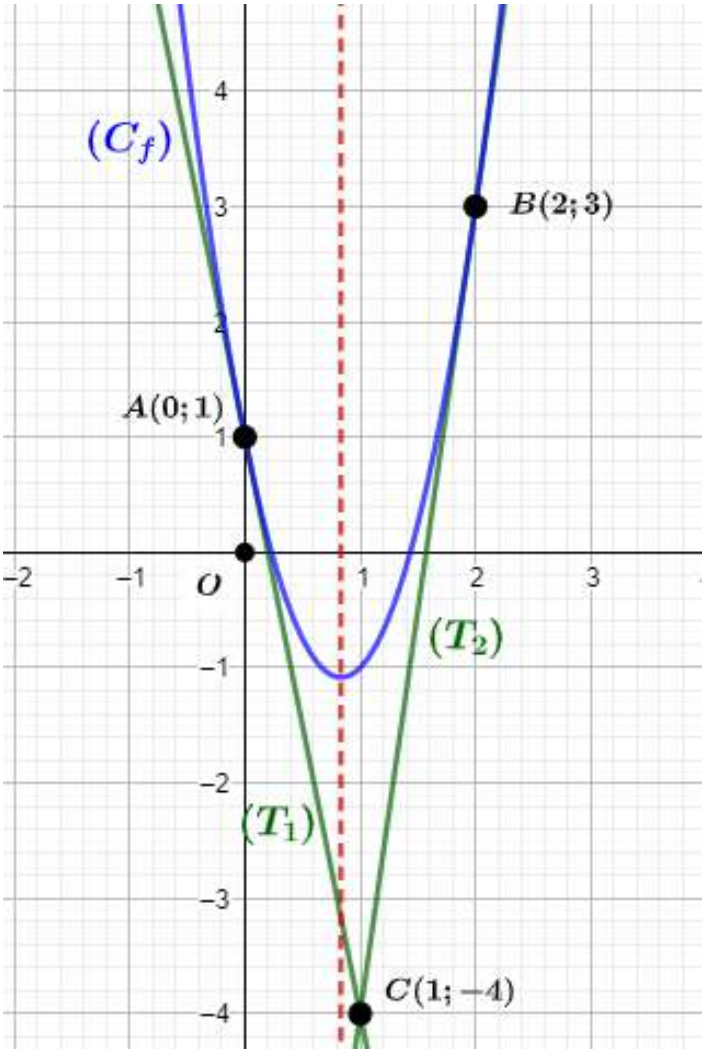
سلسلة تمارين رقم ②

◄ التمرين 01:

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(C_f) تمثيلها البياني المعطى في الشكل المقابل:



حيث: (C_f) يمر بالنقطتين $A(0;1)$ و $B(2;3)$، والمماسين (T_1) و(T_2) في النقطتين A وB يتقاطعان في النقطة $C(1;-4)$

① اكتب معادلتي المماسين عند النقطتين A و B.

② استنتج $f'(0)$ و $f'(2)$

③ أوجد الأعداد الحقيقية a، b و c.

④ ادرس تغيرات الدالة f

⑤ أوجد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O

⑥ بين أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) .

II) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1$$

① بيّن أنّ h دالة زوجية

② اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

③ وضح كيف يـ

◄ التمرين 02:

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x + 16$$

① ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$-2.5 < \alpha < -2$$

③ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

② ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بين أنّ

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

④ بين أن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

⑤ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

⑥ أوجد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

⑦ مثل بيانيا (Δ) و (C_f) .

⑧ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^3 - mx^2 - 8 - m = 0$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق

① ادرس شفعية الدالة h

② اكتب h دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

③ بيّن كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f).

ثم أنشئه.

◄ التمرين 03:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

① ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أنّ $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$\alpha \in \ ]2; 3[$$

③ استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

① بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

② ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بيّن أن

$$f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

④ عين a، b، c بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

⑤ بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ)

⑥ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

⑦ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

⑧ مثل بيانيا كل من (Δ)، (T) و (C_f) .

⑨ ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0$$

◄ التمرين 04:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

① اكتب عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة.

② ادرس قابلية الاشتقاق f عند 2،

ثم فسر هندسيا النتيجة.

③ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

④ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و(Δ_2)، يطلب تعيين معادلتيهما.

⑥ ادرس الوضعية بين (C_f) و كلا من (Δ_1) و (Δ_2)

⑦ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; -2[$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$

⑧ مثّل بيانيا كل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f) .

◄ التمرين 05:

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث:

$$\alpha \in]-1.48 \ ; \ 1.47[$$

③ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

①

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

②

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

③ بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

④ مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f).

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

◄ حل التمرين 01:

I)

① كتابة معادلتي المماسين عند النقطتين A و B:

• لدينا (T_1) يمر من النقطتين A و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (AC) هو شعاع توجيه لـ (T_1):

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-0\\-4-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

إذن معادلة (T_1) هي: $(T_1): -5x + (-1)y + c = 0$

نعوض النقطة A في معادلة (T_1) نجد:

$$-5(0) - (1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

إذن: $(T_1): -5x - y + 1 = 0$ أي: $\boxed{(T_1): y = -5x + 1}$

• ولدينا (T_2) يمر من النقطتين B و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (BC) هو شعاع توجيه لـ (T_2):

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-2\\-4-3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

إذن معادلة (T_2) هي: $(T_2): -7x + (1)y + c = 0$

نعوض النقطة B في معادلة (T_2) نجد:

$$-7(2) + (3) + c = 0 \Rightarrow c = 11$$

إذن: $(T_2): -7x + y + 11 = 0$ أي: $\boxed{(T_1): y = 7x - 11}$

② استنتاج $f'(0)$ و $f'(2)$:

$$f'(0) = -5 \quad \text{و} \quad f'(2) = 7$$

③ ايجاد الأعداد الحقيقية a، b و c:

لدينا (C_f) يمر من النقطة A و B ، ولدينا سابقا $f'(0) = -5$

ومنه:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 3 \\ f'(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 1 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 3 \\ 2a(0) + b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن: $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

④ دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

⑤ ايجاد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O:

لايجاد المماسات التي تمس (C_f) في النقطة $O(0;0)$ نعوض النقطة O في معادلة المماس العامة، ثم نحل المعادلة:

$$f'(x)(x_O - x) + f(x) = y_O$$

$$\Rightarrow (6x - 5)(0 - x) + 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -6x^2 + 5x + 3x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 1 = 0$$

$$\underline{1} \qquad \underline{\sqrt{3}}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين في النقطتين ذات الفاصلتين $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ يمران بالمبدأ O. نسميهما (T_3) و (T_4)

- ايجاد معادلة لـ (T_3):

$$(T_3): y = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}x - 2 - 5x + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 = (2\sqrt{3} - 5)x$$

- ايجاد معادلة لـ (T_4):

$$(T_4): y = f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= -2\sqrt{3}x - 2 - 5x - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 = -(2\sqrt{3} + 5)x$$

⑥ تبيين أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$ معناه $x \in \mathbb{R}$ معناه $\left(2\left(\frac{5}{6}\right) - x\right) \in \mathbb{R}$

• ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{3} - x\right) = 3\left(\frac{5}{3} - x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{3} - x\right) + 1$$

$$= \frac{25}{3} - 10x + 3x^2 - \frac{25}{3} + 5x + 1$$

$$= 3x^2 - 5x + 1 = f(x)$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f)

II)

① تبيين أنّ h دالة زوجية:

$$h(-x) = 3(-x)^2 - 5|-x| + 1 = 3x^2 - 5|x| + 1$$

$$= h(x)$$

$h(-x) = h(x)$ معناه أن الدالة h زوجية.

② كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1 = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 & ; \ x \geq 0 \\ 3(-x)^2 - 5(-x) + 1 & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

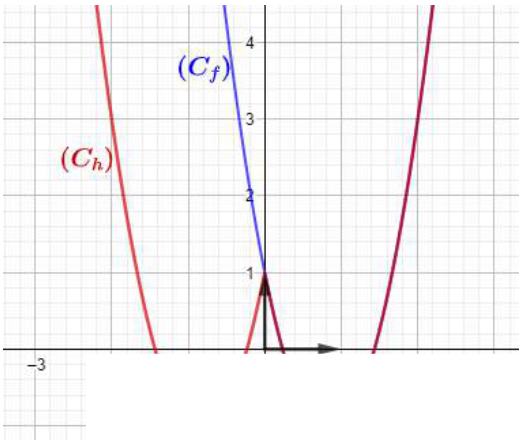
$$= \begin{cases} f(x) & ; \ x \geq 0 \\ f(-x) & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

③ توضيح كيف يتم إنشاء (C_h) :

لما $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

- إنشاء (C_h) :



◄ حل التمرين 02:

I)

① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

ولدينا $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1)$

بما أنّ: $(x^2+1) > 0$ فإن $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

② تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2) \times g(-2.5) < 0$

لأن: $g(-2) \approx 2$ و $g(-2.5) \approx -7.13$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

II)

① تبيين أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-8)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 16x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+16)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

لدينا: $(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$	−	0	+		+		
x	−		−	0	+		
$f'(x)$	+	0	−	0	+		

- جدول تغيرات الدالة f:

		$+\infty$
		↗

③ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -(3\alpha+16)$

لدينا: $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha\alpha^2 + 3\alpha + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 8}{\alpha^2+1} = \frac{(-3\alpha-16-8)}{\left(\frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}+1\right)}$$
$$= \frac{(-3\alpha-24)}{\left(\frac{-3\alpha-16+\alpha}{\alpha}\right)} = \frac{(-3\alpha-24)}{\left(\frac{-2\alpha-16}{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{3\alpha(\alpha+8)}{2(\alpha+8)} = \frac{3}{2}\alpha$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $-2.5 < \alpha < -2$ ومنه: $-7.5 < 3\alpha < -6$

ومنه: $-3 < \frac{3}{2}\alpha < -3.75$ إذن: $-3 < f(\alpha) < -3.75$

④

أ/ تبيين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-8}{x^2+1} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-8-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x^3-8}{x^2+1} - x = \frac{-(x+8)}{x^2+1}$$

لدينا: $(x^2+1) > 0$ ومنه: $-(x+8) = 0 \Rightarrow x = -8$

الوضعية:

x	$-\infty$	-8	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	−

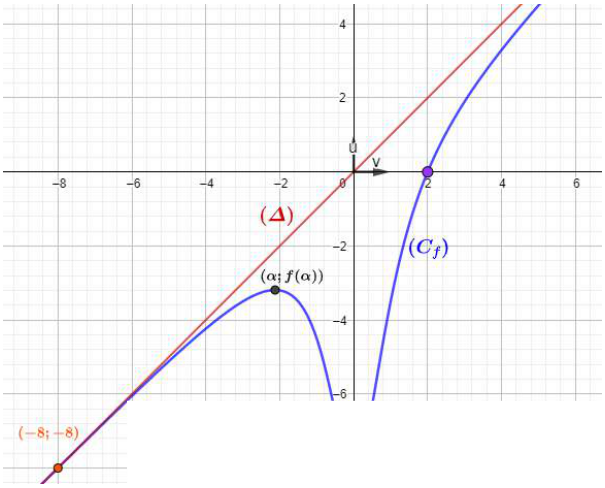
⑤

أ/ ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{2\}$

ب/ التمثيل البياني:



ج/ المناقشة البيانية:

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0 \Rightarrow x^3 - 8 - m(x^2+1) = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 8 = m(x^2+1) \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^2+1} = m \Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة $y_m = m$، وهي:

لما $m < -8$ المعادلة تقبل حل سالب

لما $m = -8$ المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف معدوم $x = -8$ ، وحل سالب

لما $-8 < m < -2$ المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين: حل موجب وحل مضاعف سالب

لما $m > -2$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

(III)

① دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x) = \frac{|-x|(-x)^2 - 8}{(-x)^2+1} = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

② كتابة h دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1} = \begin{cases} f(x) & ; \ x \geq 0 \\ f(-x) & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

③ استنتاج رسم (C_h) :

(C_h) يطابق (C_f) لما $x > 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.

◄ حل التمرين 03:

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

لدينا: $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 == 3(x-1)^2$

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

② تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تبل حلا وحيدا α :

لدينا: • الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• $g(2) \times g(3) < 0$

لأن: $3) \approx 4$ و

ومنه حسب مبره

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \frac{2}{(0^+)^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \frac{2}{(0^-)^2} = +\infty$

② تبيين أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x+3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-3x^2+3x+1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{3x^3-6x^2+3x-3x^2+6x-3-2x^3+6x^2-6x-2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+3x-5}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

③ دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2 \geq 0$، ومنه الإشارة من إشارة $g(x) \cdot (x-1)$

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$x-1$	$-$		$\|$	$+$		$+$	
$g(x)$	$-$		$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$		$\|$	$-$	0	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	$\|$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

④ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 5$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha-1)^2}$$
$$= \frac{3\alpha^2 - 3\alpha + 5 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5 < \alpha < 2.6$ ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.6$

ومنه: $(1.5)^2 < (\alpha-1)^2 < (1.6)^2$

ومنه: $\frac{1}{(1.6)^2} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{(1.6)^2}$

ومنه: $\frac{6}{(1.6)^2} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{(1.6)^2}$ ومنه: $2.34 < f(\alpha) < 2.67$

⑤

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية ، ، :

$f(x) = ax +$

$$= \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b + c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

ب/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] = 0$

ومنه: (C_f) يقبل م م م (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x - 1$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

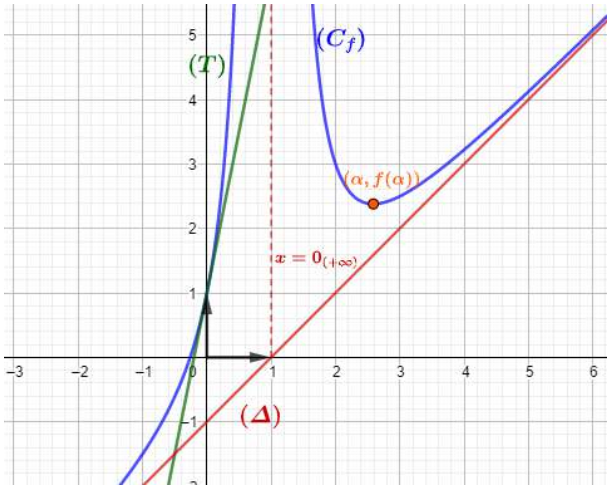
بما أن: $(x-1)^2 > 0$ ، فإنّ: $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) > 0$

ومنه: (C_f) يقع فوق (Δ) على D_f.

⑥ تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{g(0)}{(-1)^3}x + f(0) = 5x + 1$$

⑦ التمثيل البياني:



⑧ المناقشة البيانية:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - mx^2 + 3x + 2mx + 1 + m = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = mx^2 - 2mx + m$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x-1)^2$$
$$\Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة: $y_m = m$ ، وهي:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حل سالب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل معدوم

لما $< f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل موجب

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين موجبين

◄ حل التمرين 04:

① كتابة عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$$
$$= \begin{cases} x + 2 + \frac{1}{x+1} & ; \quad x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[\\ -x - 2 + \frac{1}{x+1} & ; \quad x \in]-\infty; -2] \end{cases}$$

② دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند (-2):

لدينا: $f(-2) = -1$ ولدينا:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}\right) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x - 2 + \frac{1}{x+1} - (-1)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x - 1 + \frac{1}{x+1}}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x^2 - x - x - 1 + 1}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x^2 - 2x}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x}{x+1}\right)$$
$$= \frac{2}{-1} = -2 \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليسار

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)}\right) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x + 2 + \frac{1}{x+1} - (-1)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x + 3 + \frac{1}{x+1} + 1}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x^2 + x + 3x + 3 + 1}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \frac{0}{-1} = 0 \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليمين

وبما أنّ فإنّ الدالة لا تقبل الاشتقاق عند -2

- التفسير الهندسي للنتيجة: (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة -2 معامل توجيه كل منهما 0 و -2 على الترتيب

③

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \left(x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = 1+\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \left(x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = 1+\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x=-1$

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x-2+\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$

④ دراسة تغيرات الدالة f:

- دراسة $f'(x)$:

• لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = 1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+2) \geq 0$ ومنه:

إذن: $f'(x) > 0$ لما: $x \in]0;+\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;0[$

• لما: $x \in]-\infty;-2]$:

$$f'(x) = -1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-2-1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2} = \frac{-(x^2+2x+3)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه :

لدينا: $\Delta = -8 < 0$ ومنه: $(x^2+2x+3) > 0$

إذن: $f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\infty;-2]$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘		↗	$+\infty$

⑤

- لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+1}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م م (Δ_1) بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x+2$

- لما: $x \in]-\infty;-2]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x+1}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م م (Δ_2) بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -x-2$

ج/ دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_1) :

- لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$f(x)-y_{(\Delta_1)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ومنه:

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta_1)}$	$-$	‖	$+$

- دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_2) :

- لما: $x \in]-\infty;-2]$:

$$f(x)-y_{(\Delta_2)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $(x+1) < 0$ على المجال $]-\infty;-2]$

ومنه: $\left(f(x)-y_{(\Delta_2)}\right) < 0$ إذن: (C_f) تحت (Δ_1)

⑥ تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

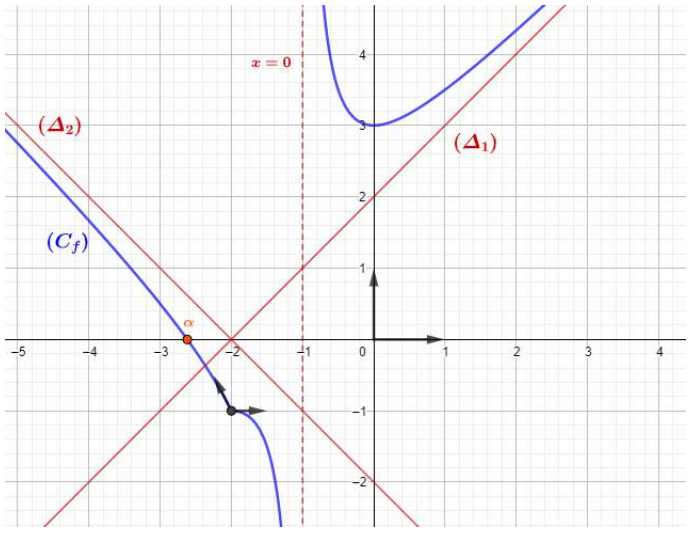
لدينا: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$

ولدينا: $f(-2.6)\times f(-2.7) < 0$

لأنّ $f(-2.7) \approx 0.11$ و $f(-2.6) \approx -0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$.

⑦ التمثيل البياني:



◄ حل التمرين 05:

I)

ولدينا $3x^2+6>0$، إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

② تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$g(-1.48)=-0.12$ و $g(-1.47)=0.0035$

ولدينا $g(-1.48)\times g(-1.47)<0$

فإنه حسب مبرهة القيم المتوسطة، $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيد

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

①

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0	$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$			$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗ $+\infty$

②

أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-6-2x}{x^2+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: على :

$-2x-6=0\Rightarrow -2x=6\Rightarrow x=-3$

ومنه إشارة $f(x)-y$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty;-3[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-3;-3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3;+\infty[$

③ تبين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أنّ $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha$$
$$=\frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2}$$
$$=\frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2}$$
$$=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha)=0$

ومنه:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

إذن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

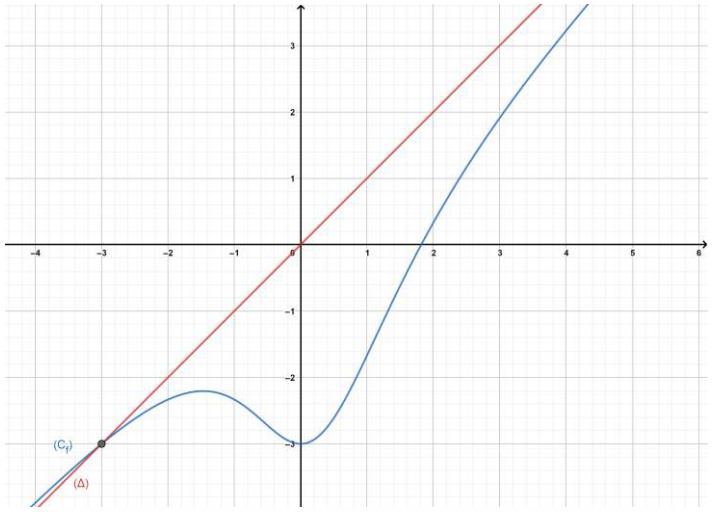
لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$

ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

ومنه:

$$\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22<f(\alpha)<-2.21$$

④ إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f):



- يا