

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

6

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

◄ التمريـــــن

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$$

والمتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $s_n = u_{n+1} + u_n$

1

① بين ان المتتالية (s_n) هندسية مبينا أساسها وحدها الأول.

② استنتج عبارة s_n بدلالة n .

2 نضع $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = v_{n+1} - v_n$$

① عبر عن t_n بدلالة s_n

② عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

3 احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[{}^{u_n}/_{8^n}\right]$.

1

① تبيين ان المتتالية (s_n) هندسية:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= \underbrace{7u_{n+1} + 8u_n}_{u_{n+2}} + u_{n+1} \\ &= 8u_{n+1} + 8u_n \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8s_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$s_0 = u_{0+1} + u_0 = 1 + 0 = 1$$

ومنه (s_n) متتالية هندسية أساسها 8 و حدها الأول 1.

② استنتاج عبارة s_n بدلالة n :

$$\boxed{s_n = (8)^n}$$

2

① التعبير عن t_n بدلالة s_n:

$$\begin{aligned} t_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} - (-1)^n \times u_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} + (-1)^{n+1} \times u_n \\ &= (-1)^{n+1}(u_{n+1} + u_n) \\ &= (-1)^{n+1} \times s_n \end{aligned}$$

② التعبير عن v_n و u_n بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{cases} t_0 = v_1 - v_0 \\ t_1 = v_2 - v_1 \\ t_2 = v_3 - v_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \cdots + v_n - v_{n-1}$$

ومنه:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = -v_0 + v_n$$

ولدينا:

$$t_n = (-1)^{n+1} \times s_n \Rightarrow t_{n-1} = (-1)^{n} \times s_{n-1}$$

$$\Rightarrow t_{n-1} = (-1)^n \times \frac{(8)^n}{8}$$
$$\Rightarrow t_{n-1} = \frac{(-1 \times 8)^n}{8}$$
$$\Rightarrow t_{n-1} = \frac{(-8)^n}{8}$$

ومنه:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = -v_0 + v_n \Rightarrow -1\left(\frac{1-(-8)^n}{1-(-8)}\right) = \underbrace{-0}_{-v_0} + v_n$$
$$\Rightarrow v_n = -\left(\frac{1-(-8)^n}{9}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{9}((-8)^n - 1)}$$

ولدينا:

$$v_n = (-1)^n \times u_n \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{(-1)^n}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{(-8)^n - 1}{9(-1)^n}}$$

❸ حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[{}^{u_n}/_{8^n}\right]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{u_n}{8^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{(-8)^n - 1}{9(-1)^n}}{8^n}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-8)^n - 1}{8^n \times 9(-1)^n}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-8)^n - 1}{9(-8)^n}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-8)^n\left(1 - \frac{1}{(-8)^n}\right)}{9(-8)^n}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1 - \frac{1}{(-8)^n}}{9}\right] = \boxed{\frac{1}{9}}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►