

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

-النهايات-

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال: $\lim_{x\to-\infty}(2x^2+x+3)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=+\infty$

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2}\right)=3$$

حالات عدم التعيـــين:

① $\infty-\infty$ ② $0\times\infty$ ③ $\frac{\infty}{\infty}$ ④ $\frac{0}{0}$

الخليل للرياضيات

طرق إزالة حالات عدم التعيـــين:

1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ حيث: $f(x_0)=g(x_0)=0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهما على الشكل: $(x-x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

مثال 1: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)=\frac{11}{4}$

مثال 2: $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-2x+4}{x-2}\right)=-3$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2+3x-7$ على الشكل: $(x-1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax+b$ ومنه:

$$(x-1)Q(x)=(x-1)(ax+b)=ax^1+(b-x)x-b$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b-a=3 \\ -b=-4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases}\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

الخليل للرياضيات

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

$$\begin{array}{r|l} x^3+8 & x+2 \\ \hline -x^3-2x^2 & x^2-2x+4 \\ \quad -2x^2+8 & \\ \quad +2x^2+4x & \\ \quad +4x+8 & \\ \quad -4x-8 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال: $p(x)=4x^2+3x-7$ ، $x_0=1$

معاملات $p(x)$	$c=-7$	$b=3$	$a=4$	
الجذر x_0			↓	$x_0=1$
معاملات $Q(x)$	$c'=0$	$b'=7$	$a'=4$	

$$\begin{cases} a'=a=4 \\ b'=aa'+b=1(4)+3=7 \\ c'=x_0b'+c=1(7)-7=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال1

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال2:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}\right) = -\frac{3}{2}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال4)

مثال3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^2-(x^2+x-2)}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)}\right) \quad (x\to+\infty \Rightarrow |x| = x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right) = \frac{1}{2}$$

الخليل للرياضيات

مثال4:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\Rightarrow(x\to-\infty\Rightarrow|x|=-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\underbrace{2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{\to1}\right)\right)=-\infty$$

2) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x-1};f(2)=1;f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

الخليل للرياضيات

مثال 2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)=1$$

$$f(x)=\sin(x)\,;f(0)=0;f'(x)=\cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f=v\circ u:\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}u(x)=b\\ \lim\limits_{x\to v}v(x)=c\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=c$$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}}_{f(x)}\right);\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}\left(\underbrace{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}_{u(x)}\right)=4\\ \lim\limits_{x\to 4}\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

النهايات بالمقارنة:

الحالة ①:

$$\begin{cases}g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$$

مثال:

احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+\cos(x)}{x+1}\right)$

$$-1 \le \cos(x) \le 1$$
$$\Rightarrow 2x-1 \le 2x+\cos(x) \le 2x+1$$
$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+1} \le \frac{2x+\cos(x)}{x+1} \le \frac{2x+1}{x+1}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \to +\infty)$ فإن: $(x+1>0)$

أما إذا كان $(x \to -\infty)$ فإن: $(x+1<0)$، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x+1)$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} \le \frac{2x+\cos(x)}{x+1} \le \frac{2x+1}{x+1} \\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+\cos(x)}{x+1} = 2$$

الحالة ②:

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2-\sin(x)}\right)$

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$
$$\Rightarrow -1 \le -\sin(x) \le 1$$
$$\Rightarrow 1 \le 2-\sin(x) \le 3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\sin(x)} \le 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{3} \le \frac{1}{2-\sin(x)} \le x$$

الخليل للرياضيات

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-\sin(x)} \geq \dfrac{x}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2-\sin(x)}\right) = +\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2 + x\cos(x))$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x\cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x \leq -2x^2 + \cos(x) \leq -2x^2 - x$$

$$\begin{cases} -2x^2 + \cos(x) - 2x^2 - x \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2 - x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(-2x^2 + \cos(x)) = -\infty$$

ملاحظة:

غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

الخليل للرياضيات

المستقيمات المقاربة:

المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي

(يوازي محور التراتيب)

① $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$

المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي

(يوازي محور الفواصل)

② $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ $\Rightarrow$

③ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$ $\Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

◄ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات