مجلة المفيد في الرياضيات

لتلاميذ بكالوريا 2025 شعب علمية

الدوال العددية



سلسلة تمارين محلولة في الدوال العددية

للأستاذ بلحودي حمو

التمرين -1-

نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f = \Re - \{-1;1\}$ بـِ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. بين أنه من أجل كل x من D_f، $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}$
5. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
6. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
7. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث : $-2.5 \prec \alpha \prec -2.6$ و $-1.3 \prec \beta \prec -1.4$ و $0.8 \prec \gamma \prec 0.9$.
8. بين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).
9. أرسم المستقيمات المقاربة و المماس المنحني (C_f).

التمرين -2-

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـِ $g(x) = x^3 + 3x + 4$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

1. احسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
2. أدرس اتجاه تغير g و شكل جدول تغيراتها .
3. احسب $g(-1)$ ثم استنتج حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $\Re$.

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـِالعبارة $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. بين أنه من اجل كل x من $\Re$، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. عين معادلة لـِ (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
5. احسد معادلة له .

7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم (Δ)؟

8. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.2 \prec \alpha \prec 1.3$

9. ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

التمرين -3-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re - \{2\}$ بـ $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات التعريف .

3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

4. اكتب معادلتي (T) و (T') نصفي المماسين للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

5. ادرس تغيرات الدالة f.

6. بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

7. بين أن المستقيم (D') ذو المعادلة $y = -x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

8. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة لكل من (D) و (D').

9. ارسم (T) و (T') و (D) و (D') و المنحني (C_f).

التمرين -4-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في R ؛ حلا وحيدا α . تحقق من أن : $2.1 \prec \alpha \prec 2.2$.

4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1;1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{-1;1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. عين ؛ دون حساب ؛ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. فسر النتيجة بيانيا .

5. بين أن: $f(\alpha)=3\alpha$.استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6. أ-بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=2x$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

7. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-1.2\prec\beta\prec-1.1$.فير النتيجة هندسيا.

8. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

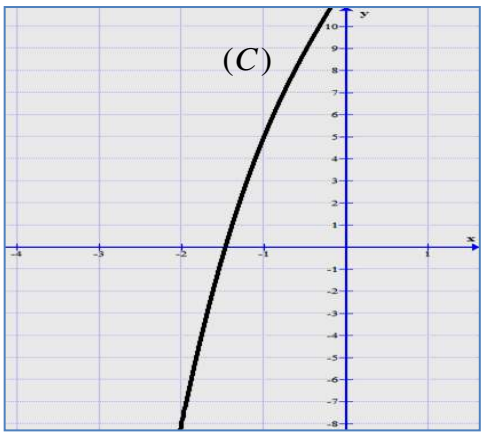
9. نعتبر الدالة h المعرفة على $R-\{-1;1\}$ بـــ $h(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. -

استنتج كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) .

10. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة الآتية حيث x هو المجهول : $f(x)=|m|$

التمرين -5-

الجزء الأول :



المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على R كما يلي:

$g(x)=x^3+6x+12$.

- بقراءة بيانية حدد إشارة $g(-2)$ و $g(-1)$.
- برر وجود عدد حقيقي α من المجال $]-2;-1[$ يحقق أن المعادلة $g(\alpha)=0$.
- تحقق حسابيا أن $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.
- استنتج إشارة $g(x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ يكون : $f(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.

4. أ-بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5. بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـــ (Δ). (لا يطلب تعيين معادلتيهما)

6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1.3 \prec \beta \prec 1.4$. فسر النتيجة هندسيا.

7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) = -1.2$)

التمرين -6-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

1. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. أدرس تغيرات الدالة g . و شكل جدول تغيراتها .

3. بين أن احسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ و إشارة $g(-x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \dfrac{2g(-x)}{(x+1)^3}$.

3. ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. بين أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f(x) = 2x + 2 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

5. أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x + 2$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.3 \prec \alpha \prec -0.2$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

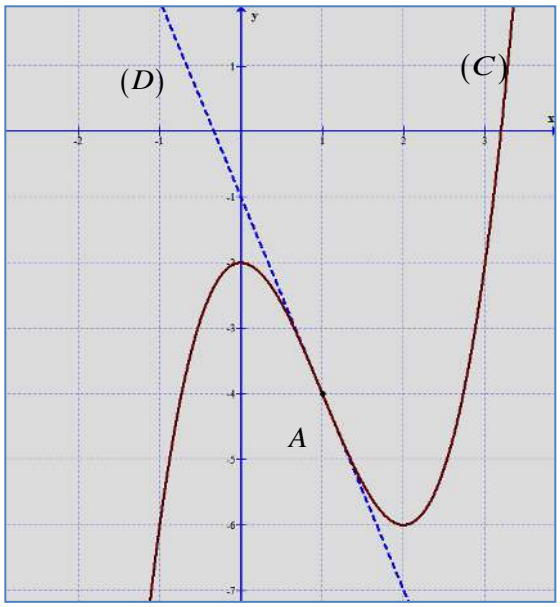
8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$

التمرين -7-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x)=ax^3+bx^2+c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

(C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1;-4)$ ، (انظر الشكل)



1. بقراءة بيانية :

أ. شكل جدول تغيرات g .

ب.عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.

ج. اكتب معادلة لـ (D) .

د . حل المتراجحة الآتية $g'(x)\prec 0$.

2. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$.

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 .

4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$. ثم استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .

3. احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

4. بين أن $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. بين أن: (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلته.

6. احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$ و المعادلة $f(x)=x+m$.

8. h الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

⇦ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة)

9. u الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $u(x)=|f(x)|$ ، (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u.

⇦ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f)

10. v الدالة المعرفة على المجال $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $v(x)=f(|x|)$ (C_v) هو التمثيل البياني للدالة v.

⇦ بين أن v زوجية ثم أنشئ (C_v) انطلاقا من (C_f)

11. k الدالة المعرفة على المجال $R-\{2\}$ كما يلي : $k(x)=f(x-1)+2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k.

⇦ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f).

حلـــــول التمارين

حل التمرين -1-

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=-\infty$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لـ (C_f).

ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ (C_f).

2. دراسة اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل x من D_f لدينا ، $f'(x)=\dfrac{(3x^2+6x)(x^2-1)-2x(x^3+3x^2-3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

إشارة $f'(x)$ من x^2-3 ، المعادلة $x^2-3=0$ تقبل حلين هما $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ و عليه إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3};+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالات $[1;\sqrt{3}]$ و $[-\sqrt{3};-1]$ و $]-1;1[$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0.4	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	5.6	↗	$+\infty$

3.كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ لدينا $f(0)=3$ و $f'(0)=0$ و بالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y=3$.

4. تبيين أنه من أجل كل x من Df، $f(x)=x+3+\dfrac{x}{x^2-1}$:

من أجل كل x من D_f ، $x+3+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{(x+3)(x^2-1)+x}{x^2-1}=\dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=f(x)$

5.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[x+3+\frac{x}{x^2-1}-(x+3)\right]=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\dfrac{x}{x^2-1}$ ، نلخص إشارة $f(x)-y$ و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$			‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
		(C_f)		(Δ)		(C_f)		(Δ)	

			(Δ)			(Δ)

7. تبيين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها : $-2.5 \prec \alpha \prec -2.6$ و $-1.3 \prec \beta \prec -1.4$ و $0.8 \prec \gamma \prec 0.9$:

من جدول تغيرات الدالة f لدينا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-\sqrt{3}]$ و من ثم على المجال $[-2.6;-2.5]$:

و لدينا : $f(-2.6) = -0.05 \prec 0$ و $0 \prec f(-2.6) = 0.02$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-2.6;-2.5[$ حلا وحيدا α .

- f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-\sqrt{3};-1[$ و من ثم على المجال $[-1.4;-1.3]$:

و لدينا : $f(-1.4) = 0.14 \succ 0$ و $f(-1.3) = -0.18 \prec 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1.4;-1.3[$ حلا وحيدا β .

- f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;1[$ و من ثم على المجال $[0.8;0.9]$:

و لدينا : $f(0.8) = 1.57 \succ 0$ و $f(0.9) = -0.83 \prec 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0.8;0.9[$ حلا وحيدا β .

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث :

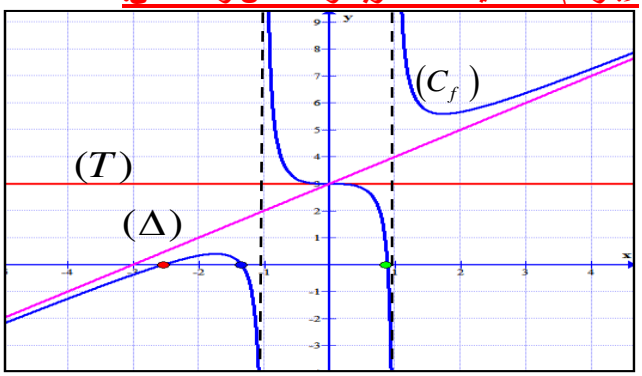
$-2.5 \prec \alpha \prec -2.6$ و $-1.3 \prec \beta \prec -1.4$ و $0.8 \prec \gamma \prec 0.9$.

8.تبيين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى :

من أجل $x \in \Re - \{-1;1\}$ ، $(-x) \in \Re - \{-1;1\}$ و منه $(-x) \in D_f$ و:

$f(-x) + f(x) = -x + 3 + \frac{-x}{x^2-1} + x + 3 + \frac{x}{x^2-1} = 6 = 2(3)$. إذن النقطة $\Omega(0;3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

9. رسم المستقيمات المقاربة و المماس و المنحنى.



حل التمرين -2-

I)نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

1. حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + 3x + 4 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 3x + 4 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

3. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x) = 3x^2 + 3$. $g'(x) \succ 0$ إذن متزايدة تماما على $\Re$.

4.حساب(-1)g و استنتاج إشارة g(x) :

$g(-1) = 0$. g متزايدة تماما على $\Re$ وتنعدم من اجل $x = -1$ إذن إشارتها كالتالي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$

1.حساب النهايات:

$\lim\limits_{x \to +\infty}$ x^3 $x^3 - 2$ x^3 $x^3 - 2$

2. تبيين أنه من اجل كل x من R، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:

من اجل كل x من $\Re$، $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

3.استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط .نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	‖	+	
x		-	‖	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-1;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{2}$	↘	-2	↗	$+\infty$

4.تعيين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$. لدينا $f(0)=-2$ و $f'(0)=0$ و بالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y=-2$.

5. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-2}{x^2+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-2}{x^2+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-2-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$

الاستنتاج:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـــ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$f(x)-x=\frac{-2-x}{x^2+1}$ ، إشارة $[f(x)-x]$ من إشارة البسط . نلخص إشارة $[f(x)-x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)-y$		+	0	-	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2;-2)$		(C_f) تحت (Δ)

7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم (Δ) ؟:

معامل توجيه المستقيم (Δ) هو 1 . المعادلة $f'(x)=1$ تكافئ $\frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}=1$ ومنه $x^4+3x^2+4x=(x^2+1)^2$

ومنه $x^2+2=0$. المعادلة لا تقبل حلول إذن لا توجد مماسات موازية لـــ(Δ).

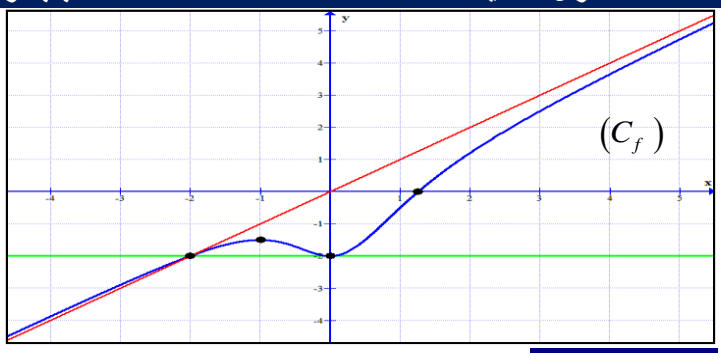
8. تبيين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث.

لا توجد حلول للمعادلة $f(x)=0$ في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1;0]$.

f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و من ثم على $[1.2;1.3]$ و لدينا $f(1.2)\times f(1.3)<0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1.2;1.3[$ حلا وحيدا α .

إذن (C_f)



حل التمرين -3-

1. كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x)=|x-1|+\frac{2}{x-2}=\begin{cases} g(x)=-x+1+\dfrac{2}{x-2}\;;x\in\left]-\infty;1\right] \\ k(x)=x-1+\dfrac{2}{x-2}\;;x\in[1;2[\cup]2;+\infty[\end{cases}$$

2. حساب النهايات عند أطراف مجالات التعريف :

$$\bullet\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+1+\frac{2}{x-2}\right]=+\infty \qquad \bullet\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{2}{x-2}\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\<}}k(x)=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to2\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\>}}k(x)=-\infty$$

- المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=2$.

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 و تفسير النتيجة هندسيا :

$$\bullet\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h+1)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h-1+1+\frac{2}{h+1-2}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h+\frac{2}{h-1}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+h+2+2h-2}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+3h}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h-3}{(h-1)}=-3$$

نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار و عددها المشتق من اليسار هو $g'(1)=-3$.

$$\bullet\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k(h+1)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-1+1+\frac{2}{h+1-2}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\frac{2}{h-1}+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2-h+2+2h-2}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h^2+h}{h(h-1)}=\lim_{h\to0}\frac{-h+1}{h-1}=-1$$

- نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق من اليمين هو $k'(1)=-1$.

لكن العدد المشتق من اليمين و اليسار غير متساويان أي : $g'(1)\neq k'(1)$ ، إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

التفسير الهندسي للنتائج :

منحني الدالة f يقبل نصفي مماسين عند النقطة معاملا توجيههما 3- و 1- .

4. كتابة معادلتي نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

معادلة المماس (T) : $y=g'(1)(x-1)+g(1)=-3(x-1)-2=-3x+1$

معادلة المماس (T') : $y=k'(1)(x-1)+k(1)=-1(x-1)-2=-x-1$

5. دراسة تغيرات الدالة f:

لما $x\in\left]-\infty;1\right]$: $f(x)=g(x)=-x+1+\dfrac{2}{x-2}$

من أجل كل x من $\left]-\infty;1\right]$: $f'(x)=g'(x)=-1-\dfrac{2}{(x-2)^2}\prec0$. الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;1\right]$.

لما $x\in[1;2[\cup]2;+\infty[$: $f(x)=k(x)=x-1+\dfrac{2}{x-2}$

من أجل كل x من $[1;2[\cup]2;+\infty[$: $f'(x)=k'(x)=1-\dfrac{2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$.

من أجل كل x من $[1;2[\cup]2;+\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط .

$x^2-4x+2=0$ ، $\Delta=8$ المعادلة $x^2-4x+2=0$ تقبل حلين هما $x=2-\sqrt{2}$ و $x=2+\sqrt{2}$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ كالتالي :

x	1	2	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
		‖		+

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[k(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x-2}\right]=0$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

7.تبيين أن المستقيم (D') ذو المعادلة y =-x+1 مستقيم مقارب مائل لـ(Cf) بجوار ∞ - :

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)-(-x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x-2}\right]=0$

و منه المستقيم (D') ذو المعادلة $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

9. دراسة الوضع النسبي لـ(Cf) بالنسبة لكل من(D)

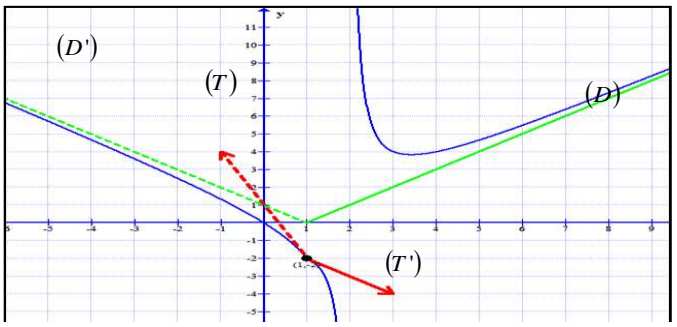
ندرس إشارة $[f(x)-(x-1)]$ أي إشارة $\frac{2}{x-2}$ على المجال $]2;+\infty[\cup[1;2[$ ، نلخص إشارة و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	1		2	$+\infty$
$[f(x)-(x-1)]$	-			+
الوضع النسبي	(D)تحت(C_f)			(D)فوق(C_f)

دراسة الوضع النسبي لـ (Cf) بالنسبة لكل من(D') :

ندرس إشارة $[f(x)-(-x+1)]$ أي إشارة $\frac{2}{x-2}$ على المجال $]-\infty;1[$. من اجل x كل من $]-\infty;1[$ ، $\frac{2}{x-2}\prec 0$. إذن من اجل x كل من $]-\infty;1[$ ، (C_f)تحت(D') .

9. رسم المستقيمات و المماسات و المنحنى: $f(0)=0$



(C_f)

حل التمرين 4-

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=x^3-3x-3$.

1.حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-3x-3=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x-3=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=3x^2-3$.

المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين هما $x=1$ و $x=-1$.و إشارة $g'(x)$ كما هو موضح في الجدول ادناه :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$.و متناقصة تماما على $[-1;1]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

3.بين أن المعادلة g(x)=0 تقبل في R حلا وحيدا :

لا توجد حلو

f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا $g(1)=-5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ نلاحظ أن $0\in]-5;+\infty[$، حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\Re$ حلا وحيدا α.

التحقق من أن : $2.1\prec\alpha\prec 2.2$:

$g(2.1)=-0.039$ و $g(2.2)=1.048$ و منه $g(2.1)\times g(2.2)\prec 0$ إذن $2.1\prec\alpha\prec 2.2$.

4. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

5.تبيين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=6x$

f " تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها أي $f''(x)>0$ من أجل $x\prec 0$ و $f''(x)<0$ من أجل $x\prec 1$ و $f(1)=-3$. إذن $A(0;-3)$ هي نقطة انعطاف للمنحني(C).

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\prec -1}} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\succ -1}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لـ (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ (C_f).

2. التحقق أن $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$:

من أجل كل x من $R-\{-1;1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(6x^2)(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\frac{6x^4-6x^2-4x^4-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$. نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		-		-		-		-	0	+	
x		-		-	0	+		+			
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $[0;1[$ و $]1;\alpha]$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖		-3	↘	‖ $+\infty$		$+\infty$	↗	$+\infty$
					$-\infty$		$-\infty$		$f(\alpha)$		

4. تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$:

f قابلة للا $\qquad$ $2\alpha\times g(\alpha)$ $\qquad$ $f(x)-f(\alpha)$

5. تبيين أن $f(a)=3a$:

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha-3=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha=3$.

من جهة اخرى : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}$ بتعويض $\alpha^3-3\alpha$ بـ 3 ينتج : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\dfrac{3\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\dfrac{3\alpha(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1}=3\alpha$

استنتج حصرا للعدد $f(a)$:

لدينا $2.1\prec\alpha\prec2.2$ ومنه $6.3\prec3\alpha\prec6.6$ أي $6.3\prec f(\alpha)\prec6$.

6.أ.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[\frac{2x^3+3}{x^2-1}-2x\right]=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2x^3+3-2x^3+2x}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب.دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\dfrac{2x+3}{x^2-1}$. نلخص إشارة $f(x)-y$ و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	$+$		$+$		
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$			0	$+$		$-$		$+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $A\left(\frac{-3}{2};-3\right)$	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

7.تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و من ثم على المجال $[-1.2;-1.1]$:

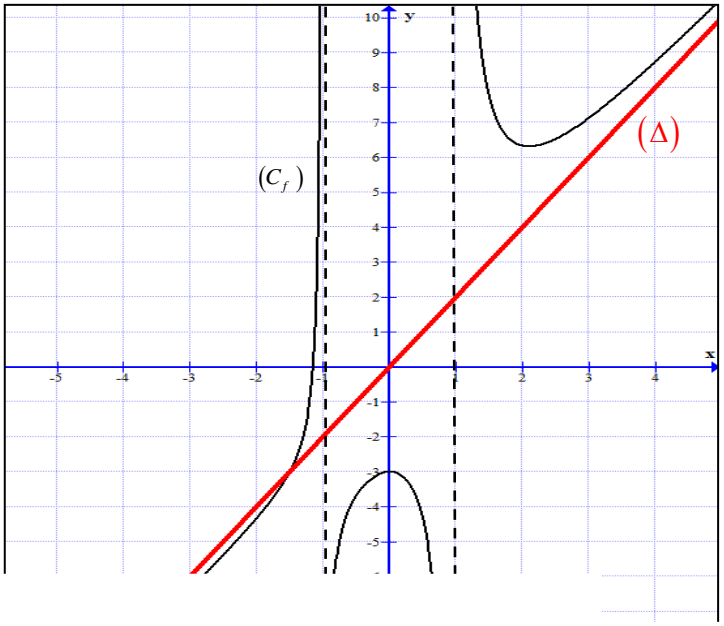
و لدينا : $f(-1.2)=-1.03\prec0$ و $f(-1.1)=1.609\succ0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1.2;-1.1[$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا :

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

8. انشاء (Δ) و المنحنى $f(0)=-3$



لدينا $h(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1=f(x)+1$. (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{j}$.

10.المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة f(x)=Iml

- إذا كان $|m|\in[0;f(\alpha)[$ أي أن $m\in]-f(\alpha);f(\alpha)[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $|m|=f(\alpha)$ أي أن $m=f(\alpha)$ أو $m=-f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا و حلا سالبا.
- إذا كان $|m|\in]f(\alpha);+\infty[$ أي أن $m=]-\infty;-f(\alpha)[\cup]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين و حلا سالبا .

حل التمرين -5-

الجزء الأول :

1.تحديد g(-2) و اشارة g(-1):

$g(-2)\prec 0$ و $g(-1)\succ 0$

2. تعليل وجود عدد حقيقي a من المجال]-2;-1[يحقق g(a)=0:

من التمثيل البياني : g مستمرة و متزايدة تماما على $\Re$ و من ثم على $[-2;-1]$.و لدينا $g(-2)\times g(-1)\prec 0$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-2;-1[$ يحقق : $g(\alpha)=0$.

3.التحقق حسابيا أن: -1.48<a<-1.47 .

$g(-1.48)=-0.12$ و $g(-1.47)=0.0035$.نلاحظ ان 0 محصور بين -0.12 و 0.0035 .

إذن : $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.

4. استنتاج إشارة g(x):

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\frac{x^3+x^2-4}{x^2+2}$.معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

2. التحقق أن $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

من أجل كل x من R لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x)(x^2+2)-2x(x^3+x^2-4)}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^4+6x^2+2x^3+4x-2x^4-2x^3+8x}{(x^2+2)^2}=\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

3.استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$.نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	|	+	
x		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2	↗	$+\infty$

4.أ.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة y=x+1 مستقيم مقارب مائل لـ (Cf) عند $+\infty$ و $-\infty$:

-2

$\lim$ [

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2-4-x^3-x^2-2x-2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-6}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لـــ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة $[f(x)-x]$ أيإشارة $\dfrac{-2x-6}{x^2+2}$,إشارة $\dfrac{-2x-6}{x^2+2}$ من إشارة البسط . نلخص إشارة $[f(x)-x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$		$+\quad 0$	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-3;-2)$	(C_f) تحت (Δ)

5. تبيين ان المنحنى يقبل مماسين موازيين لـــ (Δ) :

المعادلة $f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}=1$ ومنه $x^4+6x^2+12x=(x^2+2)^2$ ومنه $x^4+6x^2+12x=x^4+4x^2+4$ ومنه $x^2+6x-2=0$. $\Delta=44\succ 0$ ومنه فالمعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلين متمايزين إذن يوجد مماسين موازيين لـــ(Δ) .

6. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا:

• f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و من ثم على المجال $[1.3;1.4]$:

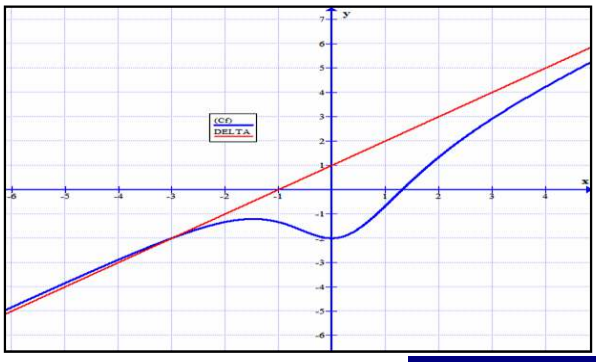
و لدينا : $f(1.3)=-.03\prec 0$ و $f(1.4)=0.17\succ 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1.3;1.4[$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا :

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

7.إنشاء (Δ) والمنحنى (Cf) $f(\alpha)=-1.2$, $f(0)=-2$



حل التمرين -6-

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=-x^3+3x^2-3x+2$.

1.حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3+3x^2-3x+2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^3=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3+3x^2-3x+2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=-3x^2+6x-3$. $-3x^2+6x-3=0$ ، $\Delta=0$ ، $x=1$.

و منه $g'(x)\le 0$ من اجل كل x من $\Re$. الدالة g متناقصة تماما على $\Re$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

إشارة $g(-x)$:

$g(-x)\prec 0$ اذا كان $2\succ -x$ و منه $-2\prec x$ و $g(-x)\succ 0$ اذا كان $2\prec -x$ و منه $-2\succ x$ و $g(-x)=0$ اذا كان $2=-x$ و منه $x=-2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}$

1.حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لـ (C_f).

2. التحقق أن $f'(x)=\dfrac{2g(-x)}{(x+1)^3}$:

من أجل كل x من $R-\{-1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2+3)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2+3)\right]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x+1)^3}=\frac{2((-x)^3+3(-x)^2+3(-x)+2)}{(x+1)^3}=\frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$$

3. استنتاج اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط والمقام . نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g(-x)$	$-$		0	$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$		0	$-$	‖	$+$	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $[-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-2;-1]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	‖	↗	$+\infty$

4.تبيين أن $f(x)=2x+2-\dfrac{1}{(x+1)^2}$:

$$2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(2x+2)(x^2+2x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}=f(x)$$

5.أ.تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=2x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (Cf) عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}-(2x+2)\right]=\lim_{|x|\to-\infty}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

، $\frac{-1}{(x+1)^2} \prec 0$ إذن (C_f) تحت (Δ) في المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$.

6. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و من ثم على المجال $[-0.3;-0.2]$:

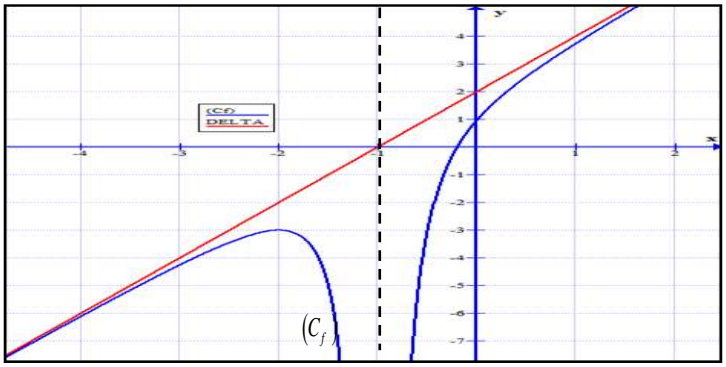
و لدينا : $f(-0.3)=-0.64 \prec 0$ و $f(-0.2)=0.0375 \succ 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-0.3;-0.2[$ حلا وحيدا α .

تفسير النتيجة هندسيا :

α هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

7.انشاء (Δ) و (Cf) ، $f(\alpha)=0$ ، $f(0)=1$



(Δ)

8. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=2x+m$:

حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=2x+m$ (مناقشة مائلة)

- إذا كان $m \in]-\infty;1[$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين .
- إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما و حلا سالبا.
- إذا كان $m \in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .
- إذا كان $m \in [2;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

حل التمرين -7-

الجزء الأول : g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=ax^3+bx^2+c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

1. بقراءة بيانية : أ. شكل جدول تغيرات g .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

ب.عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.

$g(0)=-2$ ، $g(2)=-6$ ، $g'(0)=0$ ، $g'(2)=0$

$g'(1)$ هو معامل توجيه المماس (D) : $g'(1)=\frac{-1-(-4)}{0-1}=-3$

$g''(1)$: نلاحظ أن المماس (D) يخترق المماس في $A(1;-4)$ ، إذن A نقطة انعطاف و بالتالي : $g''(1)=0$

ج. اكتب معادلة لـ (D) :

معادلة (D) هي : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و لدينا $g(1)=-4$ و $g'(1)=-3$

و منه $y=-3(x-1)-4$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=-3x-1$

د . حل المتراجحة الآتية $g'(x) \prec 0$: $x \in]0;2[$

2. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$:

لدينا من أج

$\begin{cases} g(0)=-2 \\ g(1)=-4 \\ g'(2)=0 \end{cases}$ لدينا : $\begin{cases} c=-2 \\ a+b-2=-4 \\ 12a+4b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ a+b=-2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ -a-b=2.....(1) \\ 3a+b=0.....(2) \end{cases}$ ومنه :

بجمع (1) و (2) نجد : $2a=2$ ومنه $a=1$

نعوض قيمة a في (1) نجد $-2+b=-2$ و منه $b=-3$

اذن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=x^3-3x^2-2$

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 :

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3.1:3.2]$ و لدينا : $\begin{cases} g(3.1)\prec 0 \\ g(3.2)\succ 0 \end{cases}$ أي $g(3.1)\times g(3.2)\prec 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\Re$ حلا وحيدا α حيث $3.1\prec\alpha\prec 3.2$.

4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=3x^2-6x$ و $g''(x)=6x-6$

$g''(x)>0$ من أجل $x\prec 1$ و $g''(x)<0$ من أجل $x\succ 1$ و $g(1)=-4$

g'' تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1;-4)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.$

$\lim\limits_{\substack{\prec \\ x\to 1}} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{\substack{\succ \\ x\to 1}} f(x)=+\infty$

⇦ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ (C_f).

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

من أجل كل x من $R-\{1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x-1)^2-2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left[(3x^2)(x-1)-2(x^3+1)\right]}{(x-1)(x-1)^3}=\frac{(3x^2)(x-1)-2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3-2}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-2}{(x-1)^3}=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

استنتج اتجاه تغير f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	
$(x-1)^3$		- ‖	+		+
$f'(x)$	+	‖	0	-	0 +

f متزايدة تـ

x	$-\infty$		1		α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

حساب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ **:**

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1-x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

استنتاج أن (C_f) **يقبل م م مائل** (Δ) **يطلب تعيين معادلته :**

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x=2$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x-2=0$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

.أدرس وضعية (C_f) **بالنسبة لـ** (Δ) **:**

$$f(x)-(x+2)=\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}-2=\frac{2x^2-x+1-2(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-x+1-2x^2+4x-2}{(x-1)^2}=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1	
$f(x)-y$	-		0	+	||	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) يقطع $B\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

4. بيان أن $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ **:**

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha^2-2=0$ ومنه $\alpha^3=3\alpha^2+2$.

من جهة أخرى : $f(\alpha)=\frac{\alpha^3+1}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3\alpha^2+2+1}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3\alpha^2+3}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3\alpha^2-6\alpha+3+6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه

$f(\alpha)=\frac{3(\alpha^2-2\alpha+1)+6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3(\alpha-1)^2+6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2}+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ **:**

لدينا $3.1\prec\alpha\prec3.2$ ومنه $2.1\prec\alpha-1\prec2.2$ ومنه $4.41\prec(\alpha-1)^2\prec4.84$ ومنه $0.2\prec\frac{1}{(\alpha-1)^2}\prec0.22$ ومنه $1.2\prec\frac{6}{(\alpha-1)^2}\prec1.32$

ومنه $1.2\times3.1\prec\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\prec1.32\times3.2$ ومنه $3+3.72\prec3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\prec3+4.22$ إذن $6.72\prec f(\alpha)\prec7.22$.

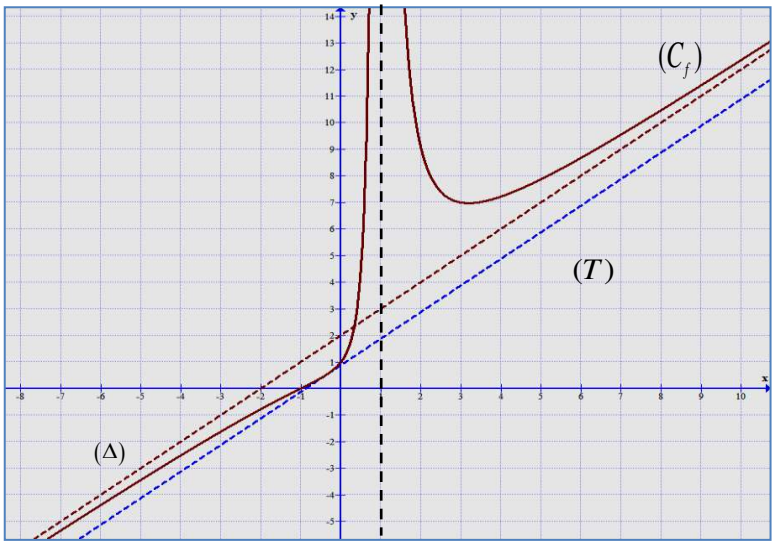
5. تبيين أن: (C_f) **يقبل مماسا** (T) **موازيا لـ** (Δ) **:**

$f'(x)=1$ و منه $\frac{x^3-3x^2-2}{(x-1)^3}=1$ و منه $x^3-3x^2-2=(x-1)^3$ و منه $x=\frac{-1}{3}$

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=\frac{-1}{3}$.

معادلة (T) هي : $y=f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)$ و منه $y=1(x+\frac{1}{3})+\frac{13}{24}$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=x+\frac{7}{8}$

6. حساب $f(-1)$ ثم انشاء (Δ) و المنحنى (C_f) :



7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$ (المناقشة أفقية)

⇦ إذا كان $m\in]-\infty;f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا . ⇦ إذا كان $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلان .

⇦ إذا كان $m\in]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة تقبل 3 حلول.

و المعادلة $f(x)=x+m$.

⇦ إذا كان $m\in]-\infty;\frac{7}{8}[$ لا توجد حلول . ⇦ إذا كان $m=\frac{7}{8}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا .

⇦ إذا كان $m\in]\frac{7}{8};2[$ المعادلة تقبل حلان . ⇦ إذا كان $m=2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

⇦ إذا كان $m\in]2;+\infty[$ المعادلة تقبل حلان .

8. h الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

⇦ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة) :

من أجل كل x من $R-\{1\}$ لدينا ، $h'(x)=2\times[f'(x)]\times[f(x)]$

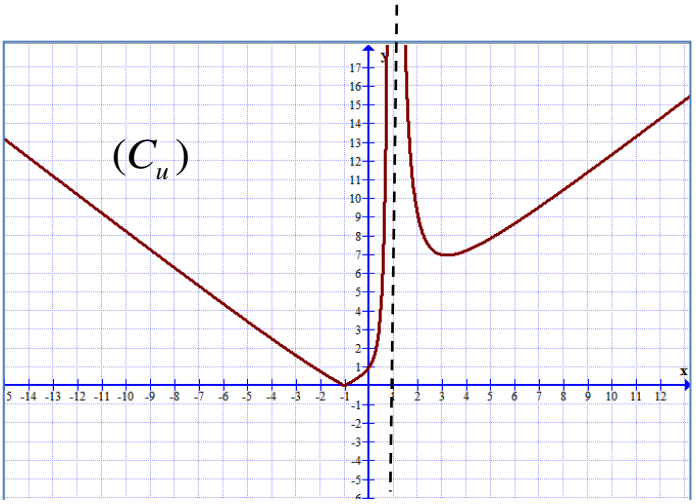
x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	‖	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$h'(x)$	$-$		0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;1]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $]1;\alpha]$.

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	‖	$+\infty$ ↘	$[f(\alpha)]^2$	↗	$+\infty$

9. u **الدالة المعرفة على المجال** $R-\{1\}$ **كما يلي :**

$u(x)=|f(x)|$ **هو التمثيل البياني للدالة** u . (C_u)

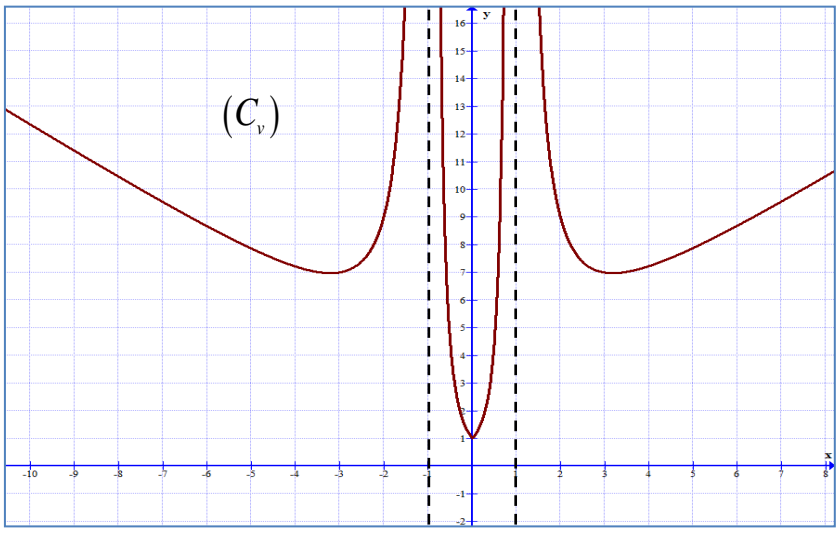


⇦ انشاء (C_u) **انطلاقا من** (C_f) **:**

يكون (C_u) منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل .

يكون (C_u) مناظر لـ (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل .

10. v **الدالة المعرفة على المجال** $R-\{-1;1\}$ **كما يلي :** $v(x)=f(|x|)$ **هو التمثيل البياني للدالة** v . (C_v)



⇦ بين أن v **زوجية**

من اجل $x\in D_u$ ، $-x\in D_u$ و:

$v(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=v(x)$. إذن الدالة u زوجية .

أنشاء (C_v) **انطلاقا من** (C_f) **:**

يكون (C_v) منطبقا على (C_f) في المجال $]-\infty;-1[\cup]0;1[$ ، و بما أن الدالة u زوجية فإن منحنيها منتاظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

11. k **الدالة المعرفة على المجال** $R-\{2\}$ **كما يلي :** $k(x)=f(x-1)+2$ **هو التمثيل البياني للدالة** k . (C_k)

⇦ اشرح كيفية انشاء (C_k) **انطلاقا من** (C_f) **.**

$k(x)=f(x-1)+2$ من الشكل $k(x)=f(x+a)+b$ مع $a=-1$ و $b=2$.

إذن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1;-2)$.

وفقكم الله تلاميذ بكالوريا 2025