الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الحل المفصل لسلسلة الدوال الأسية

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

التمرين 01

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
3. حدد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .
4. بين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=2$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 ، يطلب كتابة معادلة له .
6. عين إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ، ثم ارسم كلا من (T) و (C_f) .
7. ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(3-m)e^x=m+1$.

حل تمرين 01

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right]=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x(3-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}\right]=3$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها . الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $4e^x>0$ و $(e^x+1)^2>0$ فإن : $f'(x)>0$.

ومنه نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
		3

❸ تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ، ومنه نستنتج أن $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ ، ومنه نستنتج أن $y = 3$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

❹ تبيين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 2$

أولا نحسب $f(-x)$: $f(-x) = \frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{3-e^x}{1+e^x}$

بالتعويض نجد :

$$f(-x) + f(x) = \frac{3-e^x}{1+e^x} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{3-e^x+3e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2$$

✍ تفسير النتيجة هندسيا .

لدينا من جهة : $f(-x) + f(x) = 2$

ومن جهة أخرى : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}2\alpha = 0\\2\beta = 2\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}\alpha = 0\\\beta = 1\end{cases}$

ومنه نستنتج أن النقطة $w(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

❺ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 ، يطلب كتابة معادلة له .

للبحث عن x_0 نحل المعادلة $f'(x_0) = 1$ ، ومنه $\frac{4e^{x_0}}{(e^{x_0}+1)^2} = 1$ أي $4e^{x_0} = (e^{x_0}+1)^2$

أي $4e^{x_0} = e^{2x_0} + 2e^{x_0} + 1$ أي $e^{2x_0} - 2e^{x_0} + 1 = 0$ أي $(e^{x_0}-1)^2 = 0$ ومنه $e^{x_0} - 1 = 0$.

ومنه $e^{x_0} = 1$ ، ومنه $e^{x_0} = e^0$ ، ومنه $x_0 = 0$.

وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$(T): y = x + 1$$

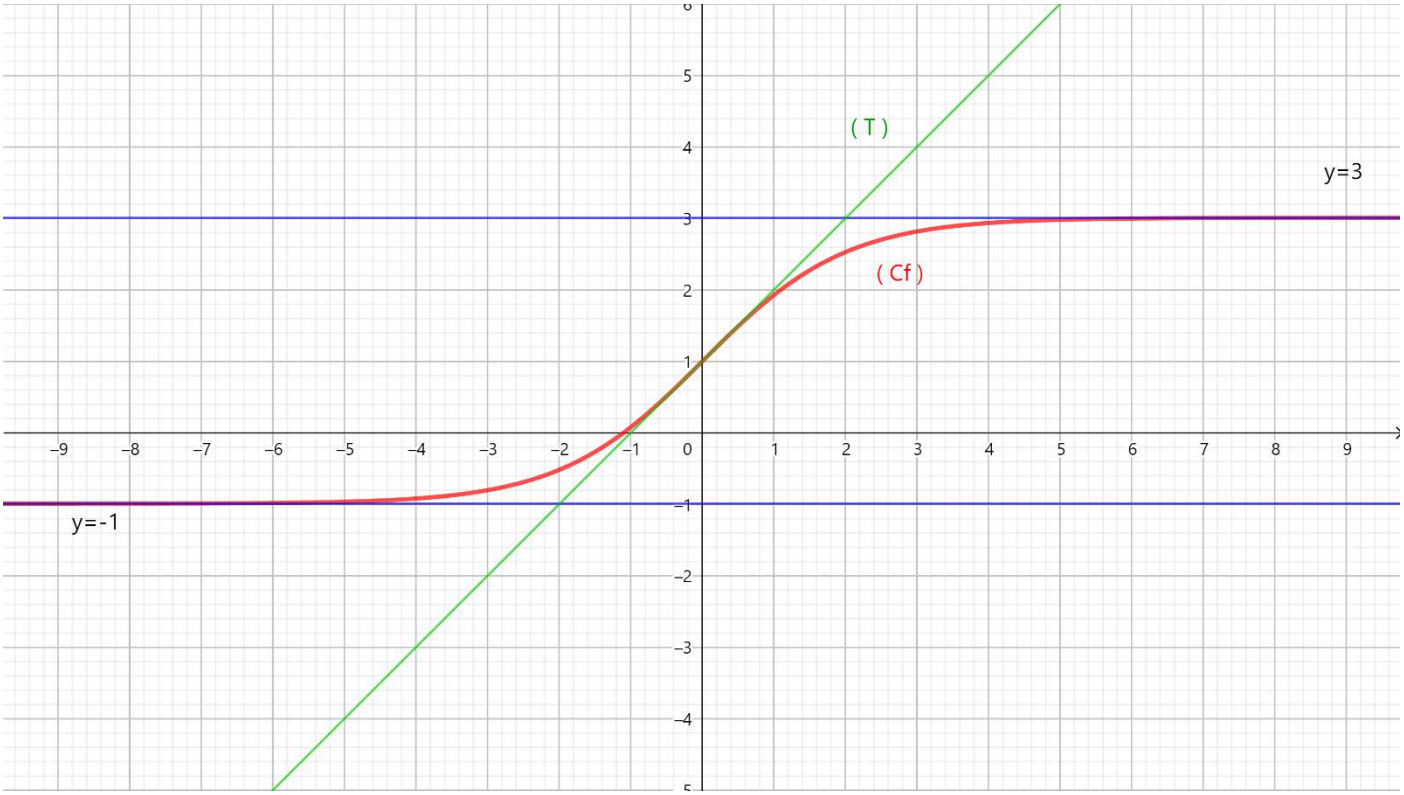
❻ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

لإيجاد نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة : $f(x) = 0$.

$\frac{3e^x-1}{e^x+1} = 0$ ، معناه $3e^x - 1 = 0$ ، ومنه $3e^x = 1$ ، ومنه $e^x = \frac{1}{3}$ ، ومنه $x = \ln\frac{1}{3}$.

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $B(\ln\frac{1}{3}; 0)$.

إنشاء كلا من المنحنى (C_f) و المماس (T) .



❼ ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(3-m)e^x = m+1$

$$(3-m)e^x = m+1$$

تكافئ $3e^x - me^x = m+1$

تكافئ $3e^x - 1 = m + me^x$

تكافئ $3e^x - 1 = m(1+e^x)$

تكافئ $\frac{3e^x-1}{e^x+1} = m$

تكافئ $f(x) = m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$

- ❖ $m \in]-\infty;-1]$ المعادلة لا تقبل حلول .
- ❖ $m \in]-1;1[$ للمعادلة حلا وحيدا سالبا .
- ❖ $m = 1$ للمعادلة حلا وحيدا معدوما .
- ❖ $m \in]1;3[$ للمعادلة حلا وحيدا موجبا .
- ❖ $m \in [3;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلول .



التمرين 02

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

1. عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
3. أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1{,}1 < \alpha < -1{,}2$ و $1{,}9 < \beta < 1{,}8$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. أ/ بين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.
4. عين حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}) .
5. ارسم (C_f) .

حل تمرين 02

1. تعيين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} [(2-x)e^x - 1] = \lim_{x\to-\infty} [2e^x - xe^x - 1] = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [(2-x)e^x - 1] = -\infty$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = -1 \times e^x + e^x(2-x) = e^x(-1+2-x) = (-x+1)e^x$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-x+1)$

$g'(x) = 0$ معناه $-x+1 = 0$ ، ومنه $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
		↗	$e-1$	↘	

❸ أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$

❖ الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[-1,2;-1,1]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(-1,2) = -0,036 \\ g(-1,1) = 0,03 \end{cases}$$، ومنه $g(-1,2) \times g(-1,1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,2 < \alpha < -1,1$

❖ الدالة g مستمرة ومتناقصة على المجال $[1,8;1,9]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(1,8) = 0,2 \\ g(1,9) = -0,3 \end{cases}$$ ومنه $g(1,8) \times g(1,9) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1,8 < \beta < 1,9$

ومنه نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين بالضبط α و β .

❸ إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1-\frac{x}{e^x})}\right] = 1$$

❷ أ/ تبيين أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$$

$$= \frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{(-x+2)e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا $(e^x-x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

❸ تبيين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.

لدينا : $0 =$ يكافئ : α ، ومنه $\frac{1}{\alpha}$ .....(1)

بتعويض (1) في (2) نجد : $f(\alpha)=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}=\frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha-1}$

معلومة: $\alpha^2-2\alpha+1=(\alpha-1)^2$

❹ تعيين حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

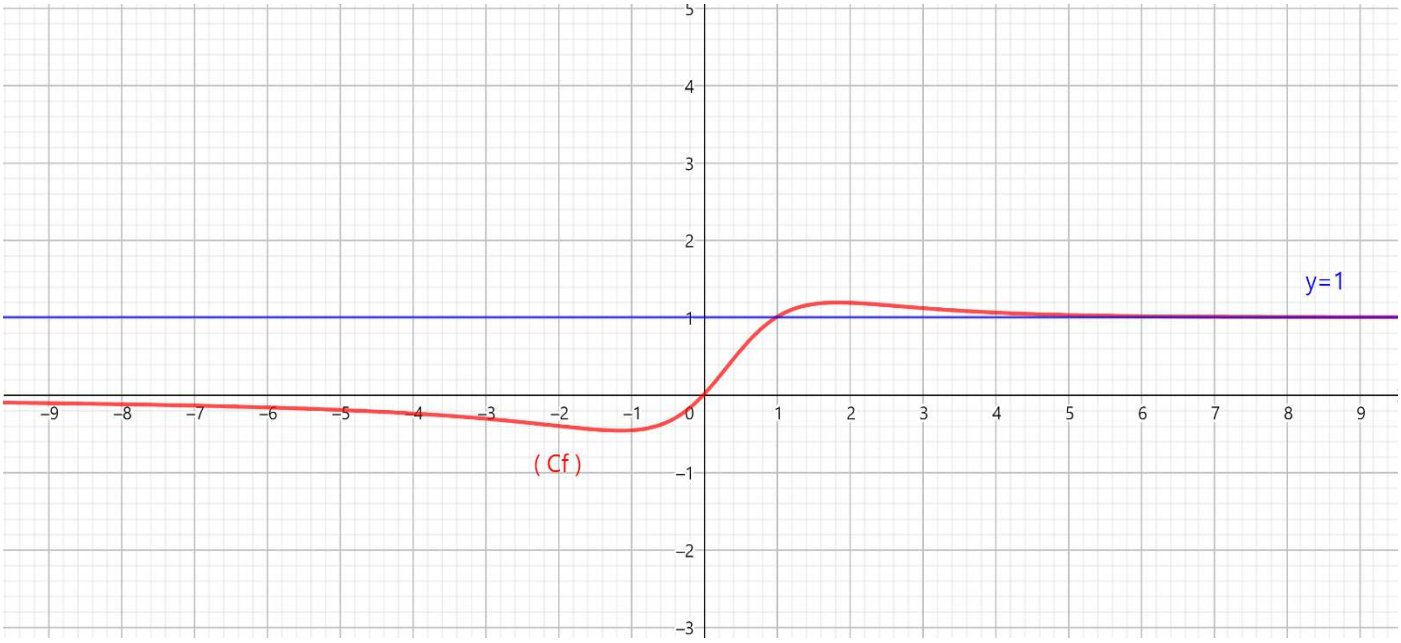
لدينا : $-1,2<\alpha<-1,1$ ، ومنه : $-2,2<\alpha-1<-2,1$

ومنه : $-\frac{1}{2,2}<\frac{1}{\alpha-1}<-\frac{1}{2,1}$ ، ومنه : $-0,48<f(\alpha)<-0,45$

لدينا : $1,8<\beta<1,9$ ، ومنه : $0,8<\beta-1<0,9$

ومنه : $\frac{1}{0,8}<\frac{1}{\beta-1}<\frac{1}{0,9}$ ، ومنه : $1,11<f(\beta)<1,25$

❺ ارسم (C_f) .



التمرين 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ أحسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f).

❷ أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ أ/ بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

❹ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$

❺ من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$.

❻ ارسم (ومستقيميه المقاربين .

حل تمرين 03

❶ حساب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

أولا نحسب $f(-x)$: $f(-x)=-x+\frac{2}{e^{-x}+1}\times\frac{e^x}{e^x}=-x+\frac{2e^x}{1+e^x}$

بالتعويض نجد :

$$f(x)+f(-x)=x+\frac{2}{e^x+1}-x+\frac{2e^x}{1+e^x}=\frac{2+2e^x}{1+e^x}=\frac{2(1+e^x)}{1+e^x}=2$$

لدينا من جهة : $f(-x)+f(x)=2$

ومن جهة أخرى : $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}2\alpha=0\\2\beta=2\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=1\end{cases}$

ومنه نستنتج أن النقطة $w(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

❷ أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{2}{e^x+1}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{2}{e^x+1}\right]=+\infty$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=1+\frac{0(e^x+1)-e^x\times2}{(e^x+1)^2}=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{e^{2x}+1+2e^x-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x}+1>0$ و $(e^x+1)^2>0$ ومنه $f'(x)>0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

❸ أ/ تبيين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{e^x+1}\right]=0$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

$\frac{2}{}$ $\frac{2}{}$]

ومنه المستقيم $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

❹ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,7;-1,6]$ ولدينا :

$\begin{cases} f(-1,7) = -0,008 \\ f(-1,6) = 0,064 \end{cases}$ ، ومنه $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$

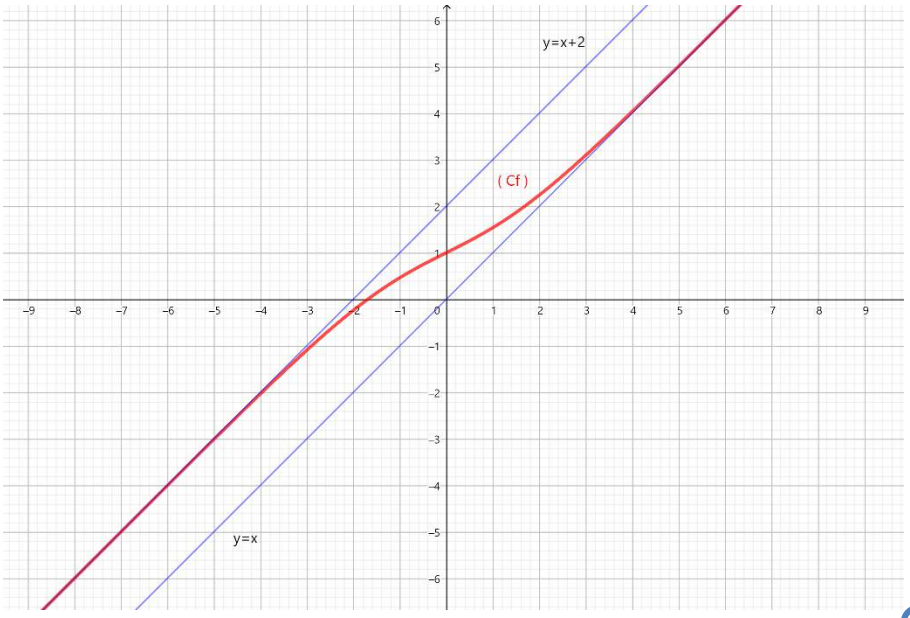
❺ من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = k$.

لدينا : العدد $-\alpha$ حل للمعادلة $f(x) = k$ معناه $f(-\alpha) = k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 2$ وخاصة $f(-\alpha) + f(\alpha) = 2$

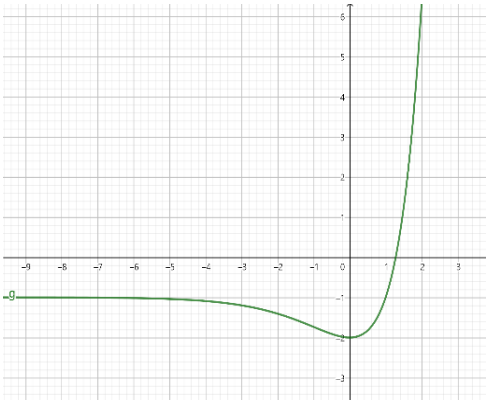
وبما أن $f(\alpha) = 0$ فإن $f(-\alpha) = 2$ ، إذن العدد $-\alpha$ حل للمعادلة $f(x) = 2$ وعليه $k = 2$

❻ رسم (C_f) ومستقيميه المقاربين



تمرين 04

I- في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax + b)e^x + c$



❶ بقراءة بيانية :

أ/ عين $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ، ثم إستنتج قيمة c

ب/ عين نهاية الدالة g عند $+\infty$

جـ / عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم استنتج قيمتي كل من a و b

❷ نفرض فيما يلي : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

جـ / إستنـ

II- f هي الدالة المعرفة على المجال على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثم حدد معادلة المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.
2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
3. أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
4. بين $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
5. أنشئ المنحنى (C_f) .
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.
7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=f(|x|)$.

أ/ بين أن h دالة زوجية .

ب/ أرسم (C_h) المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق .

حل تمرين 04

1. بقراءة بيانية : أ/ عين $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، ثم إستنتج قيمة c .

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(axe^x+be^x+c)=c$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x]=0$

إذن نستنتج أن $c=-1$

ب/ تعيين نهاية الدالة g عند $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

جـ / تعيين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$. لدينا : $g(0)=-2$ ، و $g'(0)=0$ (قيمة حدية)

استنتاج قيمتي كل من a و b .

لدينا : $g(0)=-2$ ، ومنه بالتعويض $(a(0)+b)e^0-1=-2$ أي $b-1=-2$ أي $b=-1$

نحسب $g'(x)$: $g'(x)=ae^x+e^x(ax+b)$ أي $g'(x)=(a+ax+b)e^x$

لدينا : $g'(0)=0$ ، ومنه $(a+a(0)-1)e^0=0$ أي $a-1=0$ أي $a=1$

إذن : $g(x)=(x-1)e^x-1$

2. أ/ شكل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

ب/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

الدال :

$g(1,2) \times g(1,3) < 0$ ، ومنه $\begin{cases} g(1,2) = -0,3 \\ g(1,3) = 0,1 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $1,2 < \alpha < 1,3$

جـ / إستنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

❶ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم حدد معادلة المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}\right] = 0$$

ومنه نستنتج أن $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

❷ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x}{e^x+1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x - xe^x - x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right] = 0$$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \frac{x}{e^x+1} - x = \frac{-xe^x}{e^x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x + 1 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $(0;0)$		(C_f) تحت (Δ)

❸ دراسة إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2} = \frac{-[e^x(x-1)-1]}{(e^x+1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $-g(x)$.

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

❹ تبيين

لدينا :

و لدينا :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^{\alpha}+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

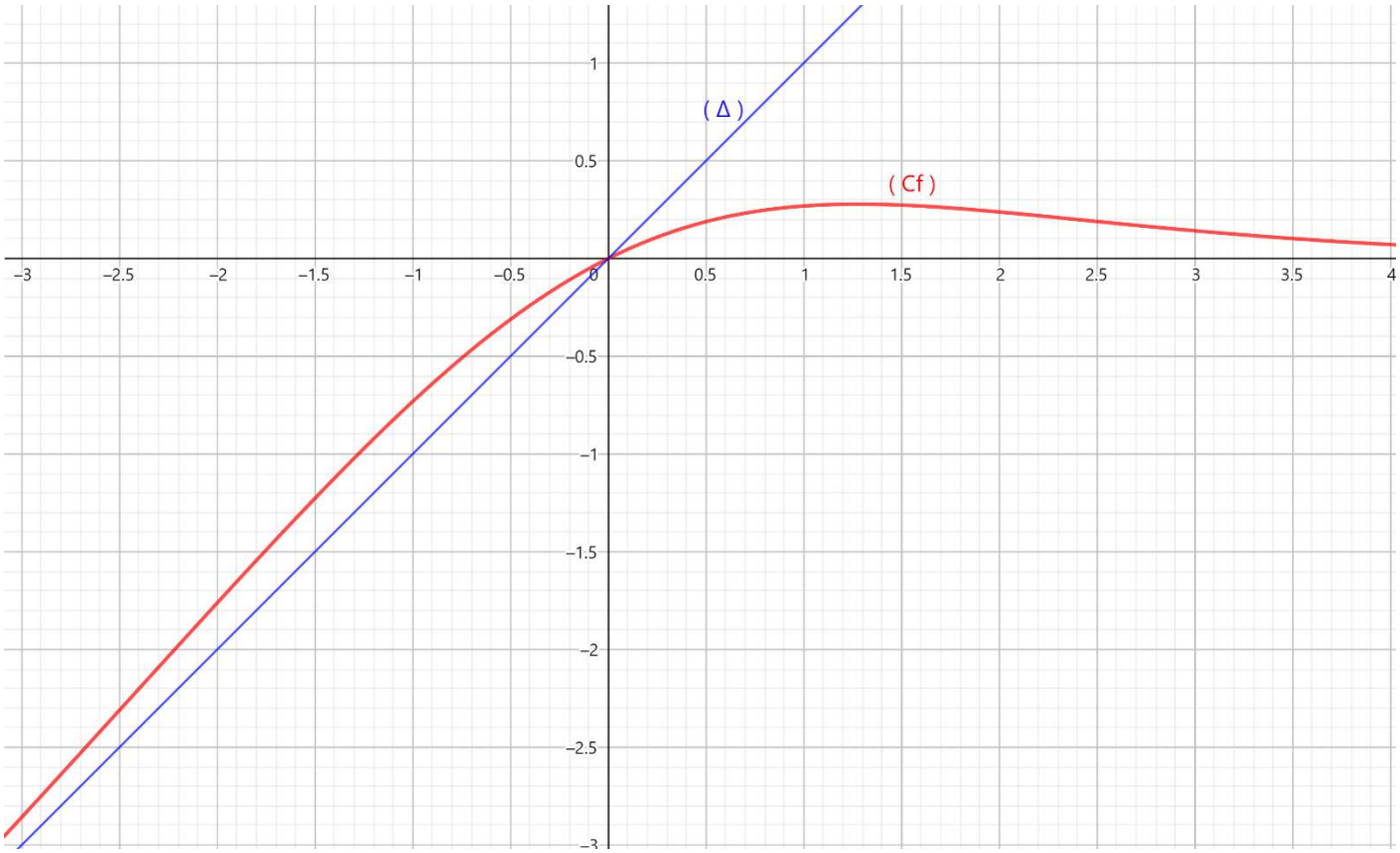
بتعويض (1) في (2) نجد :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \frac{\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \alpha \times \frac{\alpha-1}{\alpha} = \alpha - 1$$

إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$ ، ومنه : $0{,}2 < \alpha - 1 < 0{,}3$ ، ومنه $0{,}2 < f(\alpha) < 0{,}3$

❺ إنشاء المنحنى (C_f)



❻ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$

قيم $f(m)$	قيم m	المناقشة
$f(m) \in]-\infty; 0]$	$m \in]-\infty; 0]$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
$f(m) \in]0; f(\alpha)[$	$m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$	المعادلة تقبل حلان متمايزان
$f(m) = f(\alpha)$	$m = \alpha$	المعادلة تقبل حلا واحدا

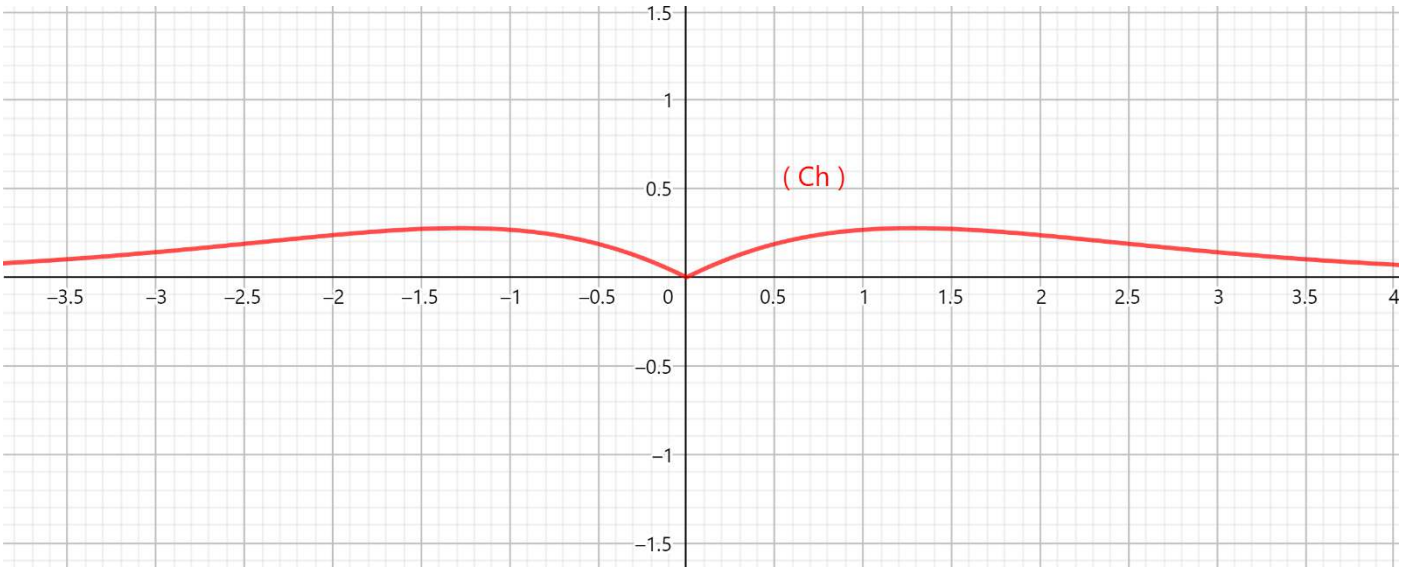
❼ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = f(|x|)$.

أ/ بين أن h دالة زوجية . لدينا $x \in D_h$ و $-x \in D_h$

ولدينا : $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$

ومنه h دالة زوجية

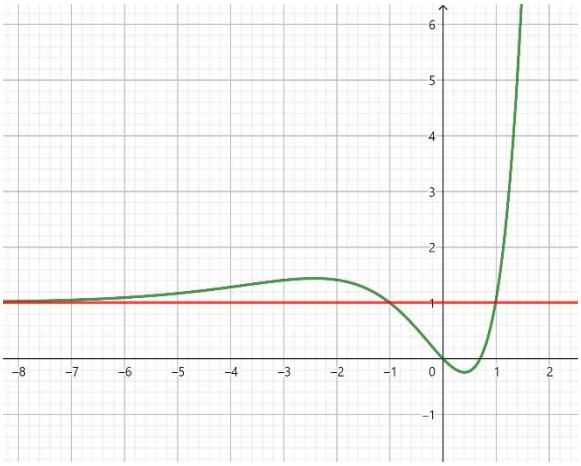
ب/ أرسـ





التمرين 05

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$ ، (C_g) تمثيلها البياني في $(O; \vec{i}, \vec{j})$



يعطى جدول القيم التالي :

x	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
$g(x)$	-0.17	-0.11	-0.03	0.07	0.2

1. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α يطلب تعيين حصرا له .
2. إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x - 1)^2 e^x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أ/ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها

2. تحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
3. أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 1)$.

ب/ بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

جـ / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة يطلب تعيين فاصلتها ، ثم أكتب معادلة لـ (T')

4. أرسم كلا من (T) ، (T') و (C_f) .
5. عين قيم الوسيط الحقيقي x حتى تقبل المعادلة 2 ثلاثة حلول .

حل تمرين 05

1 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α يطلب تعيين حصرا له .

✍ لدينا : $g(0)=(0^2-1)e^0+1=-1+1=0$ ، ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

✍ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0.7;0.75]$ ولدينا :

$$g(0,7)\times g(0,75)<0 \text{ ، ومنه } \begin{cases} g(0,7)=-003 \\ g(0,75)=0,07 \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,7<\alpha<0,75$.

ومنه نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم وا لآخر α حيث $0,7<\alpha<0,75$.

2 إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أ/ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[x+x^2e^x+e^x-2xe^x]=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x+(x-1)^2e^x]=+\infty$$

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=g(x)$.

$$f'(x)=1+2(x-1)e^x+e^x(x-1)^2=1+e^x(2x-2+x^2+1-2x)$$
$$f'(x)=1+e^x(x^2-1)=g(x)$$

✍ إستنتج إتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها .

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty,0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2 تحقق من أن : $f(\alpha)=\frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$

لدينا : $f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)^2e^\alpha$ ..... (1)

لدينا $g(\alpha)=0$ ، ومنه $(\alpha^2-1)e^\alpha+1=0$ ، ومنه $e^\alpha=\frac{-1}{\alpha^2-1}$ ..... (2)

بتعويض (2) في (1) نجد : $f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)^2\left(\frac{-1}{\alpha^2-1}\right)=\alpha-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2-1}=\alpha-\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=$

$\underline{\alpha-1}$ $\underline{\alpha^2+\alpha-\alpha+1}$ $\underline{\alpha^2+1}$

و هو المطلو

عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $0,7 < \alpha < 0,75$ ومنه $1,7 < \alpha + 1 < 1,75$ ، أي $\frac{1}{1,75} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{1,7} \dots\dots (1)$

لدينا : $0,7 < \alpha < 0,75$ ومنه $0,7^2 < \alpha^2 < 0,75^2$ ، أي $0,7^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < 0,75^2 + 1 \dots (2)$

بضرب (1) في (2) نجد $\frac{0,7^2+1}{1,75} < \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1} < \frac{0,75^2+1}{1,7}$ ، ومنه $0,85 < f(\alpha) < 0,92$

❸ أ/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;1)$.

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$
$$(T): y = 1(x - 1) + 1$$
$$(T): y = x$$

ب/ بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty}[(x-1)^2e^x] = \lim_{x\to-\infty}[x^2e^x + e^x - 2xe^x] = 0$$

ومنه المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (T) : ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - x = x + (x-1)^2e^x - x = (x-1)^2e^x$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - x$	$+$		0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (T)		(C_f) يمس (T) في $A(1;1)$	(C_f) فوق (T)	

جـ / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة يطلب تعيين فاصلتها

لدينا مماسا (T') يوازي (T) معناها أن لهما نفس معامل التوجيه، أي أن $f'(x_0) = 1$ ، أي أن $g(x_0) = 1$

$1 + e^x(x^2 - 1) = 1$ ، أي أن $e^{x_0}({x_0}^2 - 1) = 0$ ، أي ${x_0}^2 - 1 = 0$ ، أي أن ${x_0}^2 = 1$

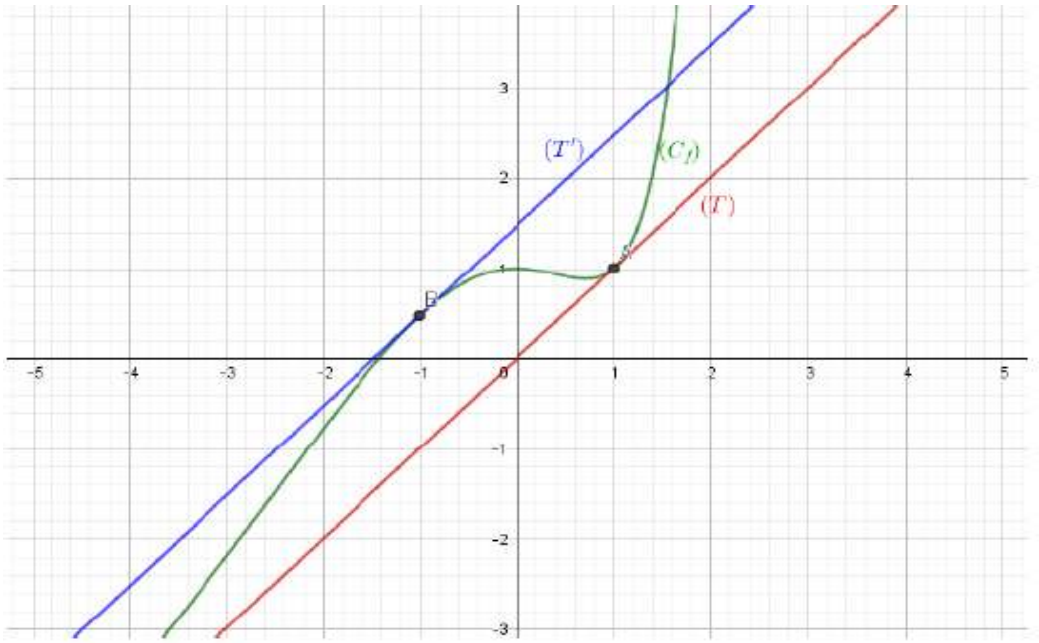
ومنه إما $x_0 = 1$ أو $x_0 = -1$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1 .

كتابة معادلة المماس (T') .

$$(T'): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(T'): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$
$$(T'): y = 1(x + 1) - 1 + 4e^{-1}$$
$$(T)': y = x + 4e^{-1}$$

❹ أرسم كلا من (T) ، (T') و (C_f)



❺ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E): (x-1)^2e^x - m - 1 = 0$ ثلاثة حلول

لدينا : $(x-1)^2e^x - m - 1 = 0$ ، تكافئ : $(x-1)^2e^x = m + 1$

تكافئ : $x + (x-1)^2e^x = x + m + 1$ ، تكافئ : $f(x) = x + m + 1$

ومنه حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m + 1$

$(m+1) \in]0; 4e^{-1}[$ ، ومنه $m \in]-1; -1 + 4e^{-1}[$

التمرين 06

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x + 2 - e^x$.

❶ أدرس إتجاه تغير الدالة g على $[0; +\infty[$ ، وعين نهاية g عند $+\infty$.

❷ أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0; +\infty[$.

ب/ تحقق أن : $1,14 < \alpha < 1,15$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0; +\infty[$.

II- نعرف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة f بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م م م .

❶ أ/ بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

ب/ إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

❷ أ/ بين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

❹ أكتب معادلة المماس للمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة .

❺ أ/ تحقق أن : $u(x) =$

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة u على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج إشارة $u(x)$

جـ / إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T)

6 أرسم كلا من (T) والمنحنى (C_f) ، الوحدة $(4\ cm)$

حل تمرين 06

1 دراسة إتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ ، وعين نهاية g عند $+\infty$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا : $g'(x)=1-e^x$.

لدينا $g'(x)\geq 0$ يكافئ $1-e^x\geq 0$ يكافئ $-e^x\geq -1$ يكافئ $e^x\leq 1$ يكافئ $e^x\leq e^0$ يكافئ $x\leq 0$.

نلاحظ أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g'(x)\leq 0$ ، ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)+2\right]=-\infty$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘	$-\infty$

2 أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و $g(0)=1$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$

ب/ التحقق أن : $1,14<\alpha<1,15$.

لدينا $]0;+\infty[\supset]1,14;1,15[$ ، إذن الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1,14;1,15]$ ولدينا :

$g(1,15)=-0,008$ و $g(1,14)=0,01$ ، أي أن $g(1,14)\times g(1,15)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,14<\alpha<1,15$ يحقق $g(\alpha)=0$.

إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II- نعرف على المجال $]0;+\infty[$ الدالة f بـ : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م م م

1 أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

$$\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^x-1}{xe^x+1}=f(x)$$

ب/ إستنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

بوضع ، لما فإن ومنه

لأن $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ و $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{1}{t} = 0$.

❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1)-(e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2} = \frac{xe^{2x}+e^x-(e^{2x}-e^x+xe^{2x}-xe^x)}{(xe^x+1)^2}$$

$$\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x-e^{2x}+e^x+xe^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$\frac{e^x(2-e^x+x)}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

ب/ إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على $[0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(xe^x+1)^2 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

❸ تبيين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

مما سبق لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكافئ : $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$$e^\alpha = \alpha + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولدينا: $$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد : $f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$

معلومة : $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha+1)^2$

ب/ حصر العدد $f(\alpha)$.

$$1{,}14 < \alpha < 1{,}15$$
$$2{,}14 < \alpha + 1 < 2{,}15$$
$$\frac{1}{2{,}14} > \frac{1}{\alpha+1} > \frac{1}{2{,}15}$$
$$0{,}467 > f(\alpha) > 0{,}465$$
$$0{,}465 < f(\alpha) < 0{,}467$$

❹ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

❺ أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث: $u(x)=e^x-xe^x-1$

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}$$

طريقة 1

$$\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{e^x(1-x^2)-1(1+x)}{xe^x+1}=\frac{e^x(1-x)(1+x)-1(1+x)}{xe^x+1}$$
$$\frac{(1+x)[e^x(1-x)-1]}{xe^x+1}=\frac{(1+x)[e^x-xe^x-1]}{xe^x+1}=\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$$

و هو المطلوب

طريقة 2

$$f(x)-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}$$

يكفي أن نثبت أن $(x+1)u(x)=e^x-1-x^2e^x-x$

$$(x+1)u(x)=(x+1)(e^x-xe^x-1)=xe^x-x^2e^x-x+e^x-xe^x-1$$
$$=e^x-1-x^2e^x-x$$

ب/ دراسة إتجاه تغير الدالة u على $[0;+\infty[$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$u'(x)=e^x-1e^x+e^x(-x)=-xe^x\leq 0$$

ومنه الدالة u متناقصة على $[0;+\infty[$.

$$u(0)=e^0-0e^0-1=0$$

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	0	$-$
$u(x)$	0	↘

من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن $u(x)\leq 0$

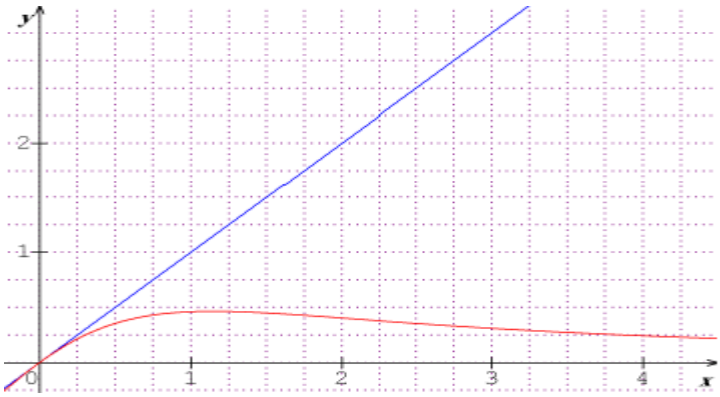
جـ / إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T)

$$f(x)-x=\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$$

من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن $xe^x+1>0$ و $(x+1)>0$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $u(x)$

x	0	$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$
الوضع النسبي	(T) يمس (C_f)	(C_f) يقع تحت (T)

❻ أرسم كلا من (T) والمنحنى (C_f) ، الوحدة ($4\ cm$)



التمرين 07

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$.

❶ أدرس تغيرات الدالة g .

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,.5;\ 1,6[$.

❸ أحسب $g(0)$ واستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ ، (C_f) منحناها البياني في م م م بحيث $\| \vec{i} \| = 2\text{cm}$

❶ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، فسر هندسيا النتائج المحصل عليها .

❷ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

❸ أ/ بين أن : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ثم عين حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$.

ب/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

جـ / أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = -1$.

❹ أرسم المماس (T) ، المستقيم (D) و المنحنى (C_f) .

❺ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{|2x-2|}{e^x-2x}$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .

أ/ اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب/ أرسم في معلم آخر المنحنى (C_h) موضحا كيفية الرسم .

❻ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right| = |m|$ ثلاث حلول متمايزة .

حل تمرين 07

❶ دراسة تغيرات الدالة g .

x x

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 4e^x - 2e^x + e^x(-2x) = 2e^x(-x+1)$$

بما أن $2e^x > 0$ فإن إشارة المشتق من إشارة $(-x+1)$.

$g'(x) = 0$ معناه $-x+1=0$ أي $-x=-1$ ، أي $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ، ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	↗	$2e-4$	↘	$-\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1.5;1.6[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,5;1,6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} g(1,5) = 0,48 \\ g(1,6) = -0,04 \end{cases}$$ ، ومنه $g(1,5) \times g(1,6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1.5;1.6[$

❸ حساب $g(0)$ واستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

$$g(0) = 4e^0 - 2(0)e^0 - 4 = 0$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ ، (C_f) منحناها البياني $\| \vec{i} \| = 2cm$

❶ حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، فسر هندسيا النتائج المحصل عليها .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x(2-\frac{2}{x})}{x(\frac{e^x}{x}-2)}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x(2-\frac{2}{x})}{x(\frac{e^x}{x}-2)}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}\right] = 0$$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ، ومنه نستنتج أن $y=-1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، ومنه نستنتج أن $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x = \frac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{} \quad \frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{} =$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^x - 2x)^2 > 0$ ، فإن إشارة المشتق من إشارة $g(x)$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $[0;-\infty[$ و $]\alpha;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	$f(\alpha)$	↘	0

❸ أ/ تبيين أن : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$.

لدينا : $f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha} \dots\dots\dots (1)$

ولدينا : $g(\alpha) = 0$ ، ومنه $4e^{\alpha} - 2\alpha e^{\alpha} - 4 = 0$ ، أي أن $e^{\alpha}(4-2\alpha) = 4$ ، ومنه :

$$e^{\alpha} = \frac{4}{4-2\alpha} = \frac{2}{2-\alpha} \dots\dots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{\frac{2-4\alpha+2\alpha^2}{2-\alpha}} = \frac{2\alpha-2}{\frac{2\alpha^2-4\alpha+2}{2-\alpha}} = \frac{2(\alpha-1)}{\frac{2(\alpha^2-2\alpha+1)}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{2-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{\frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha}}$$

$$(\alpha-1) \div \frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha} = (\alpha-1) \times \frac{2-\alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$$

وهو المطلوب

تعيين حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$.

لدينا : $1,5 < \alpha < 1,6$ ، ومنه $-1,6 < -\alpha < -1,5$ ، ومنه $(*) \dots$ $0,4 < 2-\alpha < 0,5$.

لدينا : $1,5 < \alpha < 1,6$ ، ومنه $0,5 < \alpha - 1 < 0,6$ ، ومنه $(**) \dots$ $\frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,5}$.

بضرب (*) في (**) طرفا لطرف نجد $\frac{0,4}{0,6} < \frac{2-\alpha}{\alpha-1} < \frac{0,5}{0,5}$ ، أي $0,66 < f(\alpha) < 1$.

ب/ تعيين معادلة مماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = \frac{2}{e-2}(x-1)$$

جـ / أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = -1$

➢ ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) + 1 = \frac{2x-2}{e^x-2x} + 1 = \frac{2x-2+e^x-2x}{e^x-2x} = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$$

✍ ندرس إشارة البسط : لدينا : $e^x - 2 \geq 0$ ، ومنه $e^x \geq 2$ ، ومنه $x \geq \ln 2$.

ندرس إشارة المقام :

الدال :

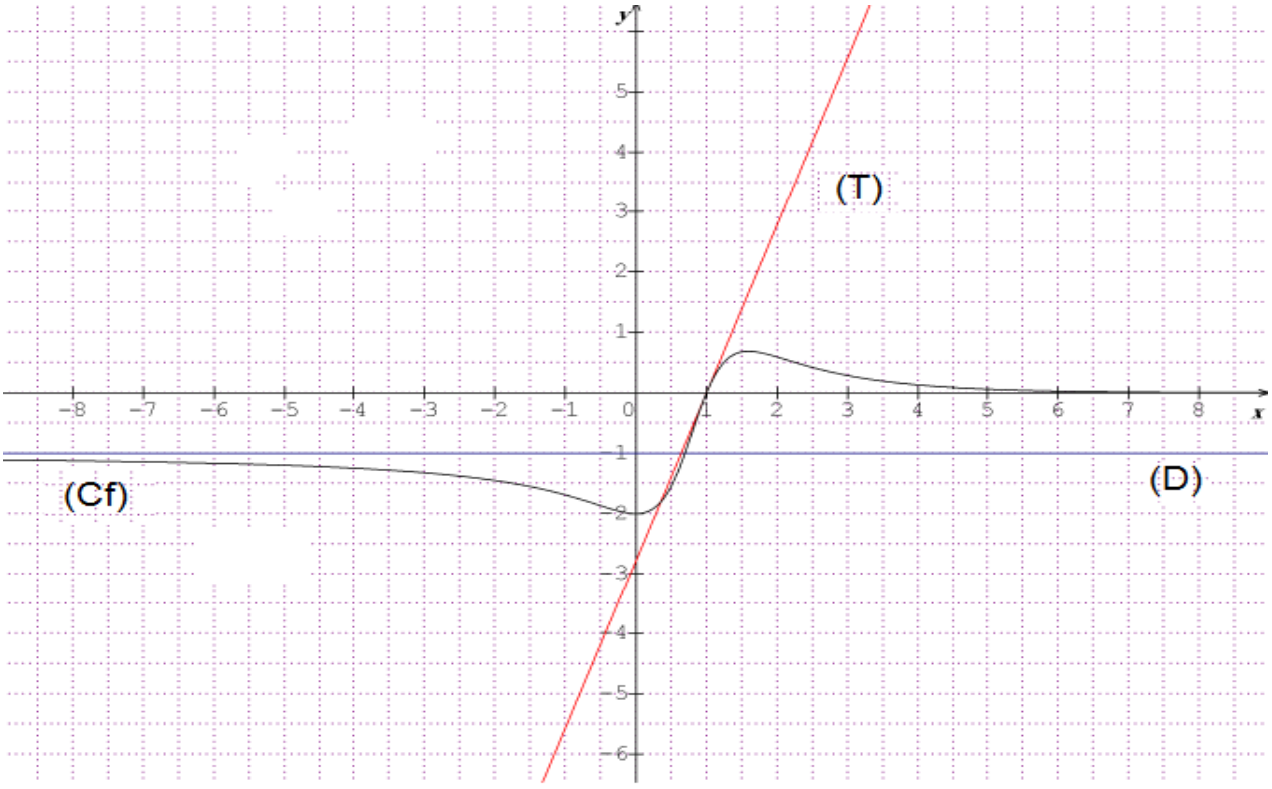
x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		↘	$2-2\ln 2$	↗	

من جدول التغيرات نلاحظ $2-2\ln 2$ هي قيمة حدية صغرى ومنه $t(x) \geq 2-2\ln 2$

ومنه نستنتج أن $t(x) > 0$ ، ومنه نستنتج أن إشارة $f(x)+1$ من إشارة البسط .

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)+1$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)		(C_f) يقطع (D) في $A(\ln 2\,;-1)$	(C_f) فوق (D)	

❹ أرسم المماس (T) ، المستقيم (D) و المنحنى (C_f)



❺ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\frac{|2x-2|}{e^x-2x}$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .

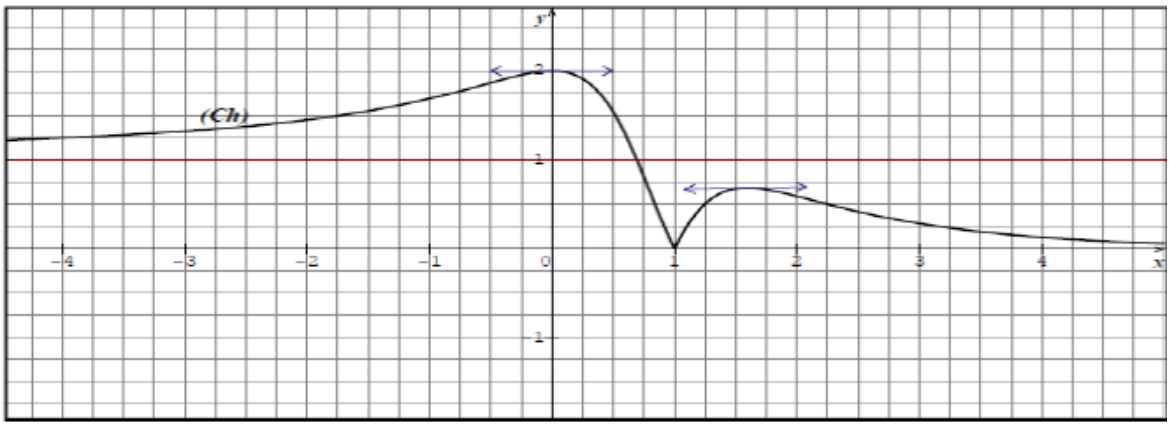
أ/ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=f(x) & ;2x-2\geq 0\\ \dfrac{2x-2}{x} & \end{cases}$$

ب/ أرسم في معلم آخر المنحنى (C_h) موضحا كيفية الرسم .

لما يكون : $x \geq 1$ فإن $h(x) = f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما يكون : $x \leq 1$ فإن $h(x) = -f(x)$ ، ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .



6 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right| = |m|$ ثلاث حلول متمايزة .

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $e^x - 2x > 0$ ، ومنه $h(x) = \frac{|2x-2|}{e^x-2x} = \left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right|$.

ومنه $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right| = |m|$ ، تكافئ $h(x) = |m|$

ومنه بيانيا تقبل المعادلة : $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right| = |m|$ ثلاث حلول متمايزة إذا وفقط إذا كان $0 < |m| < f(\alpha)$

ومنه $m \in]-f(\alpha); f(\alpha)[$

التمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$.

ب/ استنتج أن الدالة f دالة فردية ، فسر هذه النتيجة بيانيا .

2 أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ / ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$.

3 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

ب/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $\frac{1}{2}x \leq 1 - \frac{2}{e^x+1}$.

4 أنشئ المنحنى (C_f) .

5 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{2}{e^{|x|}+1} - 1$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .

أ/ أدرس شفعية الدالة h .

ب/ اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h)، ثم أرسم (C_h) في المعلم السابق .

حل تمرين 08

1 أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^{x}+1}$.

$$\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{e^{-x}+1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x+1-1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} + \frac{-1}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

وهو المطلوب

ب/ استنتج أن الدالة f دالة فردية .

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = 1 - \frac{(-x)}{2} - \frac{2}{e^{-x}+1} = 1 + \frac{x}{2} - 2\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right) = 1 + \frac{x}{2} - 2\left(1 - \frac{1}{e^{x}+1}\right)$$

$$1 + \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{e^{x}+1} = -1 + \frac{x}{2} + \frac{2}{e^{x}+1} = -\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{x}+1}\right) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية .

تفسير هذه النتيجة بيانيا : بما أن f دالة فردية فإن مبدأ المعلم o مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2 أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{x}+1}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{x}+1}\right] = -\infty$$

ب/ تبيين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (1 - \frac{x}{2})\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^{x}+1}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ / دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - \frac{x}{2}$.

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{2}{e^{x}+1} < 0$

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (D) .

3 أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{(e^x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) \leq 0$ ، ومنه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
	$+\infty$ ↘		↘

ملاحظة : يمكن للتلميذ أن يستنتج أن المبدأ o هو نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

ب/ استنتاج أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $\frac{1}{2}x \leq 1-\frac{2}{e^x+1}$.

من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، فإن $f(x) \leq 0$ وعليه $1-\frac{x}{2}-\frac{2}{e^x+1} \leq 0$

ومنه $\frac{1}{2}x \leq 1-\frac{2}{e^x+1}$ وهو المطلوب .

❹ أنشئ المنحنى (C_f)



❺ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\frac{|x|}{2}+\frac{2}{e^{|x|}+1}-1$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها .

أ/ دراسة شفعية الدالة h .

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x)=\frac{|-x|}{2}+\frac{2}{e^{|-x|}+1}-1=\frac{|x|}{2}+\frac{2}{e^{|x|}+1}-1=h(x)$$

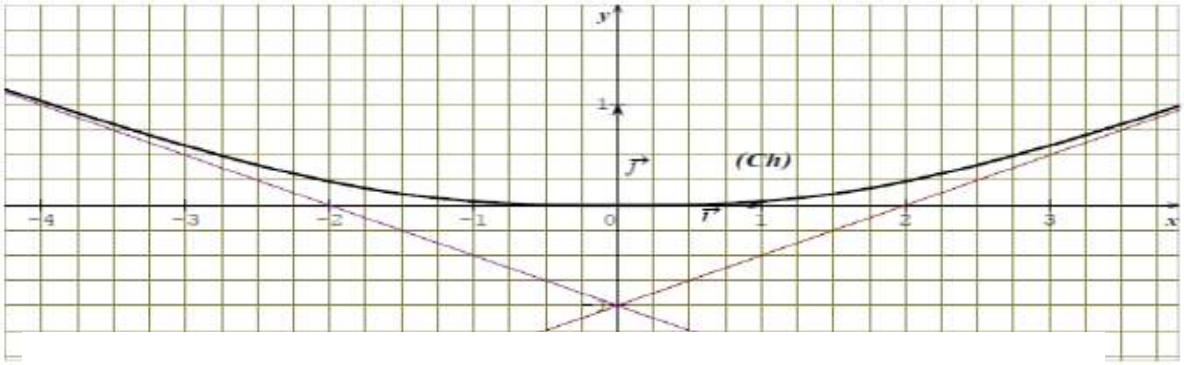
ومنه الدالة h دالة زوجية .

ب/ شرح كيفية رسم المنحنى (C_h)، ثم أرسم (C_h) في المعلم السابق .

أولا نكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$h(x)=\begin{cases} -f(x) & si: \quad x \geq 0 \\ -f(-x) & si: \quad x \leq 0 \end{cases}$$

لما يكون $x \geq 0$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل ، وبما أن h زوجية نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب



التمرين 09

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x) + f(x) = -2$ ، ثم فسر هذه النتيجة هندسيا .
2. أحسب نهاية الدالة f عند الصفر ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
3. أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ/ عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

د/ استنتج المستقيم المقارب (Δ') للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .
5. أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}^*$ حلين α و β .

ثم تحقق أن : $2{,}23 < \alpha < 2{,}24$ و $-1{,}07 < \beta < -1{,}06$.

ب/ أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = |f(x)|$. نسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ/ اشرح كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أنشئ (C_h) .

ب/ عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$h(x) = m^2 - 4m + 3$$

حل تمرين 09

1. تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x) + f(x) = -2$.

✍ نحسب أولا $f(-x)$:

$$f(-x) = -x - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x - \frac{2}{1 - e^x} = -x + \frac{2}{e^x - 1}$$

بالتعويض نجد :

$$f(-x) + f(x) = -x + \frac{2}{e^x - 1} + x - \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{2 - 2e^x}{e^x - 1} = \frac{-2(e^x - 1)}{e^x - 1} = -2$$

وهو المطلوب

✍ تفسير هذه النتيجة هندسيا .

لدينا من جهة : $f(-x) + f(x) = -2$

ومن جهة أخرى : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} 2\alpha = 0 \end{cases}$ ، ومنه $\alpha = 0$

ومنه نستنتج

❷ حساب نهاية الدالة f عند الصفر ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-2e^x)=-2$ ، و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(e^x-1)=0^-$ ، و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=+\infty$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-2e^x)=-2$ ، و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(e^x-1)=0^+$ ، و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$.

❸ أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2e^x)=0$ ، و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$ ، و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\frac{2e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\frac{2}{1-\frac{1}{e^x}}\right]=+\infty$$

ب/ تبيين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\frac{2e^x}{e^x-1}-x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2e^x}{e^x-1}+2\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2e^x+2e^x-2}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{e^x-1}\right]=0$$

جـ/ تعيين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(x-2)=\frac{-2}{e^x-1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	‖	$+$
$f(x)-(x-2)$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)

د/ استنتاج المستقيم المقارب (Δ') للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بما أن $f(x)=x-\frac{2e^x}{e^x-1}$ ، و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{2e^x}{e^x-1}\right]=0$ ، فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته : $(\Delta'):y=x$ بجوار $-\infty$.

❹ دراسة إتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x)=1-\frac{2e^x(e^x-1)-e^x(2e^x)}{(e^x-1)^2}=1-\frac{2e^{2x}-2e^x-2e^{2x}}{(e^x-1)^2}=1+\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}>0$$

من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ ، $2e^x>0$ ، $(e^x-1)^2>0$ ومنه $f'(x)>0$

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
	$+\infty$	‖	$+\infty$

❺ أ/ تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}^*$ حلين α و β .

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ، ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x=-\infty\end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-\infty;0[$.

❖ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x=+\infty\end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

✍ التحقق أن: $2,23<\alpha<2,24$ و $-1,07<\beta<-1,06$

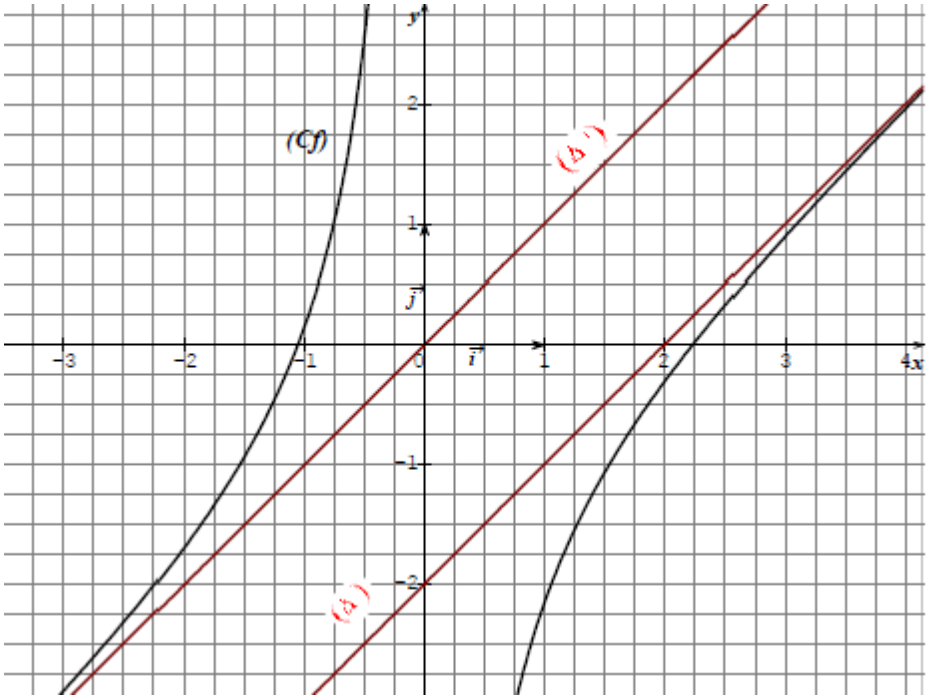
لدينا : $[2,23;2,24]\subset\ ]0;+\infty[$ ومنه الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[2,23;2,24]$

ولدينا : $\begin{cases}f(2,23)=-0,011\\ f(2,24)=1,716\end{cases}$ إذن $f(2,23)<f(\alpha)<f(2,24)$ ومنه نستنتج أن $2,23<\alpha<2,24$

لدينا : $[-1,07;-1,06]\subset\ ]-\infty;0[$ ومنه الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,07;-1,06]$

لدينا : $\begin{cases}f(-1,07)=-0,02\\ f(-1,06)=0,0002\end{cases}$ إذن $f(-1,07)<\beta)<f(-1,06)$ ومنه نستنتج أن $-1,07<\beta<-1,06$

ب/ أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)



❻ h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=|f(x)|$. نسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ/ اشرح كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أنشئ (C_h) .

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & si: \ f(x)\geq 0\\ -f(x) & si: \ f(x)\leq 0\end{cases}$$

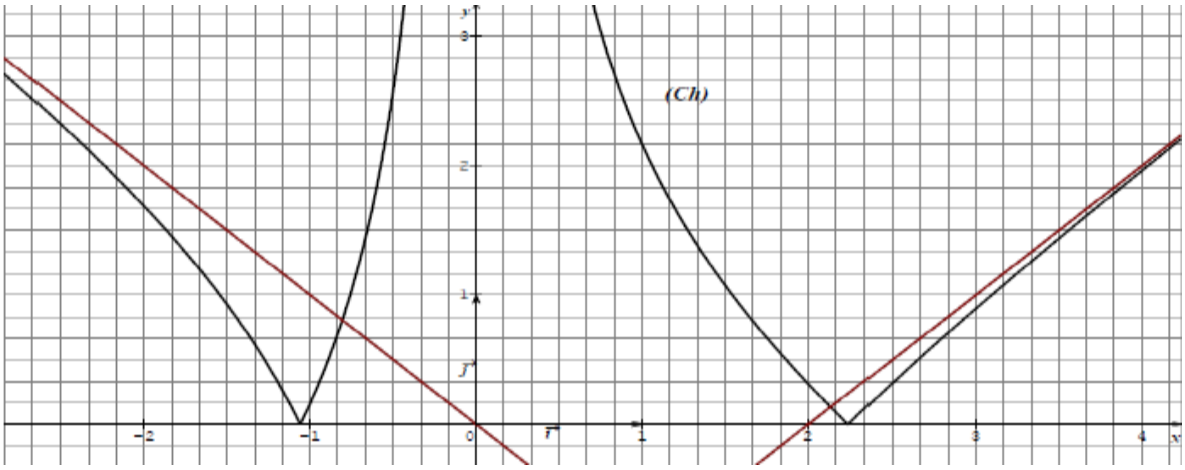
أولا يجب تحديد إشارة : من التمثيل البياني نجد

لما يكون $f(x)\leq$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si: \quad x\in[\beta;0[\cup[\alpha;+\infty[\\ -f(x) & si: \quad x\in]-\infty,\beta]\cup]0;\alpha] \end{cases}$$

لما يكون $x\in[\beta;0[\cup[\alpha;+\infty[$ فإن $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) .

و لما يكون $x\in]-\infty,\beta]\cup]0;\alpha]$ فإن $h(x)=-f(x)$ ، ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .



ب/ تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$h(x)=m^2-4m+3$$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع (C_h) مع المستقيم ذو المعادلة : $y=m^2-4m+3$.

أولا ندرس إشارة العبارة m^2-4m+3 .

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
m^2-4m+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

قيم m^2-4m+3	قيم m	المناقشة
$m^2-4m+3<0$	$m\in]1;3[$	المعادلة لا تقبل حلول .
$m^2-4m+3=0$	$m\in\{1,3\}$	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .
$m^2-4m+3>0$	$]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$	تقبل حلان موجبان معا وحلان سالبان معا .

التمرين 10

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,14<\alpha<1,15$.
3. إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-1)e^{-x+2}$ ، تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب

❷ بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

❸ أ/ بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

جـ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

د/ أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (Δ)، (T) و (C_f) .

❹ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 0$$

حل تمرين 10

❶ دراسة تغيرات الدالة g .

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ ، لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x+2}) = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[2 + (x-2)e^{-x+2}] = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{x-2}{e^{x-2}} =$$

بوضع $x - 2 = t$ ، لما $x \to +\infty$ فإن $t \to +\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2 + \frac{x-2}{e^{x-2}}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[2 + \frac{t}{e^t}\right] = 2$$

لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right) = 0$

✍ الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 1(e^{-x+2}) - e^{-x+2}(x-2) = e^{-x+2}(1 - x + 2) = (-x+3)e^{-x+2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+2} > 0$ ، ومنه إشارة المشتق من إشارة $(-x+3)$

$g'(x) = 0$ ، معناه $\begin{cases} e^{-x+2} \neq 0 \\ -x + 3 = 0 \end{cases}$ ، ومنه $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 3]$ ومتناقصة تماما على المجال $[3; +\infty[$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2 - e^{-1}$	↘	2

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال ولدينا :

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

❸ إستنتاج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-1-(x-1)e^{-x+2})$$

هي حالة عدم تعيين : يمكن إزالتها بإستخراج $(x-1)$ كعامل مشترك .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)\left[\frac{2x-1}{x-1}-e^{-x+2}\right]=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x+2})=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-1-(x-1)e^{-x+2})$$

هي حالة عدم تعيين : إزالتها :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[2x-1-(x-1)e^{-x+2}]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=1$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)=0$

❷ تبيين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

$$f'(x)=2-[1(e^{-x+2})-e^{-x+2}(x-1)]=2-[(1-x+1)e^{-x+2}]$$
$$=2-(-x+2)e^{-x+2}=2+(x-2)e^{-x+2}=g(x)$$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ أ/ تبيين أن : $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$.

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}\ \ldots\ldots(1)$

لدينا : $g(\alpha)=0$ ، ومنه $2+(\alpha-2)e^{-\alpha+2}=0$ ، ومنه $e^{-\alpha+2}=-\frac{2}{\alpha-2}\ \ldots\ldots(2)$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)\left(-\frac{2}{\alpha-2}\right)=2\alpha-1+\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}=2\alpha-1+\frac{2\alpha-2-2+2}{\alpha-2}$$
$$=2\alpha-1+\frac{2\alpha-4}{\alpha-2}+\frac{2}{\alpha-2}=2\alpha-1+\frac{2(\alpha-2))}{\alpha-2}+\frac{2}{\alpha-2}=2\alpha-1+2+\frac{2}{\alpha-2}$$
$$\underline{2}$$

وهو المطلو

إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $1,14 < \alpha < 1,15$ ، أي أن $3,28 < 2\alpha + 1 < 3,30$ ..... (*)

لدينا : $1,14 < \alpha < 1,15$ ، أي أن $-086 < \alpha - 2 < -0,85$ ، ومنه $\frac{2}{-0,85} < \frac{2}{\alpha-2} < \frac{2}{-0,86}$

ومنه : $-2,35 < \frac{2}{\alpha-2} < -2,32$ ..... (**)

بجمع (*) و (**) نجد : $0,93 < f(\alpha) < 0,98$

ب/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x-1)] = \lim_{x\to+\infty}[-(x-1)e^{-x+2}] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right] = 0$$

وهو المطلوب .

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) - (2x-1) = -(x-1)e^{-x+2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+2} > 0$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة $-(x-1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-(2x-1)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $A(1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

جـ/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

(T) يوازي المستقيم (Δ) معناه أن لهما نفس معامل التوجيه ومنه للبحث عن x_0 نحل المعادلة $f'(x_0) =$ ومنه

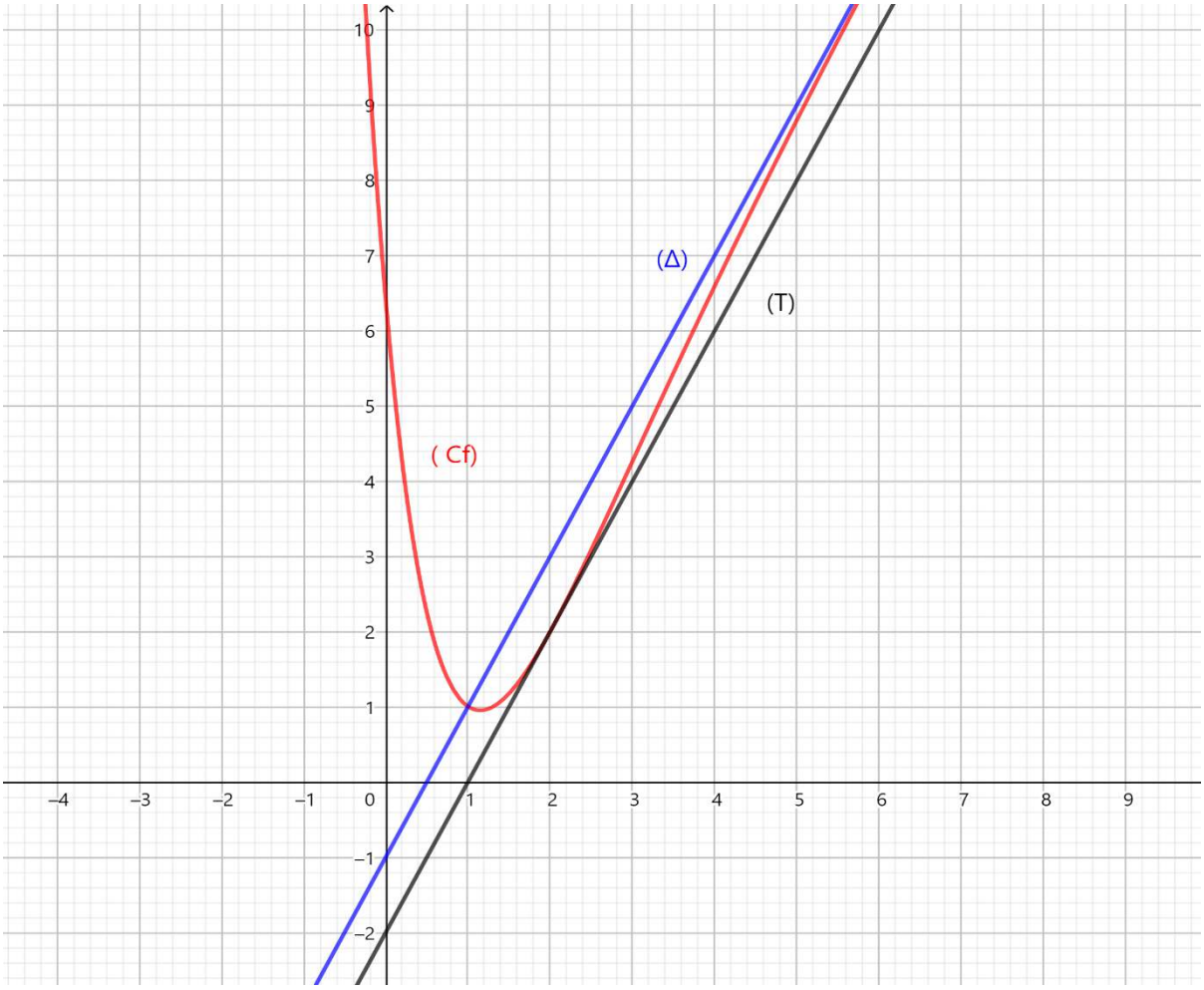
$$g(x_0) = 2 \Rightarrow 2 + (x_0-2)e^{-x_0+2} = 2 \Rightarrow (x_0-2)e^{-x_0+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ e^{-x_0+2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \{x_0 = 2$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$.

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$(T): y = 2x - 2$$

د/ حساب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (Δ)، (T) و (C_f)

$$f(0) = -1 + e^2 = 6,38 \text{ ، و } f(2) = 2$$



❹ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 0$$

تكافئ $-1 - (x-1)e^{-x+2} = -2m$

تكافئ $2x - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 2x - 2m$

تكافئ $f(x) = 2x - 2m$

إذن هيا مناقشة مائلة ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = 2x - 2m$

قيم $-2m$	قيم m	المناقشة
$-2m \in]-\infty;-2[$	$m \in]1;+\infty[$	المعادلة ليس لها حلول .
$-2m = -2$	$m = 1$	المعادلة لها حل وحيد موجب .
$-2m \in]-2;-1[$	$m \in \left]\frac{1}{2};1\right[$	المعادلة تقبل حلين موجبين.
$-2m \in [-1;-1+e^2[$	$m \in \left]\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2};\frac{1}{2}\right]$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب .
$-2m = -1+e^2$	$m = \frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}$	المعادلة لها حل وحيد معدوم .
^{2}	$-\ \frac{}{}^2$	المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

التمرين 11

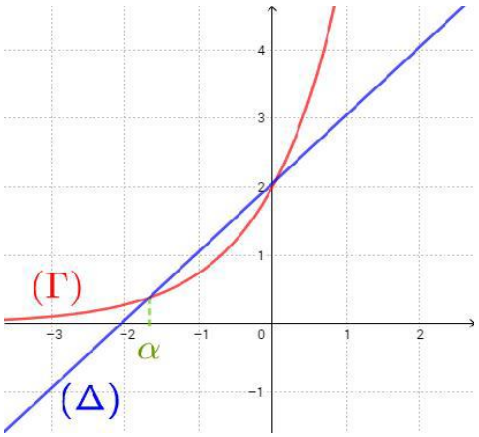
I- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Γ) التمثيل البياني للدالة : $x \mapsto 2e^x$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ ، α و 0 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ) حيث $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.

1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -2e^x + x + 2$.

✍ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .



II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2(ex - 3) + (x + 3)e^{-x+1}$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$.

جـ/ عين دون حساب: $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

د/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ/ بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = 2(ex - 3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$، أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

جـ/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث: $-2{,}3 < \beta < -2{,}4$.

3) أنشئ كل من (D) و (C_f) ، نأخذ $f(-3) \simeq -22{,}31$ ، $f(\alpha) \simeq 4{,}15$.

حل تمرين 11

1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$2e^x - (x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(Γ) فوق (Δ)		(Γ) يقطع (Δ)	(Γ) تحت (Δ)	(Γ) يقطع (Δ)	(Γ) فوق (Δ)	

2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -2e^x + x + 2$.

حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

$$g(x) = -2e^x + x + 2 = -[2e^x - (x+2)]$$

ومنه إشارة $g(x)$ تتعلق بوضعية (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
			0		0		

1) أ/ حسا

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2(ex-3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x+1}) = +\infty \end{cases} ; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}] = \lim_{x\to+\infty} \left[2(ex-3)+\left(\frac{x+3}{e^{x-1}}\right)\times\frac{x-1}{x-1}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[2(ex-3)+\left(\frac{x-1}{e^{x-1}}\right)\times\frac{x+3}{x-1}\right]$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2(ex-3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x+3}{x-1}\right] = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x-1}{e^{x-1}}\right] = 0 \end{cases}$$

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)e^{-x+1}$.

$$f'(x) = 2e^1 + e^{-x+1} - e^{-x+1}(x+3) = e^{-x+1}\left(\frac{2e^1}{e^{-x+1}} + 1 - x - 3\right) = e^{-x+1}(2e^1 \times e^{x-1} - x - 2)$$

$$= (2e^x - x - 2)e^{-x+1} = -g(x)e^{-x+1}$$

ج/ تعيين دون حساب: $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$: حسب تعريف العدد المشتق فإن :

$$\lim_{h\to0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha)e^{-\alpha+1} = 0$$

تفسير النتيجة هندسيا : المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α مماسا أفقيا معادلته $y = f(\alpha)$

إستنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+1} > 0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$2{,}15$	↗	$+\infty$

❷ أ/ تبيين أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = 2(ex-3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2(ex-3)] = \lim_{x\to+\infty} [(x+3)e^{-x+1}] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x-1}{e^{x-1}}\times\frac{x+3}{x-1}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = 2(ex-3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - 2(ex-3) = (x+3)e^{-x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{-x+1} > 0$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x+3)$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-2(ex-3)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في $A(-3;f(-3))$	(C_f) فوق (D)

ب/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

$$f''(x)=-(2e^x+1)e^{-x+1}-e^{-x+1}[-(2e^x+x+2)]=e^{-x+1}(-2e^x-1+2e^x+x+2)=(x+1)e^{-x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $x=-1$ مغيرة إشارتها ، فإن النقطة $A(-1;f(-1))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

جـ/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث: $-2,4 \prec \beta \prec -2,3$

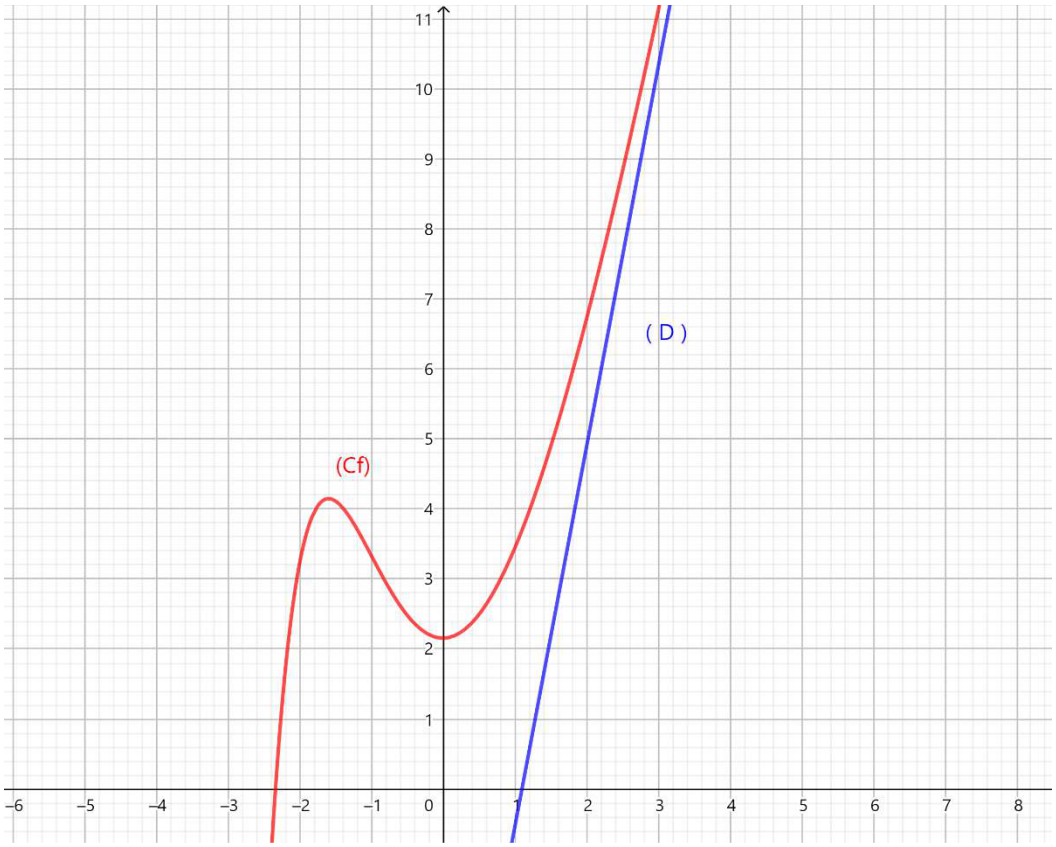
الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-2,4;-2,3]$ ولدينا :

$f(-2,4)=-1,07$
$f(-2,3)=0,47$ ، ومنه $f(-2,4)\times f(-2,4)<0$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث:

$$-2,4 \prec \beta \prec -2,3$$

❸ أنشئ كل من (D)، (C_f) ، نأخذ $f(-3)\simeq -22,31$ ، $f(\alpha)\simeq 4,15$



التمرين 12

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x+1)e^x - 1$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
3. أحسب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(1-e^x)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

   ب/ أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f).
3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$.
4. استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها .
6. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .
7. أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) و (T) .

III- h دالة معرفة على $[-1;1]$ بـ : $h(x) = x(1-e^{|x|})^2$.

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر، ماذا تستنتج ؟
2. بين أن h دالة فردية، ثم استنتج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها .
3. أنشئ منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق .

حل تمرين 12

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} [2xe^x + e^x - 1] = -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [(2x+1)e^x - 1] = +\infty$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 2e^x + e^x(2x+1) = (2+2x+1)e^x = (2x+3)e^x$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^x > 0$ ، ومنه إشارة المشتق من إشارة $(2x+3)$.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \\ 2x+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

	−

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\frac{3}{2}]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-\frac{3}{2};+\infty[$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-1,44$	↗	$+\infty$

❸ حساب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$: $g(0)=(2(0)+1)e^0-1=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=x(1-e^x)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[x(1-e^x)^2]=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(1-e^x)^2]=+\infty$$

❷ أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذ المعادلة : $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}[x(1-e^x)^2-x]=\lim_{x\to-\infty}[x(1+e^{2x}-2e^x)-x]$$
$$\lim_{x\to-\infty}[x+xe^{2x}-2xe^x-x]=\lim_{x\to-\infty}[xe^{2x}-2xe^x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}(2xe^{2x})-2xe^x\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-x=xe^{2x}-2xe^x=xe^x(e^x-2)$

$$f(x)-x=0\Rightarrow\begin{cases}xe^x=0\\e^x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\ln 2\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

❸ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1]$ فإن : $f'(x)=(e^x-1)g(x)$

$$f'(x)=1(1-e^x)^2+2(-e^x)(1-e^x)x=(1-e^x)[1-e^x-2xe^x]$$
$$(1-e^x)[1-(2x+1)e^x]=(e^x-1)[(2x+1)e^x-1]=(e^x-1)g(x)$$

❹ استنتاج إشارة e و $g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها إشارة المشتق من إشارة جداء كل من

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

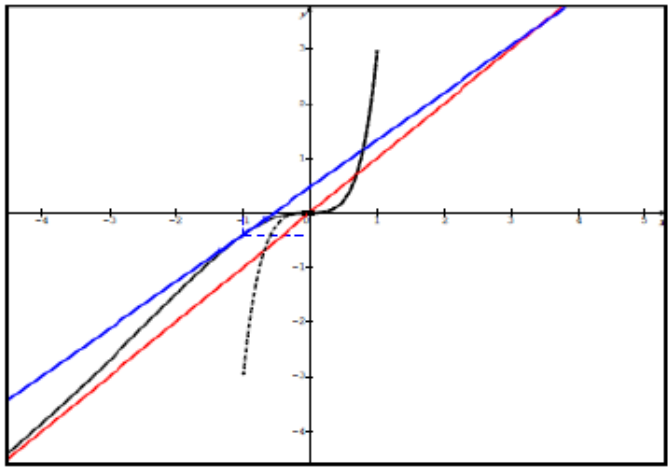
❺ إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها .

لدينا المشتقة الأولى تنعدم عند $x=0$ ولا تغير من إشارتها وبالتالي فإن النقطة $\omega(0;0)$ نقطة إنعطاف لـ (C_f)

❻ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

$$(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$(T): y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$(T): y = (-e^{-2}+1)(x-1)-2(e^{-2}-e^{-1})$$

❼ أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) و (T)



III- h دالة معرفة على $[-1;1]$ بـ : $h(x)=x\left(1-e^{|x|}\right)^2$.

❶ دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر، ماذا تستنتج ؟

$$h(x)=\begin{cases} x(1-e^{x})^2 & ;x\geq 0 \\ x(1-e^{-x})^2 & ;x\leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x(1-e^{x})^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-e^{x})^2=0$$

ومنه الدالة h تقبل الإشتقاق عند 0 من اليمين .

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{x(1-e^{-x})^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}(1-e^{-x})^2=0$$

ومنه الدالة تقبل الإشتقاق عند من اليسار .

بما أن

❷ تبيين أن h دالة فردية

من أجل كل $x \in D_h$ ، و $-x \in D_h$.

$$h(-x) = -x\left(1 - e^{|-x|}\right)^2 = -x\left(1 - e^{|x|}\right)^2 = -h(x)$$

استنتاج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها .

لدينا في المجال $[0;1]$ فإن $|x| = x$ ، ومنه $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن h فردية فإن (C_h) نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة للمبدأ .

❸ أنشئ منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق (الخط المتقطع)

التمرين 13

I- f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

❷ أدرس تغيرات الدالة f .

❸ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ ،ثم أثبت أن $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$.

❹ أكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$.

❺ أحسب $f(x) + f(-x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

❻ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x - 1]$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا .

❼ أنشئ (T) و (C_f) نأخذ $\alpha \simeq 0{,}8$.

❽ هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = x$ ؟ برر إجابتك .

❾ ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1) = me^x$.

II- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x) = -x + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

بين أن $g(x) = f(-x)$ ، ثم أرسم (C_g) .

حل تمرين 13

❶ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[x - \frac{1}{e^x - 1}\right] = +\infty$ ، لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (e^x - 1) = 0^-$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[x - \frac{1}{e^x - 1}\right] = -\infty$ ، لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (e^x - 1) = 0^+$

نستنتج أن المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

❷ دراسة تغيرات الدالة f .

نكمل حساب النهايات : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1}\right] = -\infty$

المشتقة $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

❸ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 2; 1]$ ولدينا :

$f(\ln 2) \times f(1) < 0$ ، ومنه $\begin{cases} f(\ln 2) = -0,3 \\ f(1) = 0,4 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$

إثبات أن $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$.

لدينا $f'(\alpha) = 1 + \frac{e^\alpha}{(e^\alpha-1)^2}$ ……(1) .

ولدينا مما سبق $f(\alpha) = 0$ ، ومنه $\alpha - \frac{1}{e^\alpha-1} = 0$ ، ومنه $\alpha = \frac{1}{e^\alpha-1}$ ، أي $e^\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}$

ومنه $e^\alpha = \frac{1}{\alpha} + 1$ ، ومنه $e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ ……(2)

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{(\frac{\alpha+1}{\alpha} - 1)^2} = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{(\frac{\alpha+1-\alpha}{\alpha})^2} = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{(\frac{1}{\alpha})^2} = 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2}} = 1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} \times \alpha^2 =$$

$$1 + \alpha(\alpha + 1) = 1 + \alpha + \alpha^2$$

وهو المطلوب

❹ كتابة معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$.

$$(T): y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$
$$(T): y = (1 + \alpha + \alpha^2)(x - \alpha) + 0$$
$$(T): y = (1 + \alpha + \alpha^2)x - (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)$$

❺ حساب $f(-x) + f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

أولا نحسب $f(-x)$:

$$f(-x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x - \frac{e^x}{1 - e^x} = -x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

بالتعويض نجد :

$$f(-x) + f(x) = -x + \frac{e^x}{e^x - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1$$

لدينا من جهة : $f(-x) + f(x) = 1$

ومن جهة أخ :

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 1 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

ومنه نستنتج أن النقطة $w\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

6 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x-1]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا

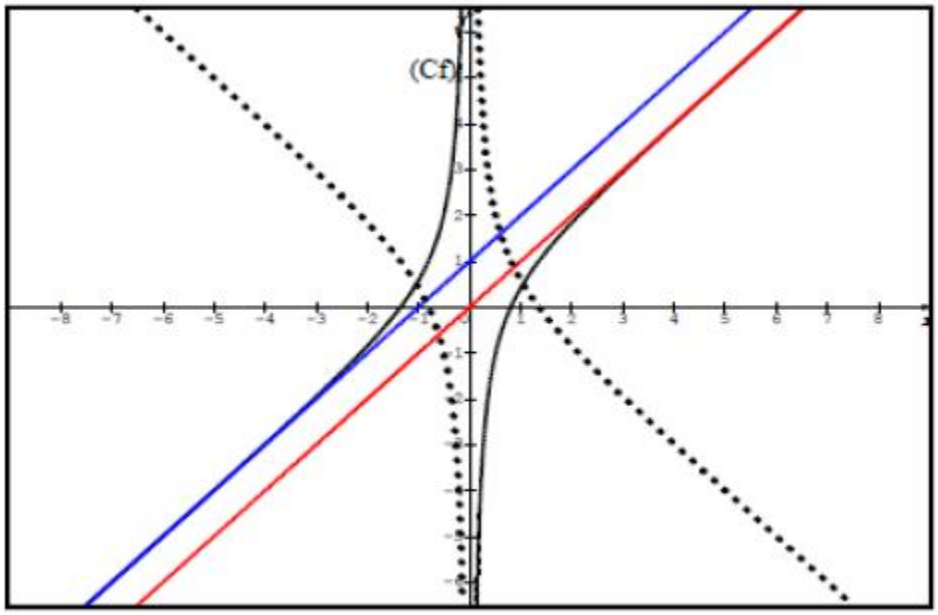
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-1] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-\frac{1}{e^x-1}-x-1\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}-1\right] = 0$$

ومنه المستقيم $y = x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}\right] = 0$$

ومنه المستقيم $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

7 أنشئ (T) و (C_f) نأخذ $\alpha \simeq 0{,}8$



8 هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = x$ ؟ برر إجابتك .

نحل المعادلة $f'(x) \times 1 = -1$ ، أي أن $1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = -1$ ، ومنه $\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = -2$ (مستحيلة)

ومنه لا توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

9 ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1) = me^x$

$$(m-1) = me^x \Rightarrow m - me^x = 1 \Rightarrow m(1-e^x) = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{1-e^x} \Rightarrow m = -\frac{1}{e^x-1}$$

$$x + m = x - \frac{1}{e^x-1} \Rightarrow f(x) = x + m$$

ومنه حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y = x+m$.

- $m \in]-\infty;0[$ ، للمعادلة حل وحيد موجب .
- $m \in [0;1]$ ، لا توجد حلول .
- $\infty[$ ، للمعادلة حل وحيد سالب .

II- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x) = -x + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

بين أن $g(x) = f(-x)$ ، ثم أرسم (C_g) .

$$f(-x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -x - \frac{e^x}{1 - e^x} = -x + \frac{e^x}{e^x - 1} = g(x)$$

وهو المطلوب .

(C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .

التمرين 14

1. g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 e^x$.

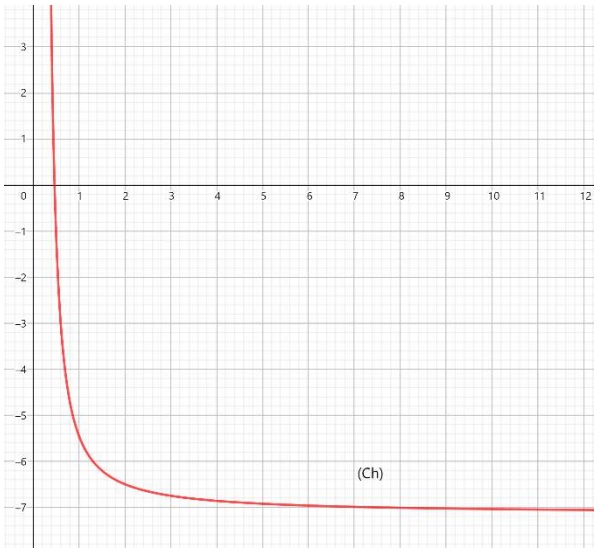
أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

h دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$ ، (C_h) تمثيلها البياني **(أنظر الملحق)** .



أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.

$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

جـ/ شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$.

3. أ/ بين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$

تقبل حلين α و β حيث: $1{,}5 < \beta < 1{,}6$

و $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h)

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

5. أ/ أرسم (T) و(C_f)

ب/ m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E) \ldots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x) = 2xe^x + e^x \times x^2 = (x^2+2x)e^x$$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ فإن $x^2+2x > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ب/ استنتاج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

- إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x < \frac{1}{x}$ ، وبما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$.
- إذا كان $x > 1$ فإن $x > \frac{1}{x}$ ، وبما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

❷ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (x^2-2x+2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$.

أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

بما أن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x^2-2x+2)e^x = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} - 3e = +\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

بما أن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-2x+2)e^x = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} - 3e = 1-3e \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x+2) - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = e^x(2x-2+x^2-2x+2) - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= x^2e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

حساب $f'(1)$. $f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$

جـ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا مما سبق إذا كان $0 < x < 1$ ، فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ ومنه $g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ ومنه $f'(x) < 0$.

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$.

لدينا مما سبق إذا كان $x > 1$ ، فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ومنه $g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$.

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

❸ أ/ تبيين أن المعادلة : $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1,5<\beta<1,6$ و $0,5<\alpha<0,6$

المعادلة : $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0,5;0,6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} f(0,5)=1,25 \\ f(0,6)=-0,74 \end{cases} \Rightarrow f(0,5)\times f(0,6)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,5<\alpha<0,6$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,5;1,6]$ ولدينا :

$$\begin{cases} f(1,5)=-0,6 \\ f(1,6)=0,44 \end{cases} \Rightarrow f(1,5)\times f(1,6)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1.5<\beta<1.6$

ومنه المعادلة : $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1,5<\beta<1,6$ و $0,5<\alpha<0,6$

استنتاج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

بما أن $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β .

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

يكفي أن ندرس إشارة الفرق : $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

بما أن $e^x>0$ ، فإن إشارة الفرق من إشارة (x^2-2x+2)

$$x^2-2x+2=0 \quad \Rightarrow \Delta=-4<0$$

ومنه المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ وإشارتها من إشارة a وبما أن $a=1>0$ فإن $x^2-2x+2>0$

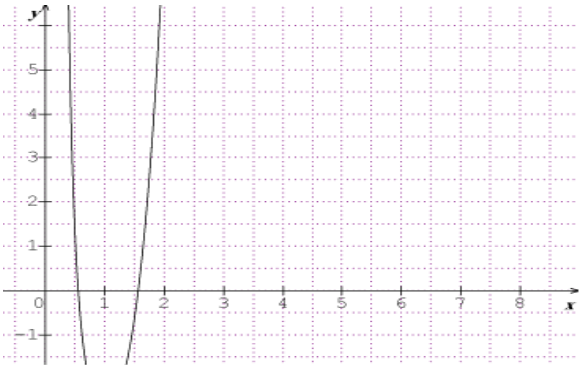
ومنه نستنتج أن (C_f) يقع فوق (C_h) .

❹ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

بما أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة فاصلتها من المجال $]0;+\infty[$.

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(T): y=0(x-1)-\mathrm{e}$$
$$(T): y=-\mathrm{e}$$

❺ أ/ أرسم (T) و(C_f)



ب/ m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ $f(x) = f(m)$

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا .

ومنه المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

التمرين 15

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

1. أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geqslant 0$ ، استنتج أن: $\mathrm{e}^{-x} + x \leqslant 1$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. فسر النتيجتين بيانيا .
3. أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(1+x)}{(\mathrm{e}^{-x}+x)^2}$.

ب/ أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
5. أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x - f(x)$.

ب/ استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

6. أنشئ (Δ) و (C_f) .
7. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$.

حل تمرين 15

1. حساب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 1$

$g'(x) \geq 0$ يكافئ $-\mathrm{e}^{-x} + 1 \geq 0$ يكافئ $-\mathrm{e}^{-x} \geq -1$ يكافئ $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$ يكافئ $-x \leq 0$ يكافئ $x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗	

❷ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geqslant 0$ ، استنتج أن: $e^{-x} + x \geqslant 1$.

نلاحظ من جدول التغيرات أن 0 هي قيمة حدية صغرى لـ g ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) \geq 0$

ومنه $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ وعليه $e^{-x} + x \geqslant 1$

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}} = \frac{1}{\frac{xe^x+1}{xe^x}} = \frac{xe^x}{xe^x+1} = \frac{xe^x}{e^x(x+\frac{1}{e^x})} = \frac{x}{x+\frac{1}{e^x}} = \frac{x}{e^{-x}+x} = f(x)$$

❷ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. فسر النتيجتين بيانيا .

بما أن $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(xe^x) = 0^- \\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{xe^x}\right) = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right) = 0 \end{cases}$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

بما أن $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{xe^x}\right) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}\right) = 1 \end{cases}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

❸ أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1(e^{-x}+x) - (-e^{-x}+x)\times x}{(e^{-x}+x)^2} = \frac{e^{-x}+x+xe^{-x}-x}{(e^{-x}+x)^2} = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^{-x}+x)^2 > 0$ و $e^{-x} > 0$ ، فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+x)$.

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{1}{1-e}$	↗	1

❹ كتابة معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 1(x-0) + 0$$
$$y = x$$

❺ أ/ التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x - f(x)$.

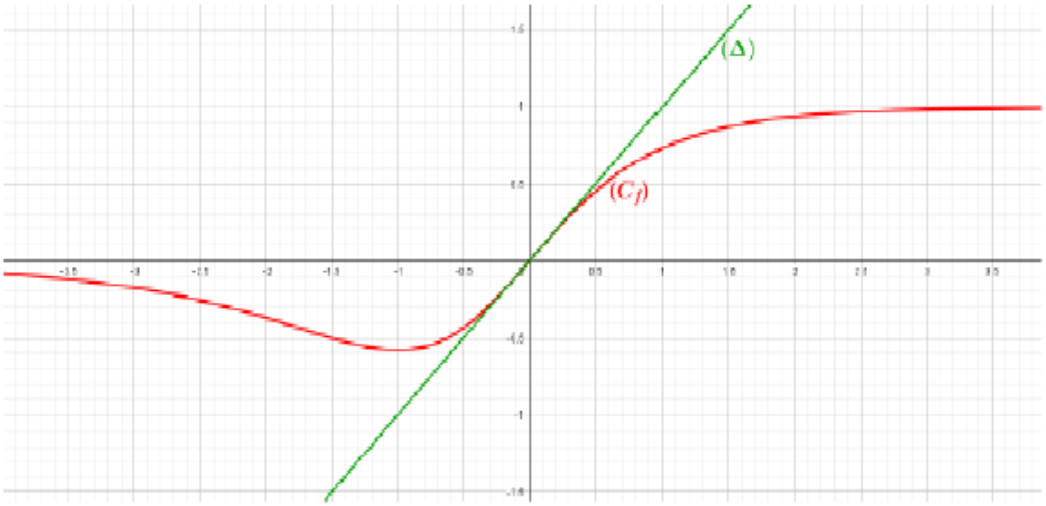
$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x}+x} = \frac{xe^{-x}+x^2-x}{e^{-x}+x} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x+1-1} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

بما أن $g(x) \geq 0$ ، فإن $g(x)+1 \geq 1$ ومنه $g(x)+1 > 0$ ومنه نستنتج أن إشارة الفرق من إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
		0	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $A(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	

❻ أنشئ (Δ) و (C_f)



❼ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$.

$\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$ يكافئ $\frac{xe^x}{xe^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=m+1$ يكافئ $\frac{x}{e^{-x}+x}=m+1$ يكافئ $f(x)=m+1$

ومنه حلول المعادلة هيا فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m+1$.

قيم $m+1$	قيم m	المناقشة
$(m+1)\in\left]-\infty;\frac{1}{1-e}\right[$	$m\in\left]-\infty;\frac{1}{1-e}-1\right[$	لا يوجد حلول .
$m+1=\frac{1}{1-e}$	$m=\frac{1}{1-e}-1$	للمعادلة حل وحيد سالب .
$(m+1)\in\left]\frac{1}{1-e};0\right[$	$m\in\left]\frac{1}{1-e}-1;-1\right[$	للمعادلة حلين سالبين .
$m+1=0$	$m=-1$	للمعادلة حلا وحيدا معدوما .
$(m+1)\in]0;1[$	$m\in]-1;0[$	للمعادلة حل وحيدا موجبا .
$(m+1)\in]1;+\infty[$	$m\in]0;+\infty[$	لا يوجد حلول

التمرين 16

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$.

ب/ أحسب نهايتي (C_f) .

جـ/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

❷ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D′) الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مقارب مائل لـ (C_f)

جـ/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D′) .

❸ أدرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .

❹ ارسم (C_f) ، (D) و (D′)

❺ ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1-m)$ حيث m وسيط حقيقي .

أ/ بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2 ; \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (C_f) .

حل تمرين 16

❶ أ/ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

$$\ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(\frac{1 + 2e^{-2x}}{e^{-x}}\right) = \ln(1 + 2e^{-2x}) - \ln e^{-x} = \ln(1 + 2e^{-2x}) + x = f(x)$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

جـ/ دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x})$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $2e^{-2x} > 0$ ، يكافئ $1 + 2e^{-2x} > 1$ يكافئ $\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$

ومنه $f(x) - x > 0$ ومنه من أجل عدد حقيقي x فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D) .

❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

$$\ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^x + \frac{2}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 2}{e^x}\right) = \ln(e^{2x} + 2) - \ln(e^x) = \ln(e^{2x} + 2) - x$$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D′) الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مقارب مائل لـ (C_f) .

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2 + e^{2x}) = \ln 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-x + \ln 2)] = \lim_{x\to-\infty}[-x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2)]$$

جـ/ دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D') .

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln(2+e^{2x})-\ln 2=\ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ ، يكافئ $1+\frac{1}{2}e^{2x}>1$ يكافئ $\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)>0$

ومنه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D')

❸ دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^{2x}-2}{e^{2x}+2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x}+2>0$ وعليه إشارة المشتق من إشارة البسط .

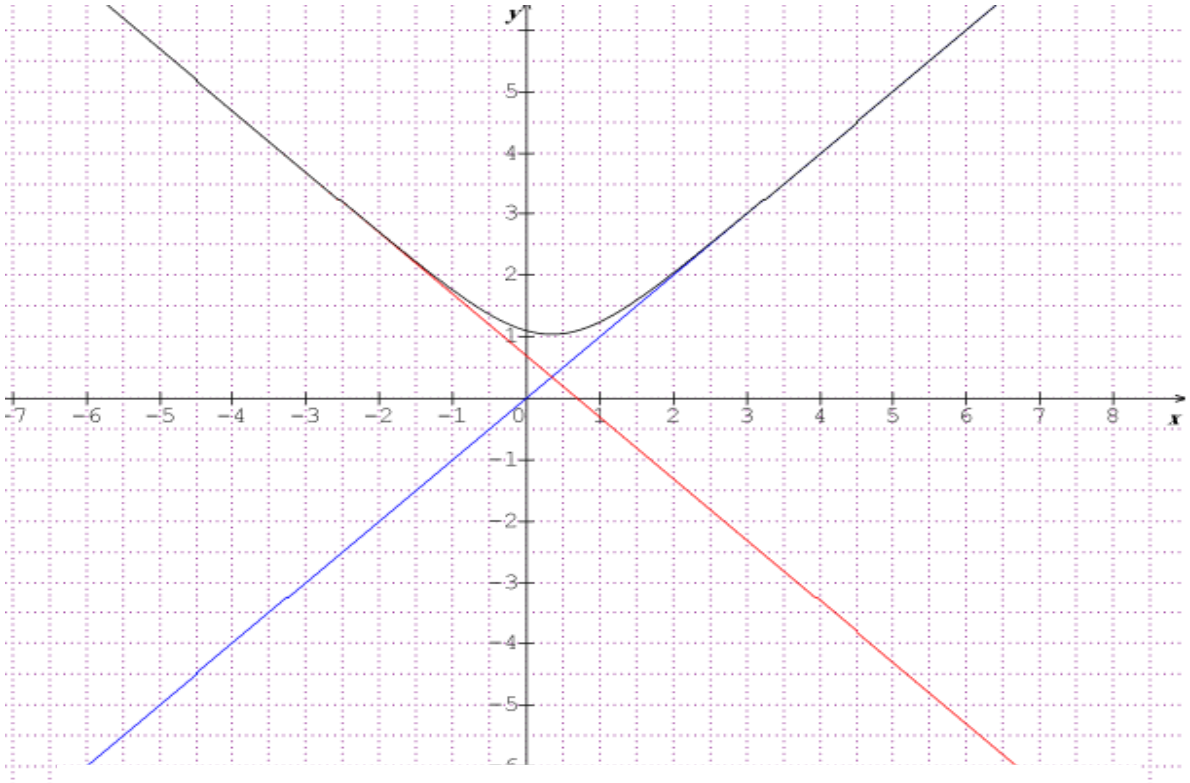
$e^{2x}-2\geq 0$ معناه $e^{2x}\geq 2$ معناه $2x\geq\ln 2$ معناه $x\geq\frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

❹ ارسم (C_f) ، (D) و (D')



❺ ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1-m)$ حيث m وسيط حقيقي .

أ/ تبيين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2 ; \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

من أجل كل عدد حقيقي m لدينا : $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1-m)$ يكافئ $y - mx - \frac{\ln 2}{2}(1-m) = 0$

يكافئ $y - mx - \frac{\ln 2}{2} + m\frac{\ln 2}{2} = 0$ يكافئ $(y - \frac{\ln 2}{2}) - m(x - \frac{\ln 2}{2}) = 0$

$$\begin{cases} y = \frac{\ln 2}{2} \\ x = \frac{\ln 2}{2} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} y - \frac{\ln 2}{2} = 0 \\ x - \frac{\ln 2}{2} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

ومنه جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2 ; \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (C_f)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع (Δ_m) .

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حلا وحيدا .

إذا كان $m \in [-1; 1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن للمعادلة حلا وحيدا .

التمرين 19 أشبال الأمة

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$.

❶ أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

❷ شكل جدول تغيرات g ، ثم علل وجود عدد حقيقي α حيث : $-0{,}38 < \alpha < -0{,}36$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

❸ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ أ/ بين أنه من أجل كل من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

ب/ بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

❸ بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين إحداثيتها .

❹ أ/ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = 2x + 1$ بجوار $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ) .

جـ/ أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $]-5ة1; +\infty[$ يعطى $f(-1{,}5) = 4{,}72$

❺ لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = f(x^2e^x)$.

باستعمال مشتق دالة مركبة. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

حل التمرين 19

❶ حساب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x\to-\infty}[(x-1)e^{-x}+2]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[(x-1)e^{-x}+2]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{e^x}+2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+2\right]=2$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$g'(x)=1e^{-x}-e^{-x}(x-1)=(1-x+1)e^{-x}=(-x+2)e^{-x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x}>0$ ومنه إشارة المشتق من إشارة $(-x+2)$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2+e^{-2}$	↘	2

❷ جدول تغيرات g ، ثم علل وجود عدد حقيقي α حيث : $-0.38<\alpha<-0.36$ يحقق: $g(\alpha)=0$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-0{,}38;-0{,}36]$ ولدينا :

$$\begin{cases}g(-0{,}38)=-0{,}02\\ g(-0{,}36)=0{,}05\end{cases}\Rightarrow g(-0{,}38)\times g(-0{,}36)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي α حيث : $-0.38<\alpha<-0.36$ يحقق: $g(\alpha)=0$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[2x+1-xe^{-x}]=+\infty$$

❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هيا :

$$f'(x)=2-e^{-x}-e^{-x}(-x)=2+(-1+x)e^{-x}=(x-1)e^{-x}+2=g(x)$$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

ب/ تبيين أن $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$.

$$f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha} \dots\dots\dots(1)$$

لدينا مما سبق $g(\alpha)=0$ ومنه $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ ، ومنه $e^{-\alpha}=\frac{-2}{\alpha-1}$ ……..(2)

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha\left(\frac{-2}{\alpha-1}\right)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=2\alpha+1+\frac{2\alpha-2+2}{\alpha-1}$$

$$=2\alpha+1+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha-1}+\frac{2}{\alpha-1}=2\alpha+1+2+\frac{2}{\alpha-1}=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$$

✍ إيجاد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $-0{,}38<\alpha<-0{,}36$ ، أي أن $2{,}24<2\alpha+3<2{,}28$

لدينا $-0{,}38<\alpha<-0{,}36$ ، أي أن $\frac{2}{-1{,}36}<\frac{2}{\alpha-1}<\frac{2}{-1{,}38}$

ومنه بالجمع نجد $0{,}77<f(\alpha)<0{,}83$

❸ تبيين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين إحداثيتها .

لدينا $f'(x)=g(x)$ أي أن $f''(x)=g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن المشتق الثاني $f''(x)$ إنعدم عند $x=2$ وغير من إشارته فإن النقطة $(2;f(2))$ نقطة إنعطاف لـ (C_f) .

❹ أ/ تبيين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=2x+1$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim_{x\to+\infty}[-xe^{-x}]=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta):y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

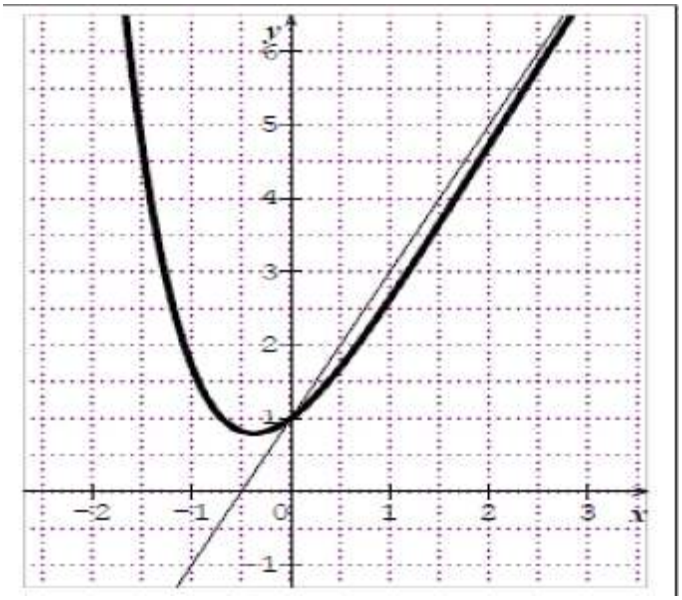
ب/ ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$

بما أن $e^{-x}>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $-x$ ومنه .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(2x+1)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق	(C_f) يقطع (Δ) في $A(0;1)$	(C_f) تحت

جـ/ أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $]-1{,}5;+\infty[$ يعطى $f(-1{,}5) = 4{,}72$.



❺ لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = f(x^2e^x)$.

باستعمال مشتق دالة مركبة. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

$$h(x) = f(x^2e^x)$$

$$h'(x) = (x^2e^x)' \times f'(x^2e^x) = (x^2 + 2x)e^x \times f'(x^2e^x)$$

لدينا $f'(x) = g(x)$ أي أن $f'(x^2e^x) = g(x^2e^x)$ ومنه

$$h'(x) = (x^2 + 2x)e^x \times g(x^2e^x)$$

بما أن $g(x^2e^x) > 0$ (لاحظ جدول إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$) .

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $h'(x)$ من إشارة $x^2 + 2x$ ومنه :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	$h(-2)$	↘	1	↗	$+\infty$