

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسّية

4

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

التمريـــــن

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)] = -\infty$.

2) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4[$ وتحته على المجال $]2 + \ln 4 ; +\infty[$

3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

6) مثل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

لمشاهدة الحل مع @الأستاذ_عبد_الرحمان اضغط على الرابط
https://youtu.be/OrtSrBAtDIk

الخليل للرياضيات

◀ حل التمريـــن

1) تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=+\infty$

لأن:

$$\lim_{x\to-\infty}[x-2]=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}[e^x]=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right]=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=-\infty$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right]=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}[x-2]=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right]=-\infty$$

2) أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$:

$$e^{x-2}-4=0\Rightarrow e^{x-2}=4$$
$$\Rightarrow x-2=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=\ln 4+2$$

- تبيين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4[$ وتحته على المجال $]2+\ln 4;+\infty[$:

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x)-y=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$$

لدينا $e^{x-2}>0$ ولدينا: $-\frac{1}{2}$

$$e^{x-2}-4=0 \Rightarrow x=\ln 4+2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4+2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	$-$	$-$	
$e^{x-2}-4$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2+\ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2+\ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2+\ln 4; +\infty[$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-(e^{x-2}-1)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)-\frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}-2e^{x-2}+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -\left(1+e^{2(x-2)}-2e^{x-2}\right) \\ &= -(e^{x-2}-1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x) \leq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Rightarrow -(e^{x-2}-1)^2=0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2}-1)^2=0 \\ &\Rightarrow e^{x-2}-1=0 \\ &\Rightarrow e^{x-2}=1 \\ &\Rightarrow x-2=0 \\ &\Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$

4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x)=-2e^{x-2}(e^{x-2}-1)$$

دراسة $f''(x)$:

لدينا $-2e^{x-2} < 0$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	$-$	0	$-$
$e^{x-2} - 1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة الثانية انعدمت وغيَرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(2;2)$

5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(2 + \ln 4) = -0.83$ و $f(2 + \ln 3) = 0.93$

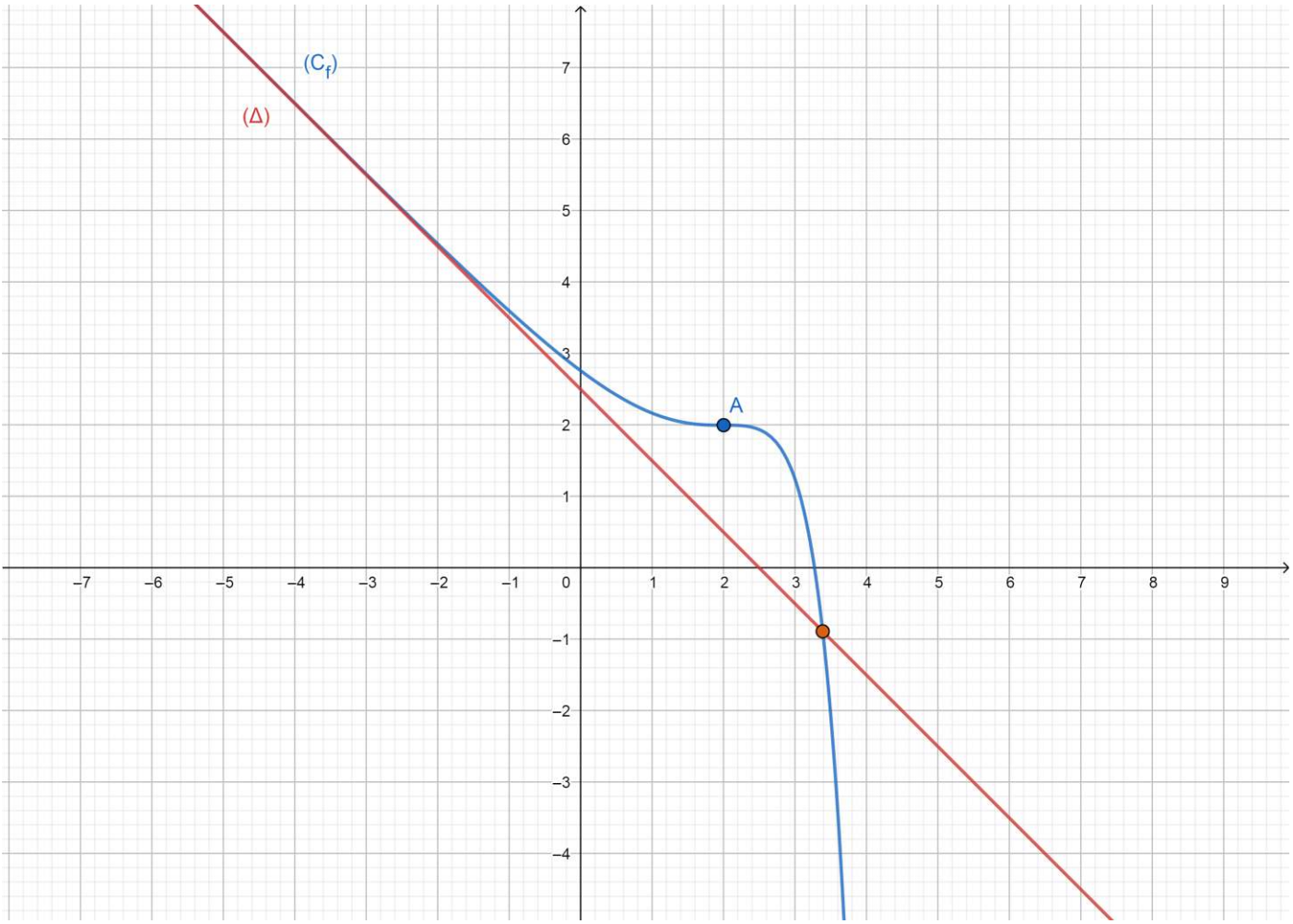
ولدينا: $f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►