

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

4

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

❶ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① احسب u_1 و u_2.

② برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 3$

❷ لتكن (v_n) المتتالية المُعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

② اكتب (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

❸ (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$

نضع: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

① اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

② بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

③ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[{}^{S_n}/_{n}\right]$.

1

① حساب u_1 و u_2:

$$u_{0+1} = \frac{4u_0}{1+u_0} \Rightarrow u_1 = \frac{4}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1 = 2}$$
$$u_{1+1} = \frac{4u_1}{1+u_1} \Rightarrow u_1 = \frac{4 \times 2}{1+2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{8}{3}}$$

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 3$

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$0 < 1 < 3$$
$$\Rightarrow 0 < u_0 < 3 \dots (*)$$

الخاصية محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $0 < u_n < 3$ صحيحة ونثبت أن $0 < u_{n+1} < 3$:

لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$$
$$= \frac{4u_n + 4 - 4}{1+u_n}$$
$$= \frac{4(u_n+1)}{1+u_n} - \frac{4}{1+u_n}$$
$$= 4 - \frac{4}{1+u_n}$$

ولدينا:

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow 1 < 1 + u_n < 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{1+u_n} < 1$$
$$\Rightarrow 1 < \frac{4}{1+u_n} < 4$$
$$\Rightarrow -4 < -\frac{4}{1+u_n} < -1$$
$$\Rightarrow 0 < 4 - \frac{4}{n} < 3$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 3 \ldots (**)$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{0 < u_n < 3}$$

❷

① تبيين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}} \\ &= \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{4u_n} \\ &= \frac{u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 3}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 3}{u_0} \\ &= \frac{1-3}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول -2

② كتابة (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 3}{u_n} &\Rightarrow v_n u_n - u_n = -3 \\ &\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -3 \\ &\Rightarrow u_n = \frac{-3}{v_n - 1} \\ & \qquad n \qquad \frac{3}{} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n = \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right)$$
$$= \frac{3}{1+2(0)}$$
$$= \boxed{3}$$

3

① اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$:

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$
$$= \frac{3}{\frac{3}{1-v_n}}$$
$$= 3 \times \frac{1-v_n}{3}$$
$$= \boxed{1-v_n}$$

② تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = n+1+\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$:

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$
$$= 1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n$$
$$= 1(n+1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$
$$= n+1+2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= n+1+2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)$$
$$= \boxed{n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

③ حساب $\lim_{n\to+\infty}\left[S_n/n\right]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[{}^{S_n}/_{n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{n}$$

$$\lfloor \qquad\qquad \rfloor$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{8}{3n}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]$$

$$=\boxed{1}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►