v_n = 2(u_n - w_n)$ أي $v_n = 2u_n - 2w_n$

أي $2u_n = v_n + 2w_n$ ومنه $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$.

❖ حساب : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

لدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n + w_n$ ومنه بالتعويض نجد

$$S_n = \frac{1}{2}v_0 + w_0 + \cdots + \frac{1}{2}v_n + w_n$$

$$S_n = \frac{1}{2}(v_0 + \cdots + v_n) + w_0 + \cdots + w_n$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(6\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right) + \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) :$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(6\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right) + \frac{n+1}{2}(3 + 2n + 1) :$$

$$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)^2 :$$

التمرين 02

① عين قيم المتغير العشوائي X ، وقانون إحتماله

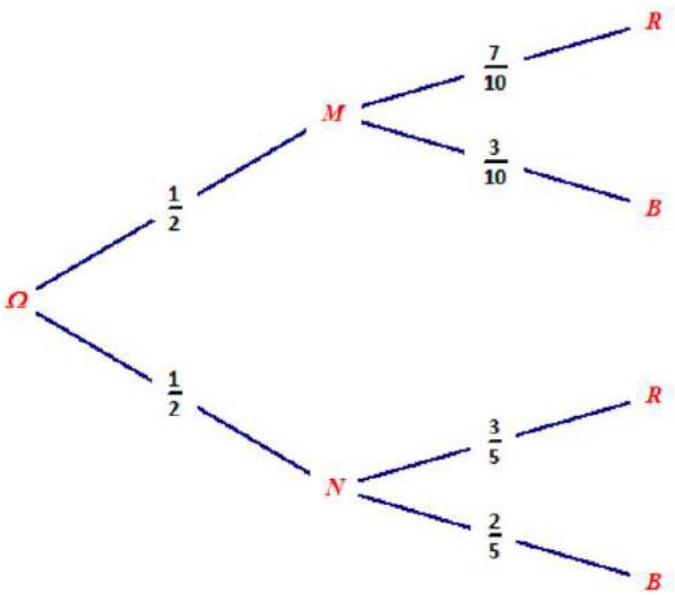
لدينا $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$ ، $P(X = 1) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}$

$P(X = 2) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}$ ، $P(X = 3) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}$

$X = x_i$				
$P(X =$	—	—	—	—

② أ/ مثل هذه الوضعية بشجرة الإحتمالات .



ب/ حساب $P(A)$.

$$P(A) = P(M \cap R) + P(N \cap R)$$
$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{13}{20}$$

جـ / علما أن الطفل سحب كرة حمراء ، ما إحتمال أن تكون من العلبة M ؟

$$P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}}{\frac{13}{20}} = \frac{7}{13}$$

التمرين 03

① أ/ تبيين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2+4i}{4+2i} = \frac{i(4+2i)}{4+2i} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

✍ استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا : $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$ ، ومنه $AC = AB$

و لدينا : $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ، ومنه $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه نستنتج أن ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

ب/ كتابة $(z_B - 4)$ و $(z_C - 4)$ على الشكل الأسي.

لدينا : $(z_B - 4) = 2 + 2i$ ،

ومنه $|z_B - 4| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

نضع $\theta = (4$ ، ومنه $\frac{2}{2\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $(z_B - 4) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

لدينا : $(z_C - 4) = -4 + 4i$ ،

ومنه $|z_C - 4| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

نضع $arg(z_C - 4) = \theta'$ ، ومنه $\begin{cases} cos\theta' = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta' = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta' = \pi - \frac{\pi}{4}$ ، أي $\theta' = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه $(z_C - 4) = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

جـ/ تبيين أن $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = 2^{4n} \times e^{n\pi i}$

$$(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \times \left(4\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n3\pi}{4}}$$
$$= \left(2^n \times \sqrt{2}^n \times 4^n \times \sqrt{2}^n\right) \times e^{i\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{3n\pi}{4}\right)}$$
$$= \left(2^n \times \sqrt{2}^n \times 2^{2n} \times \sqrt{2}^n\right) \times e^{in\pi}$$
$$= \left(2^{3n} \times \sqrt{2}^{2n}\right) \times e^{i\pi} = (2^{3n} \times 2^n) \times e^{in\pi}$$
$$= (z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n = 2^{4n} \times e^{n\pi i}$$

❖ عين قيم العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون $(z_B - 4)^n \times (z_C - 4)^n$ عدد حقيقيا موجبا .

إذا كان $n\pi = 2k\pi$ أي $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

② أ/ ماذا تمثل النقطة D بالنسبة لـ B و C ؟ و ماذا تمثل النقطة E بالنسبة لـ A و B و C ؟

✍ تمثل النقطة D منتصف القطعة $[BC]$.

✍ تمثل النقطة E مرجح الجملة المثقلة :

$$\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$$

ب/ تبيين أن $z_D = 3 + 3i$ و $z_E = -1 + i$.

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{6+6i}{2} = 3 + 3i$$
$$z_E = \frac{2z_A - z_B + z_C}{2 - 1 + 1} = -1 + i$$

جـ/ عين (τ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

لدينا E مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

ومنه $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{ME}$.

و D منتصف القطعة $[BC]$ أي $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$

ومنه $\|2\overrightarrow{ME}\| = \|2\overrightarrow{MD}\|$ أي $ME = MD$.

ومنه نستنتج أن هي محور القطعة [.

التمرين 04

① أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty$$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = 6x^2 + 2x$$

$g'(x) = 0$ يكافئ $6x^2 + 2x = 0$ يكافئ

$2x(3x+1) = 0$ ، ومنه إما $x = 0$ أو $x = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه نستنتج أن g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-\frac{1}{3}]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-\frac{1}{3};0]$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-0.96	↘	-1	↗	$+\infty$

② أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $[0;1]$ ولدينا $g(0) = -1$ و $g(1) = 2$ ومنه $g(0) \times g(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0;1[$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

لأن

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ <}} \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

لأن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} (x^2 + x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

لأن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} (x^2 + x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \end{cases}$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل $x \neq 0$ فإن $g(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2x^3+x^2-1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$$

بما أن $3x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$
			$-\infty$				

③ لتكن النقطتين $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$ ، بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C_f) في النقطة J .

لدينا من جهة : نعلم أن معادلة المستقيم (IJ) تكتب من الشكل $y = ax + b$.

تعيين a (معامل توجيه المستقيم) :

لدينا $a = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-(-1)} = \frac{2}{3}$

وبالتالي معادلة المستقيم (IJ) هي $y = \frac{2}{3}x + b$

تعيين b : بما أن $J \in (IJ)$ فإن $1 = \frac{2}{3} \times 1 + b$

ومنه $b = \frac{1}{3}$ ، ومنه نستنتج أن معادلة المستقيم (IJ) هي :

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

ومن جهة أخرى : نعين معادلة مماس للمنحنى (C_f) في النقطة J أي : عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

$y = \frac{2}{3}$

④ أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة I .

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$(T): y = -\frac{2}{3}x - 1$$

ب/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right)$$

$$= \frac{x^3+x^2+1}{3x} + \frac{2x+3}{3} = \frac{x^3+x^2+1+2x^2+3x}{3x}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x}$$

✍ نلاحظ أن -1 جذر للبسط ، ومنه

$$f(x) - y = \frac{x^3+3x^2+x+1}{3x} = \frac{(x+1)(x+1)^2}{3x}$$

✍ بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $3x$ و $x+1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

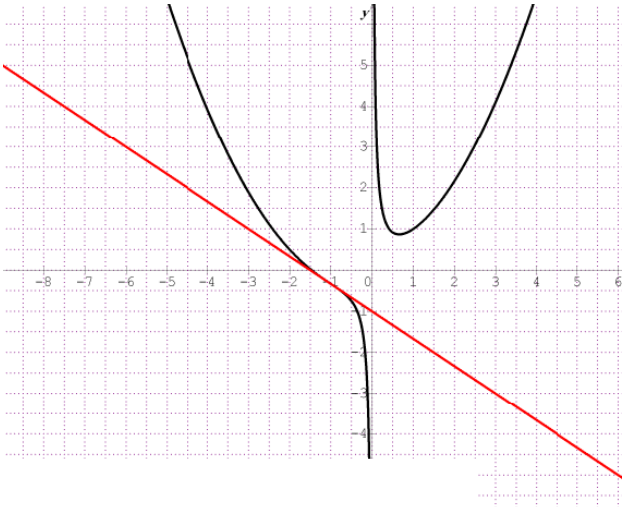
✍ ومنه من أجل كل $x \in]-\infty;-1[$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T)

✍ من أجل كل $x \in]-1;0[$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المماس (T)

✍ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T)

✍ المنحنى (C_f) يخترق المماس (T) في النقطة $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$

⑤ أنشئ كل من المنحنى (C_f) و المماس (T)



⑥ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$

$$x^3 + x^2 - 3mx + 1 = 0$$

$$x^3 + x^2 + 1 = 3mx$$

$$x^2 + x + \frac{1}{x} = 3m$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) = m$$

$$f(x) = m$$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذا المعادلة $y = m$

✍ لما $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ ، يوجد حل وحيد

✍ لما $m = f(\alpha)$ ، يوجد حلان أحدهما مضاعف

✍ لما $m \in]f(\alpha); +\infty[$ ، يوجد ثلاث حلول

⑦ أ/ تبيين أن الدالة h زوجية .

✍ من أجل كل $x \in D_h$ ، لدينا $-x \in D_h$

$x \in D_h$ ، أي $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ معناه $x \neq 0$

ومنه $-x \neq 0$ ، ومنه $-x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، ومنه $-x \in D_h$

✍ $h(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = h(x)$

ومنه نستنتج أن الدالة h زوجية

ب/ شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f)

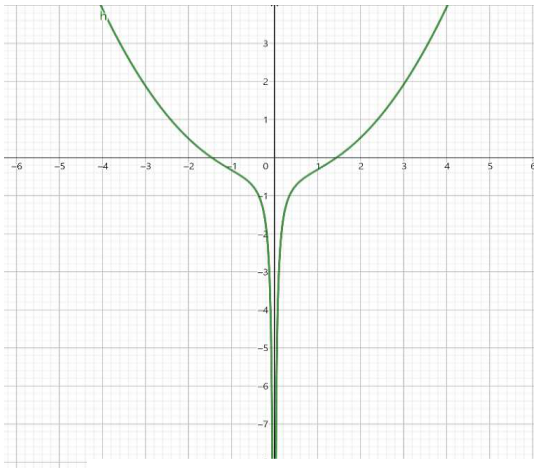
أولا يجب كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} f(-x) & ; \ x > 0 \\ f(x) & ; x < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أنه لما يكون $x < 0$ فإن $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الإختبار التجريبي رقم 7

التمرين 01

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = \frac{7}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8}$.

① أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{3}{4}$.

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(u_n - \frac{\alpha}{4}\right)$.

أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

ب/ من أجل $\alpha = 3$ ، أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

③ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = t_n + \frac{3}{4}$ حيث (t_n) متتالية هندسية ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

④ عبر عن P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$.

التمرين 02

للثعلب قصص بطولية لكن كلها مع الدجاج .

لتكن المجموعة $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

① ماهو عدد الأعداد المكونة من أربع أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها بإستعمال أرقام المجموعة أعلاه؟

② ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال الأول والتي هي زوجية ؟

③ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال الأول والتي هي فردية ؟

④ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال الأول والتي هي من مضاعفات 5 ؟

التمرين 03

I- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ ، ثم إستنتج حلول المعادلة :

$\left(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i\right)^2 - 2\bar{z} - 4\sqrt{3}i = 0$ حيث $\bar{z}$ مرافق العدد z .

II- z_0 و z_1 عددان مركبان حيث : $z_0 = 1 + i$ و $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$.

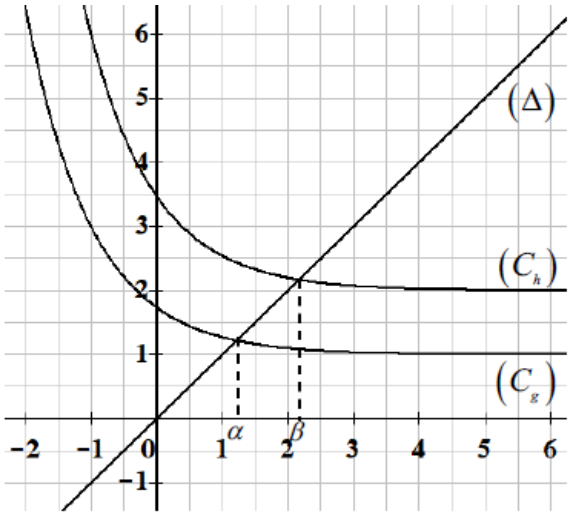
① عين طويلة وعمدة لكل من z_0 و z_1 ، ثم أكتب $z_0 \times z_1$ على الشكل الجبري .

② استنتج القيمة المضبوطة لكل من $cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$.

③ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد ^{n} حقيقيا .

④ عين $k \in$

التمرين 04



I- (C_g) و (C_h) التمثيلان البيانيان للدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + 2e^{-x-1}$ و $h(x) = 2g(x)$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل المقابل .

① بقراءة بيانية حدد وضعية كل من (C_g) و (C_h) بالنسبة إلى (Δ)

② إستنتج إشارة كل من $[g(x) - x]$ و $[x - h(x)]$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

③ تحقق أن $1,2 < \alpha < 1,3$ و $2,1 < \beta < 2,2$.

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x}\left(x - \frac{1}{e^{x}+1} + e^{x-1}\right)$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i},\vec{j})$.

① أ/ أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

② أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $\frac{f(x)}{x} = e^{-x} + 2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)$.

ب/ أحسب : $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة هندسيا .

جـ/ اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ .

③ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = [g(x) - x]e^{-x}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

④ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = [x - h(x)]e^{-x}$.

ب/ بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف w يطلب تعيين إحداثياتها .

⑤ أنشئ (C_f) و (T) نأخذ $f(\alpha) = 0,9$ و $f(\beta) = 0,6$.

⑥ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = (1 + 2m)x$ حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب تماما .

الحسد مميت ، الحسد يضيع فرحة ويضيع صحة ، ويضيع راحة البال
اللهم اكفنا شر كل حاسد

الحل المفصل لإختبار رقم 07

التمرين 01

① أ/ البرهان بالتراجع أن : $u_n > \frac{3}{4}$.

نسمي الخاصية $P(n) \dots u_n > \frac{3}{4}$.

لدينا $u_0 = \frac{7}{4}$ ،ومنه $u_0 > \frac{3}{4}$ ومنه $P(0)$ صحيحة .

نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n كيفي

ونبرهن $P(n+1)$ أي نبرهن أن $u_{n+1} > \frac{3}{4}$ ؟؟

لدينا : $u_n > \frac{3}{4}$ أي $\frac{1}{2}u_n > \frac{3}{8}$ ، أي $\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} > \frac{3}{4}$

ومنه $u_{n+1} > \frac{3}{4}$.

ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع

نستنتج أن : $u_n > \frac{3}{4}$.

ب/ دراسة اتجاه تغير المتتالية .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} - u_n = \frac{3-4u_n}{8}$$

لدينا : $u_n > \frac{3}{4}$ ، أي $-4u_n < -3$ ،

أي $-4u_n + 3 < 0$ ، ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

❖ استنتاج أنها متقاربة .

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد $\frac{3}{4}$

فهي متقاربة .

② أ/ تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$v_{n+1} = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(u_{n+1} - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8} - \frac{2\alpha}{8}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \times \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3-2\alpha}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(u_n + \frac{3-2\alpha}{4}\right)$$

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ معناه $\frac{3-2\alpha}{4} = -\frac{\alpha}{4}$

أي $3 - 2\alpha = -\alpha$ ، ومنه $\alpha = 3$

ومنه (v_n) متالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

حدها الأول $\frac{2}{3}$ ^{0} $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{}$

ب/ من أجل

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

أي $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

③ تبيين أنه : $u_n = t_n + \frac{3}{4}$.

لدينا : $v_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(u_n - \frac{3}{4}\right)$

بالضرب في $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، نجد $v_n = u_n - \frac{3}{4}$.

ومنه : $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n v_n + \frac{3}{4}$.

ومنه : $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{4}$.

ومنه : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}$ ، ومنه $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

❖ إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

④ التعبير عن P_n بدلالة n حيث :

$$P_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n .$$

لدينا : $u_nv_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}\right)\left(3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

بوضع $w_n = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n$ و $k_n = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ يكون لدينا :

$$u_nv_n = w_n + k_n$$

ومنه بالتعويض نجد :

$$P_n = w_0 + k_0 + w_1 + k_1 + \cdots + w_n + k_n$$

$$P_n = (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) + (k_0 + k_1 + \cdots + k_n)$$

$$P_n = w_0\left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{6} - 1}\right] + k_0\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right]$$

$$P_n = 3\left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-5}{6}}\right] + \frac{9}{4}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-2}{3}}\right]$$

$$P_n = \frac{-18}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - 1\right] - \frac{27}{8}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$\boldsymbol{P_n = \frac{18}{5}\left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right] + \frac{27}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

التمرين 02

① ماهو عدد الأعداد المكونة من أربع أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها بإستعمال أرقام المجموعة أعلاه؟

يـمكن أيضا حسابها كـمايلي $A_7^4 = 840$

② ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال لأول والتي هي زوجية ؟

لدينا المجموعة S تحتوي على 3 أرقام زوجية ونعلم أن الرقم الزوجي رقم آحاده زوجي ومنه :

4	5	6	3

أي : $3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$

يـمكن أيضا حسابها كـمايلي $A_3^1 \times A_6^3 = 360$

③ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال لأول والتي هي فردية ؟

لدينا المجموعة S تحتوي على 4 أرقام فردية ونعلم أن الرقم الفردي رقم آحاده فردي ومنه :

4	5	6	4

أي : $4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$

يـمكن أيضا حسابها كـمايلي $A_4^1 \times A_6^3 = 480$

④ ماهو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال لأول والتي هي من مضاعفات 5 ؟

نعلم أن مضاعفات العدد 5 هي الأعداد التي آحادها 5

4	5	6	1

ومنه : $1 \times 6 \times 5 \times 4 = 120$

يـمكن أيضا حسابها كـمايلي $A_1^1 \times A_6^3 = 120$

التمرين 03

I- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = -12 = 12i^2$

للمعادلة حلان مركبان هما :

$z_1 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_2 = \frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$

❖ إستنتج حلول : $(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} - 4\sqrt{3}i = 0$

$(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\bar{z} - 4\sqrt{3}i - 4 + 4 = 0$

$(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2(\bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i) + 4 = 0$

بالمطابقة مع المعادلة الأولى نجد :

$\begin{cases} \bar{z} + 2 + 2\sqrt{3}i = 1 + \sqrt{3}i \\ = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$ ، أي $\begin{cases} z = -1 + \sqrt{3}i \end{cases}$

II- $z_0 = 1 + i$ و $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$.

① تعيين طويلة وعمدة لكل من z_0 و z_1 .

لدينا : $|z_0| = \sqrt{1^1 + 1^2} = \sqrt{2}$

نضع $arg(z_0) = \theta$ ، ومنه $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لدينا : $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$ ، ومنه $z_1 = \frac{2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$

أي : $z_1 = 2e^{i\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)}$ ، أي $z_1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

ومنه $|z_1| = 2$ و $arg(z_1) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

❖ أكتب $z_0 \times z_1$ على الشكل الجبري .

لدينا : $z_1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = 2\left[cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right]$

$z_1 = 2\left[\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - \sqrt{3}i$

ومنه $z_0 \times z_1 = (1 + i) \times (-1 - \sqrt{3}i)$

أي $z_0 \times z_1 = (\sqrt{3} - 1) + i(-\sqrt{3} - 1)$

② استنتاج $cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$.

لدينا : $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}\left[cos\frac{19\pi}{12} + isin\frac{19\pi}{12}\right]$

ولدينا من جهة أخرى : $z_0 \times z_1 = (\sqrt{3} - 1) + i(-\sqrt{3} - 1)$

ومنه $\begin{cases} cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

③ تعيين قيم n حتى يكون $(z_0 \times z_1)^n$ حقيقيا

$\frac{n19\pi}{12} = k\pi$ ، ومنه $\frac{n19}{12} = k$ ، أي $n19 = 12k$

ومنه $n = \frac{12k}{19}$ ، حيث k من مضاعفات 19 .

④ عين (γ) : $arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right) = 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

بوضع $z_0 = z_A$ و $z_1 = z_B$

لدينا $arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right) = 2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 2k\pi$

ومنه (γ) هي المستقيم (AB) بإستثناء $[AB]$.

التمرين 04

① وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) .

لما يكون $x \in]-\infty;\alpha[$ فإن (C_g) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن (C_g) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x = \alpha$ فإن (C_g) يقطع (Δ) في $(\alpha;\alpha)$.

❖ وضعية (C_h) بالنسبة إلى (Δ) .

لما يكون $x \in]-\infty;\beta[$ فإن (C_h) يقع تحت (Δ) .

لما يكون $x \in]\beta;+\infty[$ فإن (C_h) يقع فوق (Δ) .

لما يكون $x = \beta$ فإن (C_h) يقطع (Δ) في $(\beta;\beta)$.

② إستنتاج إشارة $[g(x)-x]$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)-x$		$+$	0	$-$	

❖ إستنتاج إشارة $[x-h(x)]$.

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$x-h(x)$		$-$	0	$+$	

③ التحقق أن $1,3 < \alpha < 1,2$ و $2,2 < \beta < 2,1$

لدينا : $\begin{cases} g(1,2)-1,2 = 0,02 \\ g(1,3)-1,3 = -0,09 \end{cases}$ أي

$[g(1,2)-1,2] \times [g(1,3)-1,3] < 0$

ومنه : $1,2 < \alpha < 1,3$

لدينا : $\begin{cases} 2,1-h(2,1) = -0,08 \\ 2,2-h(2,2) = 0,03 \end{cases}$ أي

$[2,1-h(2,1)] \times [2,2-h(2,2)] < 0$

ومنه : $2,1 < \beta < 2,2$.

II- $f(x) = e^{-x}\left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right)$

① أ/ حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^{x+1}} + e^{-1}\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x+1}} + e^{-1}\right] = e^{-1}$$

ومنه $y = e^{-1}$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x - e^{-x-1} + e^{x-1}) = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1$

② أ/ تحقق أن $\frac{f(x)}{x} = e^{-x} + 2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}\left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right)}{x} =$$

$$= \frac{xe^{-x} - \frac{1}{e^{2x+1}} + e^{-1}}{x} = e^{-x} + \frac{-\frac{1}{e^{2x+1}} + e^{-1}}{x} =$$

$$e^{-x} + \frac{-\frac{e^{-1}}{e^{2x}} + e^{-1}}{x} = e^{-x} + \frac{e^{-1}\left(-\frac{1}{e^{2x}} + 1\right)}{x} =$$

$$e^{-x} + \frac{e^{-1}\left(\frac{-1+e^{2x}}{e^{2x}}\right)}{x} = e^{-x} + \frac{2e^{-1}\left(\frac{-1+e^{2x}}{e^{2x}}\right)}{2x} =$$

$$= e^{-x} + 2e^{-1}\left[\frac{\left(\frac{-1+e^{2x}}{e^{2x}}\right)}{2x}\right] = e^{-x} + 2e^{-1}\left(\frac{-e^{-2x}+1}{2x}\right)$$

$$= e^{-x} + 2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right) = \frac{f(x)}{x}$$

ب/ حساب : $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\left[e^{-x} + 2e^{-1}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)\right]$$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-x}\right) = 1$

ومنه $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = 1 + 2e^{-1}$.

❖ ماذا تستنتج ؟

نستنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 .

❖ فسر النتيجة هندسيا : (C_f) يقبل مماسا عند مبدأ المعلم معامل توجيهه $1 + 2e^{-1}$.

جـ/ اكتب معادلة لـ (T) المماس عند المبدأ .

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$(T): y = (1 + 2e^{-1})x$$

③ أ/ تبيين أنه : $f'(x) = [g(x)-x]e^{-x}$.

$$f'(x) = -e^{-x}\left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right) + \left(1 + \frac{e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} + e^{x-1}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}\left(x - \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right) + e^{-x}\left(1 + \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right)$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[-x + \frac{1}{e^{x+1}} - e^{x-1} + 1 + \frac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right]$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[-x + \frac{2}{e^{x+1}} + 1\right] = e^{-x}\left[-x + 1 + 2e^{-x-1}\right]$$

$$f'(x) = [g(x)-x]e^{-x}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-x} > 0$ ، ومنه إشارة f' من إشارة $g(x)-x$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزيدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	e^{-1}

④ أ/ تبيين أنه : $f''(x) = [x - h(x)]e^{-x}$.

$$f''(x) = (-2e^{-x-1} - 1)e^{-x} - e^{-x}(2e^{-x-1} + 1 - x)$$
$$f''(x) = e^{-x}[-2e^{-x-1} - 1 - 2e^{-x-1} - 1 + x]$$
$$f''(x) = e^{-x}[-4e^{-x-1} - 2 + x]$$
$$f''(x) = e^{-x}[x - 2(1 + 2e^{-x-1})] = [x - h(x)]e^{-x}$$

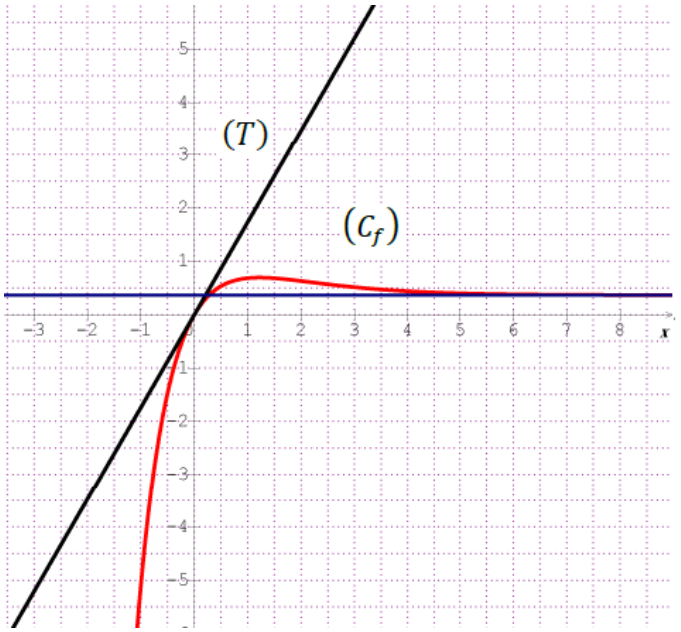
ب/ تبيين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف w

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $e^{-x} > 0$ ، ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $[x - h(x)]$

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$x - h(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $x = \beta$ وغيرت من إشارتها فإن النقطة $w(\beta; f(\beta))$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_f) .

⑤ أنشئ (C_f) و (T) .



⑥ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = (1 + 2m)x$ حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب تماما .

$$(1 + 2m) \in]0; 1 + 2e^{-1}[$$

أي

$$(2m) \in]-1; 2e^{-1}[$$

أي

$$m \in \left]-\frac{1}{2}; e^{-1}\right[$$