

سنة **ثالثة** ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | تقني رياضي | رياضيات

سلسلة تمارين رقم [00]

حول:

النهايات ودراسة الدوال

[مع حلول مقترحة]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

التمرين 01 :

من أجل دالة f، احسب النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$ ❷ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)$

❸ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$ ❹ $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$

❺ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$ ❻ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

❼ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$ ❽ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x}+\dfrac{3x+1}{x^2+x}\right)$

❾ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

حل التمرين 01 :

حساب النهايات:

❶ $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)=\dfrac{\sqrt{4}}{1-4}$

$=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

---

❷ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{(2-x)(2+x)}{x-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{-(x-2)(2+x)}{x-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\big(-(2+x)\big)$

$=-(2+2)$

$=\boxed{-4}$

---

❸ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-2)(x-1)}{1-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-(x-2)(1-x)}{1-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\big(-(x-2)\big)$

$=-(1-2)$

$=\boxed{1}$

❹ $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)=\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}\right)$

$=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$

$=\boxed{\dfrac{1}{6}}$

---

❺ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\dfrac{1^2+1}{|1^2-1|+1}$

$=\boxed{2}$

---

❻ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\dfrac{0^2+0}{|0^2-1|+1}$

$=\dfrac{0}{2}$

$=\boxed{0}$

---

❼ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\dfrac{(-1)^2+(-1)}{|(-1)^2-1|+1}$

$=\dfrac{0}{1}$

$=\boxed{0}$

---

❽ $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x}+\dfrac{3x+1}{x^2+x}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{2}$

$=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

---

❾ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

$=\sqrt{1^2-1}+\sqrt{1^2-3+2}$

$=\boxed{0}$

التمرين 02 :

عيّن النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3$

❹ $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+3}}\right)$

❻ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

❼ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x-1}\right)$

❽ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)$

حل التمرين 02 :

تعيين النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=\boxed{+\infty}$

لأنّ:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\sqrt{x-1}\right)=0^+$

❷ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)=\boxed{+\infty}$

لأنّ:

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{0^+}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}((x-3)^2)=0^+$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3=\boxed{+\infty}$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

❹ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)=\dfrac{0}{0}$ (ح.ع.ت)

إزالة حالة عدم تعيين:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)&=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)\\&=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)\\&=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)\\&=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)\\&=\boxed{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

---

❺ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x}{x+3}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x}{x}}\right)$$
$$=\boxed{\sqrt{2}}$$

---

❻ $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)\\&=\boxed{0}\end{aligned}$$

---

❼ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos x}{x-1}\right)=0$

لأنّ:

$$-1\le\cos x\le 1$$

---

❽ $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{\sin x}{x}\right)&=\lim_{x\to-\infty}(3x)\\&=-\infty\end{aligned}$$

لأن:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0 \text{ و } -1\le\sin x\le 1$$

التمرين 03 :

برهن أنّ المنحني الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$
2. $f(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$ ، $I=]-\infty;0[$
3. $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$ ، $I=]1;+\infty[$
4. $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}$ ، $I=]-\infty;-2[$
5. $f(x)=\dfrac{-x+1}{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$
6. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

حل التمرين 03 :

1. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=2$

---

2. لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=2$

وآخر مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=0$

---

3. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{-x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{2x}{1-x}\right)=-\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=-2$

وآخر مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=1$

4 لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right)=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=+\infty \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=1$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=-2$

---

5 لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x+1}{x^2+1}\right)=0 \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$

---

6 لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=0 \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$

التمرين 04:

برهن أنّ المستقيم (D) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

1 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x$

---

2 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ، $I=]-\infty;-1[$ ، $D: y=x-1$

---

3 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x+4$

---

4 $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$ ، $D: y=x+2$

حل التمرين 04:

1 لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{x^2 - 1}{x} - x \\ &= \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} \\ &= \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	$\|\|$	$-$	
الوضعية	(D) فوق (C_f)	$\|\|$	(D) تحت (C_f)	

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

---

❷ لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - (x-1)\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - (x-1)(x+1)}{x+1}\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - x^2 + 1}{x+1}\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضعية	(D) تحت (C_f)	$\|\|$	(D) فوق (C_f)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

---

❸ لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x-2}-(x+4)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-(x+4)(x-2)}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-x^2+2x-4x+8}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{11}{x-2}\right)$$
$$=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+4$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{11}{x-2}=0\Rightarrow x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
الوضعية	(D) تحت (C_f)		(D) فوق (C_f)

ومنه (C_f) فوق (D) في المجال I

---

4 لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1}{x^2}-(x+2)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1-x^2(x+2)}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-1-x^3-2x^2}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية:

لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=0\Rightarrow x\neq 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضعية	(D) فوق (C_f)		(D) تحت (C_f)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

التمرين 05 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
2. اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث: a، b و c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

3. استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)
4. حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل.
5. مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحني (C_f) .

حل التمرين 05 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x)$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = +\infty$

لأنّ:

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x + 1) = 0^-$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x^2+x-3}{0^-} \right) = +\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x)$

$$= +\infty$$

❷ اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
$$= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$
$$= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$
$$= \frac{ax^2 + x(a+b) + b + c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

أي:

$$f(x) = x - \frac{3}{x+1}$$

- استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

بما أنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = -\infty$

فإنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$

ولدينا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{3}{x+1} - x\right)$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1}\right)$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$.

❸ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$f(x) - x = \frac{-3}{x+1} \Rightarrow f(x) - x = \frac{3}{-x-1}$$
$$\Rightarrow -x - 1 \neq 0$$
$$\Rightarrow x \neq -1$$

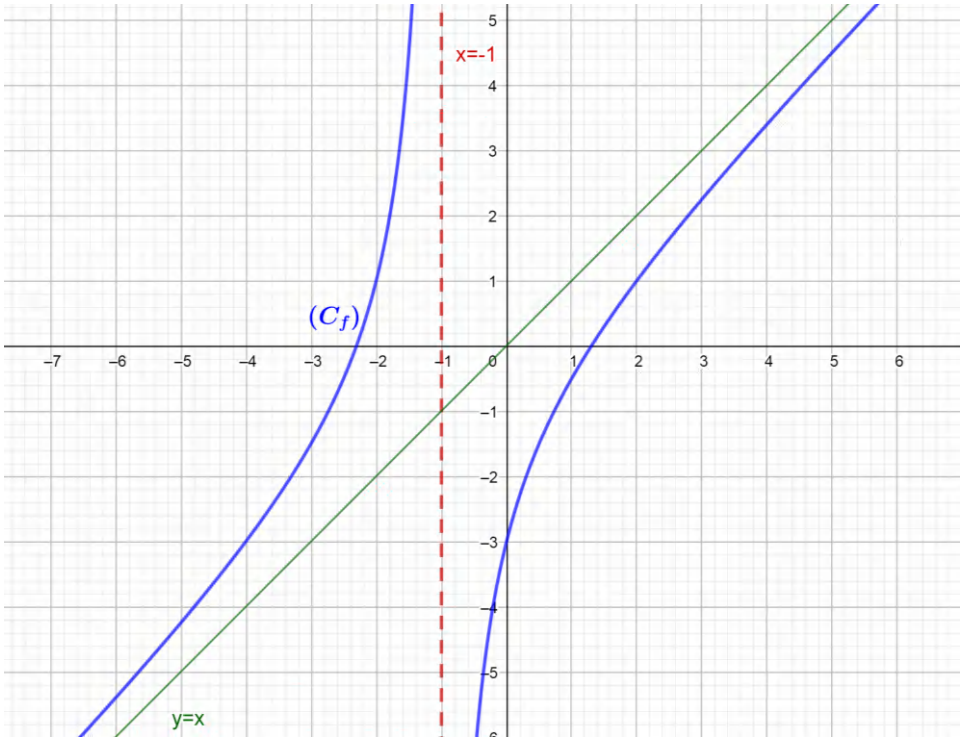
ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

❹ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 06 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$، وليكن ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

❷ عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.

❸ برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

❹ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

❺ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

❻ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$.

حل التمرين 06 :

❶ دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)\right)$$
$$=-\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-4)=+\infty$$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x)=3x^2+6x$$

لدينا:

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+6x=0$$
$$\Rightarrow 3x(x+2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ \text{أو} \\ x+2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=-2 \end{cases}$$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

❷ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:



لتعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$.
- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب نقوم بحساب $f(0)$.

- مع محور الفواصل:

$$f(x)=0\Rightarrow x^3+3x^2-4=0$$

لدينا:

$$f(1)=1^3+3(1)^2-4=0$$

نلاحظ أنّ 1 حل للمعادلة $f(x)=0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x)=x^3+3x^2-4\Rightarrow f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$$
$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a-1=3 \\ b-a=0 \\ -b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = (x-1)(x^2+4x+4)$$

ومنه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x^2+4x+4=0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ ومنه: $x=1$

ولدينا: $x^2+4x+4=0$: لحلها نستعمل المميز Δ:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ أي $x-2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور التراتيب:

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0; -4)$

❸ برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :



نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha+x) \in D_f \\ (\alpha-x) \in D_f \\ f(\alpha+x) + f(\alpha-x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha-x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

لدينا:

$x \in \mathbb{R}$ معناه: $-\infty < x < +\infty$ معناه: $-\infty < -x < +\infty$ معناه $-\infty < \underbrace{2(-1)-x}_{2\alpha-x} < +\infty$

$(2(-1)-x) \in \mathbb{R}$ معناه

ولدينا:

$$
\begin{aligned}
f(2(-1)-x)+f(x) &= (-2-x)^3+3(-2-x)^2-4+x^3+3x^2-4\\
&= -(-2-x)^2(2+x)+3(2+x)^2-8+x^3+3x^2\\
&= -(4+x^2+4x)(2+x)+12+3x^2+12x-8+x^3+3x^2\\
&= -8-4x-2x^2-x^3-8x-4x^2+4+6x^2+12x+x^3\\
&= -4\\
&= 2(-2)
\end{aligned}
$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

❹ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

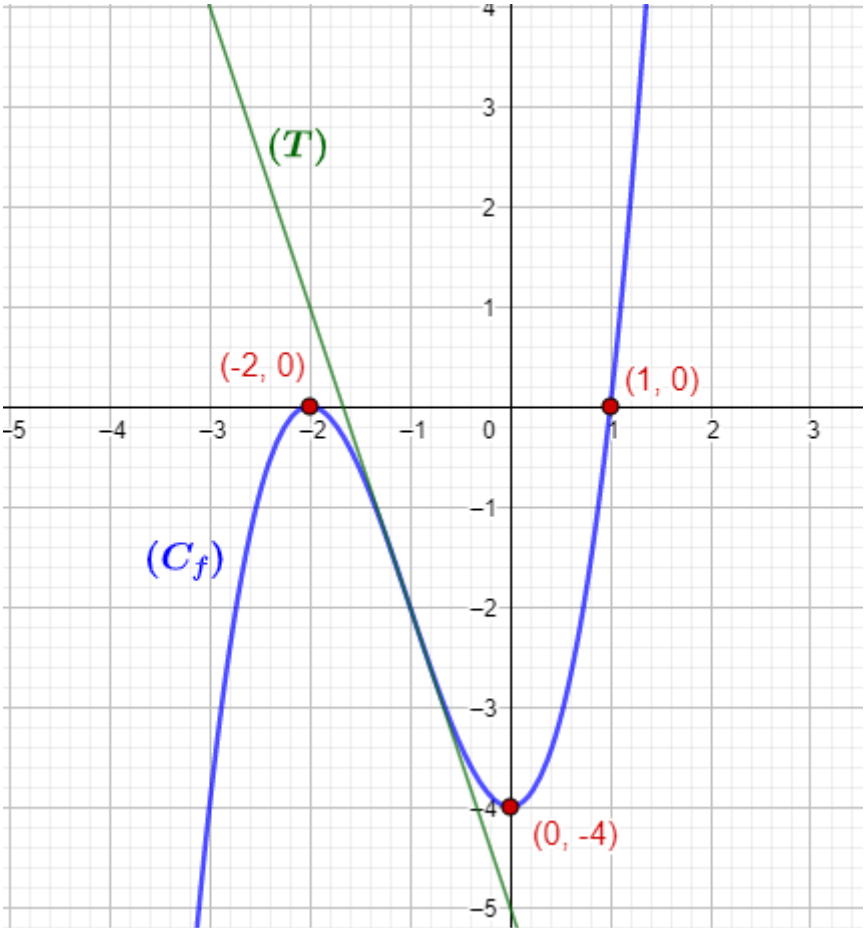
$$
\begin{aligned}
(T): y &= f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)\\
(T): y &= \big(3(-1)^2+6(-1)\big)(x+1)+(-1)^3+3(-1)^2-4\\
(T): y &= -3x-3-2\\
(T): y &= -3x-5
\end{aligned}
$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y=-3x-5$.

❺ التمثيل البياني كل من (T) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الاحداثيات.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y=-3x-5$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



❻ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0 \Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما	$m < -4$	أي	$x < -4$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما	$m = -4$	أي	$x = -4$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر مضاعف
لما	$-4 < m < 0$	أي	$-4 < x < 0$	المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب
لما	$m = 0$	أي	$x = 0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب
لما	$m > 0$	أي	$x > 0$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

التمرين 07:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$

حيث a و b ، و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ عين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

❷ نفرض أنّ $a = -1$ ، $b = 1$:

أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.

ج/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

د/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ).

ه/ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

حل التمرين 07:

❶ تعيين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 :

الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناه:

$$\begin{cases} f(3) = -8 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$f'(x) = x^2 + 2ax - 3$$

ومنه:

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + 2a(3) - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 6a = -6$$
$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

و لدينا:

$$f(3) = -8 \Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + a(3)^2 - 3(3) + b = -8$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + (-1)(3)^2 - 3(3) + b = -8$$
$$\Rightarrow 9 - 9 + 9 + b = -8$$
$$\Rightarrow \boxed{b = 1}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

❷ نفرض أنّ $a = -1$ ، $b = 1$:

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

- تعيين النهايات:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right)$
$$= -\infty$$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) = +\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$

ومنه:

$$x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3$$

أو

$$\left| x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1 \right.$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي : $s = \{-1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{8}{3}$	↘	-8	↗	$+\infty$

-

ب/ حساب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$:

- $f(5) = \frac{1}{3}(5)^3 - (5)^2 - 3(5) + 1 = \frac{8}{3}$
- $f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
- $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = \frac{8}{3}$
- $f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 1 = \frac{1}{3}$

ج/ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$(T): y = (1^2 - 2(1) - 3)(x-1) - \frac{8}{3}$$
$$(T): y = -4x + 4 - \frac{8}{3}$$
$$(T): y = -4x + \frac{4}{3}$$

ومنه معادلة المماس (Δ) هي: $y = -4x + \frac{4}{3}$.

د/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ):

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 + 4x - \frac{4}{3}$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$
$$= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma$$
$$= \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta - \alpha = -1 \\ \gamma - \beta = 1 \\ -\gamma = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} &= (x-1)\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(x-1)^2 \\ &= \frac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

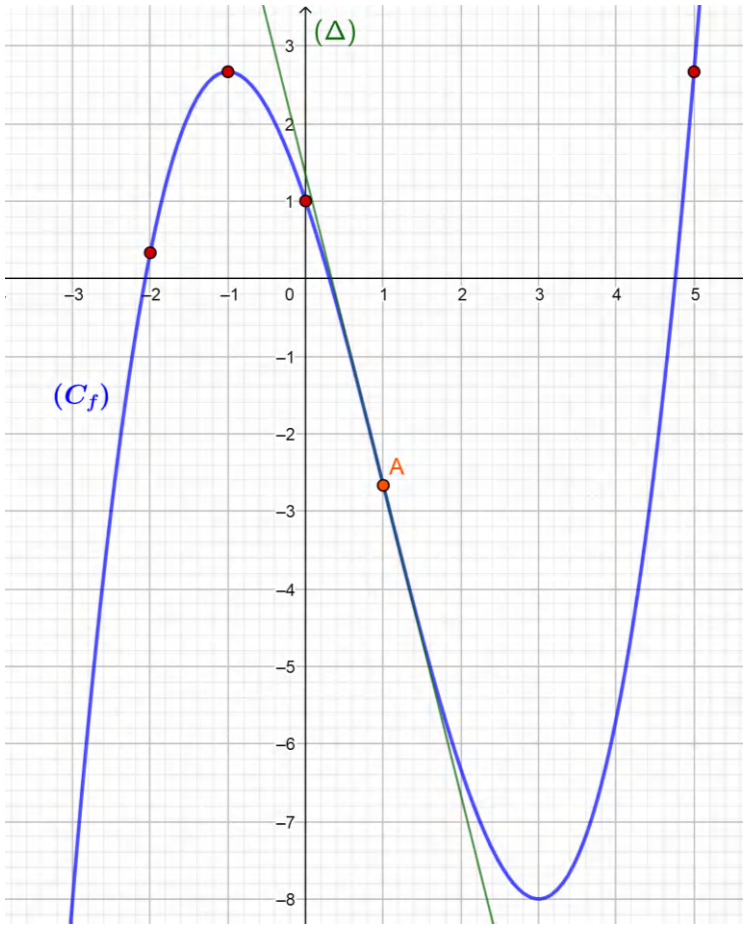
ومنه الوضعية النسبية:

- (C_f) فوق Δ لما: $x \in]1; +\infty[$.
- (C_f) يقطع Δ لما: في النقطة A ذات الاحداثيات $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$
- (C_f) تحت Δ لما: $x \in]-\infty; 1[$.

ه/ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعيّن بعض النقط المساعدة $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ و $f(5)$.
- نعيّن النقطة A نقطة تقاطع المنحني (C_f) والمماس (Δ)
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -4x + \frac{4}{3}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



التمرين 08 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.
2. ادرس تغيرات الدالة f.
3. اثبت أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2).
4. مثّل بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ، ثم المنحني (C_f) .
5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) + 3x - m = 0$.
6. g دالة معرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$:

أ/ بين أنّ الدالة g زوجية.

ب/ ادرس قابلية اشتقاق g عند 0.

ج/ بيّن أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم مثّل بيانيا (C_g) في المعلم السابق.

حل التمرين 08 :

❶ تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c:

لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3. معناه:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c-(x-3)(x-2)}{x-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c-x^2+2x+3x-6}{x-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a-1)x^2+(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0$$

هذه النهاية لا تحقق إلا إذا كان: $(a-1=0)$ ومنه $\boxed{a=1}$

وعليه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(b+5)=0$$

$$\Rightarrow b+5=0$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-5}$$

لدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2ax^2-4ax+bx-2b-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$$

ومنه:

$$f'(3)=0 \Rightarrow \frac{a(3)^2-4a(3)-2b-c}{\left((3)-2\right)^2}=0$$

$$\Rightarrow 9a-12a-2b-c=0$$

بتعويض قيمة a و b نجد:

$$\Rightarrow -3(1) - 2(-5) - c = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f:

- تعيين النهايات:

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x)$
$= -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = -\infty$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x - 2) = 0^- \text{ و } \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(\frac{6}{0^-} \right) = -\infty$$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = +\infty$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} (x - 2) = 0^+ \text{ و } \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{6}{0^+} \right) = +\infty$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right) = +\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2}$$
$$= \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x - 2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

لحل المعادلة السابقة نستعمل المميز Δ:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

ومنه:

$$x = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

أو

$$\left\lfloor x = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1 \right.$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي: $s = \{1; 3\}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘		↘	1	↗	$+\infty$

❸ اثبات أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3):

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) معناه أنّ المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل حلان:

لدينا:

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = -3$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 + 3(x-2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 + 3x^2 + 12 - 12x = 0$$
$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

نحسب المميز Δ ونستخرج الحلين، فنجد: $\Delta = 16$ ومنه:

$$x_2 = \frac{5}{2} \quad ; \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad ; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

إذن احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 مع المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب:

$$M_2\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad ; \quad M_1\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

ولدينا:

$$(D_1): y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(D_1): = \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 3}{\left(\left(\frac{3}{2}\right) - 2\right)^2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 7}{\left(\frac{3}{2}\right) - 2}$$

$$(D_1): = -3x + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}$$

$$(D_1): = -3x + 1$$

$$(D_2): y = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \left(\frac{5}{2}\right)\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$(D_2): y = -3x + \frac{15}{2} + \frac{3}{2}$$

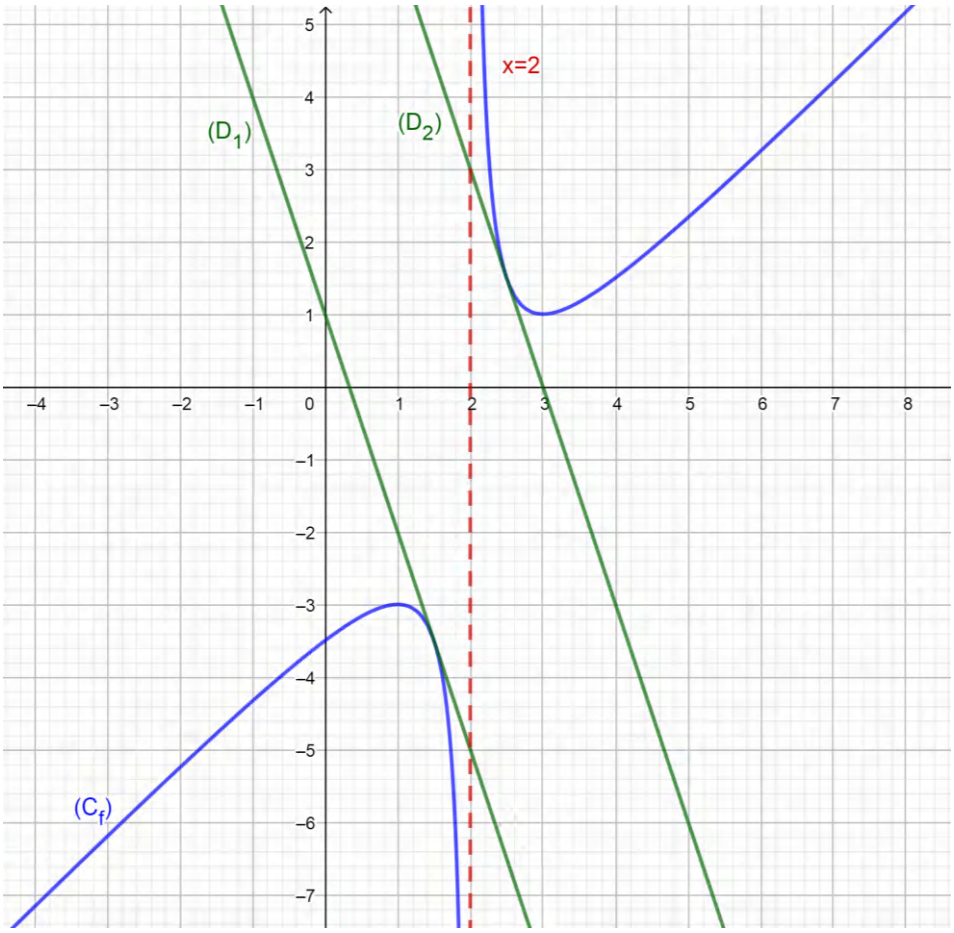
$$(D_2): y = -3x + 9$$

ومنه معادلتي المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب: $y_{(D_1)} = -3x + 1$ و $y_{(D_2)} = -3x + 9$

❹ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب ذو المعادلة $x = 2$
- نرسم المماسين (D_1) و (D_2).
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



5 المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذو المعادلة $y_m = -3x + m$

ومنه:

لما	$m < 1$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر موجب
لما	$m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما	$1 < m < 9$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = 9$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
لما	$m > 9$	المعادلة تقبل حلان موجبان

6

أ/ تبيين أنّ الدالة g زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ دراسة قابلية اشتقاق g عند 0:

لدينا:

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{\frac{|x|^2-5|x|+7}{|x|-2}+\frac{7}{2}}{x-0}\right)$$
$$=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}+\frac{7}{2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{2x^2-10x+14+7x-14}{x(2x-4)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{x(2x-3)}{x(2x-4)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{2x-3}{2x-4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

ولدينا:

- $$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{\frac{|x|^2-5|x|+7}{|x|-2}+\frac{7}{2}}{x-0}\right)$$

$$=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{\frac{(-x)^2-5(-x)+7}{(-x)-2}+\frac{7}{2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{\frac{x^2+5x+7}{-x-2}+\frac{7}{2}}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{2x^2+10x+14-7x-14}{-2x(x+2)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{x(2x+3)}{-2x(x+2)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{2x+3}{-2(x+2)}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}$$

بما أن:

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)\neq\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)$$

فالدالة g لا تقبل الاشتقاق عند 0

ج/ تبيين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) :

لدينا:

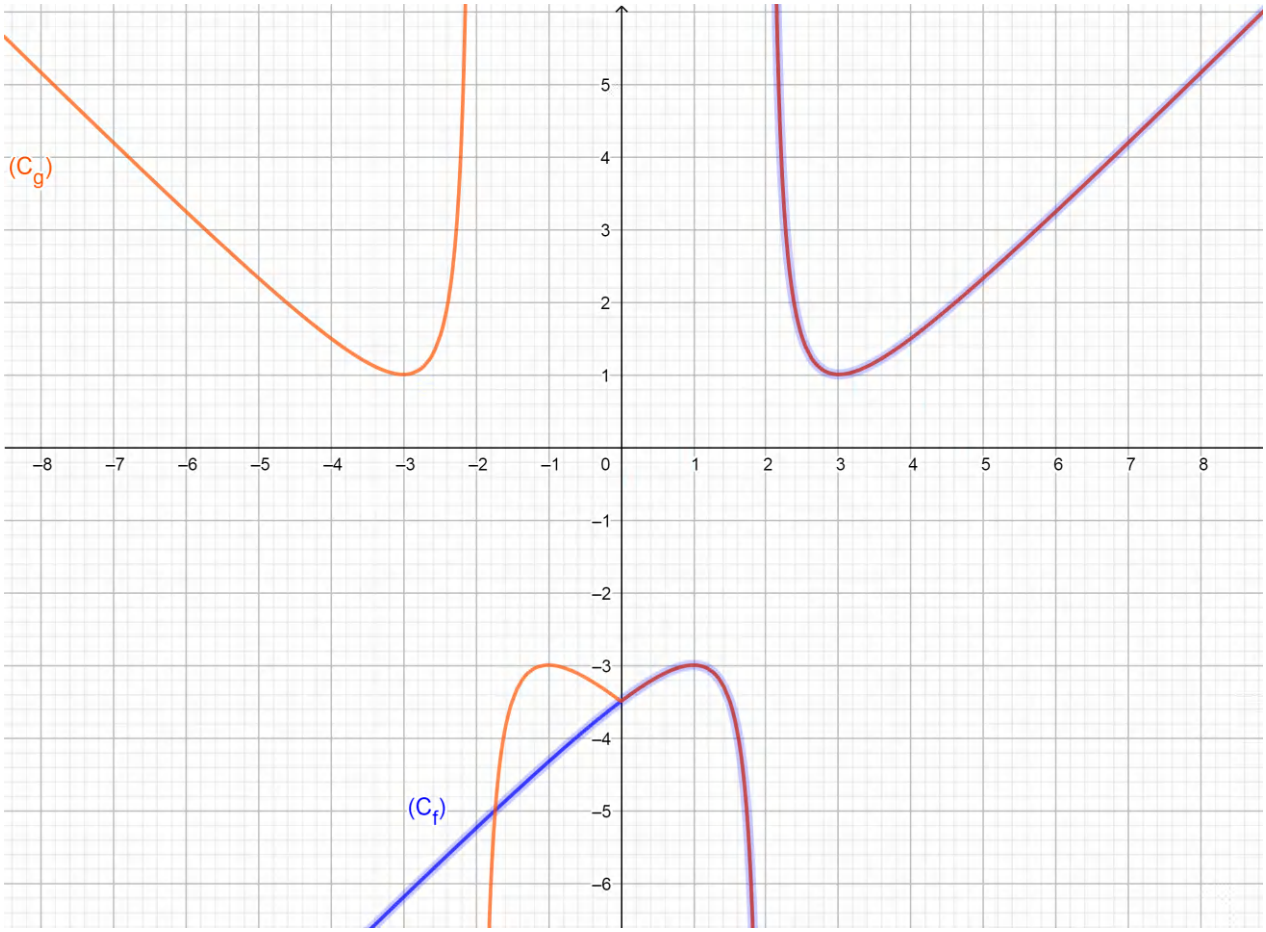
$$\begin{aligned} g(x) &= f(|x|) \\ &= \frac{|x|^2 - 5|x| + 7}{|x| - 2} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} & ; \quad x \geq 0 \\ \dfrac{(-x)^2 - 5(-x) + 7}{(-x) - 2} & x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه لما $x \geq 0$ (C_f) ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$ (C_f) يناظر (C_g) بالنسبة إلى محور التراتيب.

- تمثيل بيانيا (C_g) في المعلم السابق:

المنحني (C_f) والمنحني (C_g) والجزء الملون بالنفسجي يمثل تطابق (C_f) مع (C_g)



التمرين 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بيّن أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

2. ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول التغيرات.
3. بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.
4. عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.
5. ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
6. نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ)، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .
7. عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.
8. مثل بيانيا كل من (T)، (Δ) و (C_f) .

حل التمرين 09 :

1. تعيين العددين الحقيقين a و b:

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه:

$$\begin{cases} f(0)=\frac{7}{2} \\ f'(0)=0 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(0)=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{(0)^2+a(0)+b}{(0)^2+2(0)+2}=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow\frac{b}{2}=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow b=7$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$=\frac{2x^3+4x^2+4x+ax^2+2ax+2a-2x^3-2ax^2-14x-2x^2-2ax-14}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2+2x+2)^2}$$

بما أن $f'(0) = 0$ لدينا:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2 + 2(0) + 2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow 2a - 14 = 0$$
$$\Rightarrow a = 7$$

اذن:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}$$

- تبيين أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 2 + 5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$
$$= \frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}$$

إذن:

$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f:

- تعيين النهايات:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right)$
$$= 1$$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}\right) = 1$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$f'(x) = \frac{(2-a)x^2 - 10x + 2a - 14}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 10x}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-5x^2-10x}{(x^2+2x+2)^2}=0$$
$$\Rightarrow -5x^2-10x=0$$
$$\Rightarrow -5x(x+2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -5x=0 \\ \text{أو} \\ x+2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=-2 \end{cases}$$

- تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	1

❸ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\big)=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)\big)=1$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

❹ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx'):

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}=0$$
$$\Rightarrow x^2+7x+7=0$$

بعد حساب المميز Δ نجد: $\Delta=21$ و:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-7+\sqrt{21}}{2}\cong -1.21 \\ x_2=\dfrac{-7-\sqrt{21}}{2}\cong -5.79 \end{cases}$$

ومنه:

$$\big(C_f\big)\cap(xx')=\{(-5.79;0),(-1.21;0)\}$$

- تقاطع (C_f) مع (yy'):

لدينا سابقا

$$f(0)=\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{7}{2}\right)\right\}$$

❺ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}-1$$
$$=\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

لدينا: $(x^2+2x+2)>0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$5x+5=0\Rightarrow x=-1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- الوضعية النسبية:

- لما $x\in\,]-\infty;-1[$: (C_f) تحت (Δ).
- لما $x=-1$: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات $\omega(-1;1)$
- لما $x\in\,]-1;+\infty[$: (C_f) فوق (Δ)

❻ برهان أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) :

$$f(2\alpha-x)+f(x)=f(-2-x)+f(x)$$
$$=1+\frac{5(-2-x)+5}{(2+x)^2+2(-2-x)+1}+1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=2+\frac{-10-5x+5}{x^2+2x+2}+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=2-\frac{(5x+5)}{x^2+2x+2}+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=2$$
$$=2(1)$$

ومنه النقطة $\omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

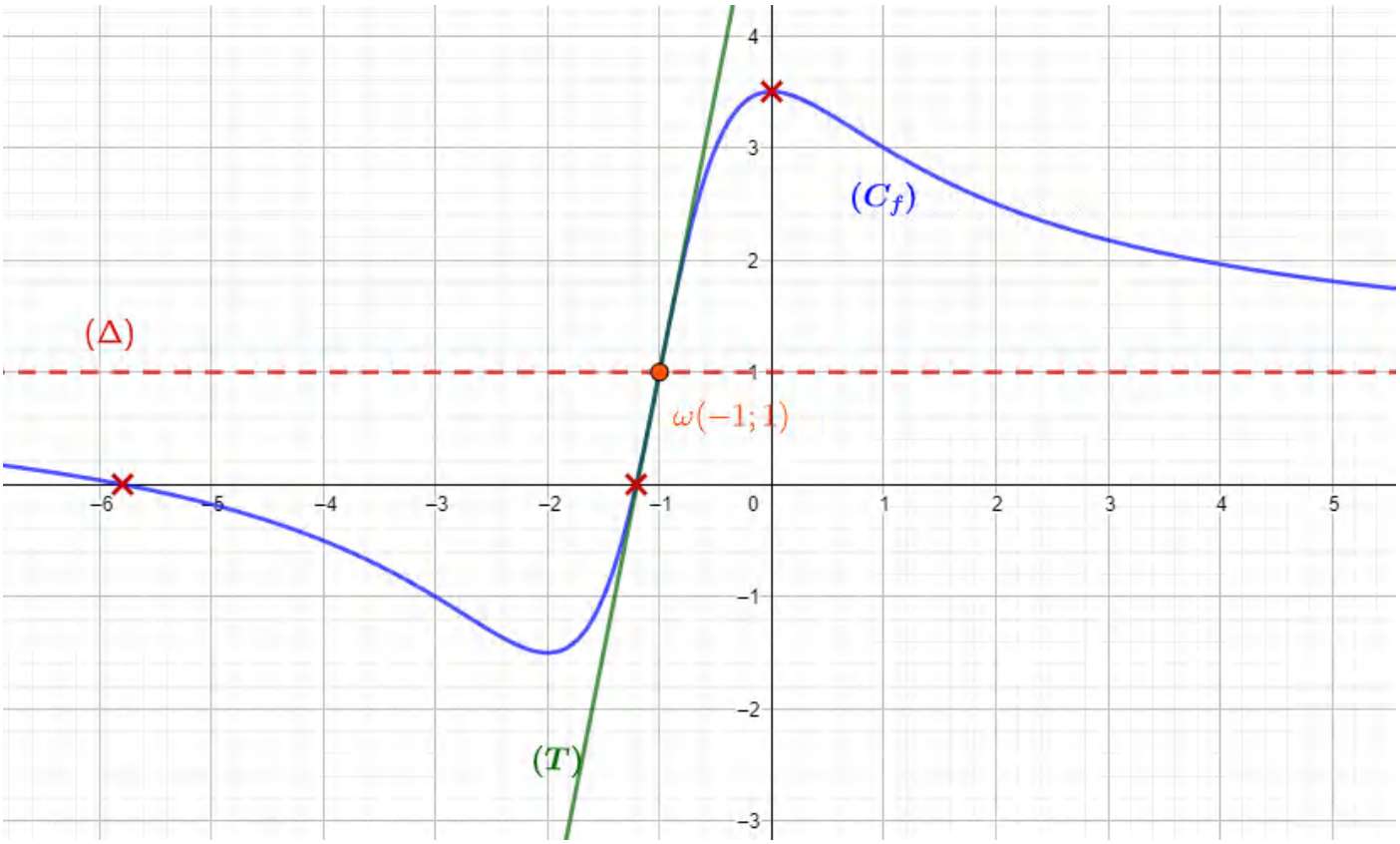
❼ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

$$(T):y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)$$
$$(T):y=\frac{-5+10}{(1-2+2)^2}(x+1)+1$$
$$(T):y=5x+6$$

❽ التمثيل البياني لكل من (T)، (Δ) و (C_f) :

لتمثيل المنحنى البيانى نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = 1$
- نعين النقطة ω مركز تناظر المنحني (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y = -5x + 6$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



◄ بالتوفيق في بكالوريا 2023 ►