☆ مسائل شاملة حول الإحتمالات مع الحل ☆

المستوى: ثالثة شعب علمية يوم : 2022

تمرين ☆ السحب من صندوقين

يحتوي صندوق U_1 على سبع كريات منها خمس حمراء مرقمة بـ 1 ، 1، 1، 2 ، 0 و كرتين خضراوين مرقمة بـ 1 ،0 . و يحتوي صندوق U_2 على سبع كريات منها ثلاث حمراء مرقمة بـ 2 ، 2، 1 و أربع خضراء مرقمة بـ 2،1 ، 0، 0. (الكريات لا نفرق بينها باللمس)

I) نرمي زهر نرد غير مزيف ذا ستة اوجه مرقمة من 1 إلى 6 ، بحيث إذات ظهر الرقمان 2 و 4 نسحب عشوائيا كرتين من الصنوق U_1 على التوالي دون إرجاع ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

❶ أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A: "سحب كرتين من نفس اللون ".

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم ".

C: "سحب كرة حمراء على الأقل ".

$A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون و تحملان نفس الرقم "

❷ هل الحادثتان A و B مستقلتان .علل .

❸ علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس الرقم ، ماهو إحتمال أن تكون الكريتين من الصندوق U_1.

II) نغير نوع التجربة ونسحب من الصندوقين U_1 و U_2 معا ،حيث نسحب من U_1 كرتين على التوالي مع الإرجاع ونسحب من U_2 كرتين على التوالي دون إرجاع .

❶ أحسب إحتمالات الحوادث السابقة : A: "سحب كرتين من نفس اللون من كل صندوق ".

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم من كل صندوق ".

C: "سحب كرة حمراء على الأقل من كل صندوق ".

$A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون و تحملان نفس الرقم من كل صندوق "

D: "الكرة المسحوبة ثانيا حمراء من كل صندوق ".

E: "سحب كرتين من U_1 جداء رقميهما معدوم ".

III) نعيد التجربة حيث نسحب الآن من U_1 كرتين في آن واحد و نضعها في U_2 ، ثم نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع من U_2 .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

❶ عين قيم X

❷ عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X .ثم أحسب $E(2023X + 1444)$

❸ أحسب الإحتمال : $p(lnX(X-2) = 0)$.

حل التمرين :

ضياء الدين

I) ملاحظة : في هذة الحالة كل صندوق له إحتمال سحب حيث $P(U_1)=\frac{1}{3}$ و $Pp(U_2)=\frac{2}{3}$.

عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_1 هي : $A_7^2=\boxed{42}$ و من الصندوق U_2 هي : $C_7^2=\boxed{21}$.

❶ حساب إحتمالات الحوادث :

$$P(A)=P(U_1)\times P_{u_1}(A)+P(U_1)\times P_{u_1}(A)=\frac{1}{3}\times\frac{A_5^2+A_2^2}{A_7^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\boxed{\frac{29}{63}}$$

$$P(B)=P(U_1)\times P_{u_1}(B)+P(U_1)\times P_{u_1}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{A_4^2+A_2^2}{A_7^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2+C_2^2+C_2^2}{C_7^2}=\boxed{\frac{17}{63}}$$

$$P(C)=P(U_1)\times P_{u_1}(C)+P(U_1)\times P_{u_1}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{\left(\underbrace{\boxed{2}}_{\text{م ت}}\times A_5^1\times A_2^1\right)+A_5^2}{A_7^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^1\times C_4^1+C_3^2}{C_7^2}=$$

$$\boxed{\frac{40}{63}}.$$

$$P(A\cap B)=P(U_1)\times P_{u_1}(A\cap B)+P(U_1)\times P_{u_1}(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{A_3^2}{A_7^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_2^2+C_2^2}{C_7^2}=\boxed{\frac{7}{63}}$$

❷ لدينا $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ وعليه A و B حادثتان غير مستقلتين .

❸ $P_B(U_1)=\frac{P(U_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(U_1)\times P_{u_1}(B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{A_4^2+A_2^2}{A_7^2}}{\frac{17}{63}}=\boxed{\frac{7}{17}}$.

II) ملاحظة : عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوقين معا هو : $7^2\times A_7^2=\boxed{2058}$.

حساب الإحتمالات :

$$P(A)=\frac{(5^2+2^2)\times(A_3^2+A_4^2)}{7^2\times A_7^2}=\boxed{\frac{87}{343}}$$

$$P(B)=\frac{(4^2+2^2+1^2)\times(A_3^2+A_2^2+A_2^2)}{7^2\times A_7^2}=\boxed{\frac{5}{49}}$$

$$P(C)=\frac{(\boxed{2}\times5^1\times2^1+5^2)\times(\boxed{2}\times A_3^1A_4^1+A_3^2)}{7^2\times A_7^2}=\boxed{\frac{225}{343}}$$

$$P(A\cap B)=\frac{(3^2+1^2+1^2+1^2+1^2)\times(A_2^2+A_2^2)}{7^2\times A_7^2}=\boxed{\frac{26}{1029}}$$

$P(D)=\frac{(5^2+2^1\times5^1)\times(A_3^2+A_4^1A_3^1)}{7^2\times A_7^2}=\boxed{\frac{15}{49}}$ (لايوجد معامل ترتيب هنا لأن الترتيب محدد .)

$P(E)=\frac{\left(2^2+\boxed{2}\times2^1\times5^1\right)\times A_7^2}{7^2\times A_7^2}=\boxed{\frac{24}{49}}$.

III) ❶ قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0,1,2\}$.

❷ تعيين قانون إحتمال X :

$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{A_6^2}{A_9^2}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{175}{756}}$.

$P(X=1)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{\boxed{2}\times A_4^1A_5^1}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{\boxed{2}\times A_6^1A_3^1}{A_9^2}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{\boxed{2}\times A_4^1A_5^1}{A_9^2}=\boxed{\frac{418}{756}}$.

$p(X=2)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{A_3^2}{A_9^2}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{163}{756}}$.

ضياء الدين

❸ حساب الأحتمال $p(lnX(e^{2X}-e^{X})=0)$:

لدينا $lnX(e^{2X}-e^{X})=0$ يكافىء $lnX=0$ أو $2e^{X}\left(e^{X}-1\right)=0$ يكافىء $X=1$ أو $X=0$ ومنه :

$p(lnX(e^{2X}-e^{X})=0)=P(X=0)+P(X=1)=\boxed{\frac{593}{756}}$.

العمراني ضياء الدين

تـمرين ☆ ☆ تشكيل اللجان

I) قسم 3 تقني رياضي به 25 تلميذ منهم 14 ذكر و 11 أنثى .

يراد تشكيل لجنة بثلاث أعضاء تضم رئيسا - نائبا - أمينا .

❶ ماهو عدد اللجان التي يمكت تشكيلها .

❷ أحسب إحتمالات الحوادث التالية :

A: "اللجنة مشكلة من الذكور فقط ".

B: "اللجنة مشكلة من نفس الجنس ".

C: " أعضاء اللجنة مشكلة من جنسين مختلفين ".

D: "الرئيس ذكر".

E: "الرئيس ذكر و الأمين تلميذة ".

F: "الرئيس ذكر أو الأمين تلميذة ".

G : "اللجنة تضم ذكرا على الاقل ".

❸ أحسب إحتمال أن يكون الرئيس ذكرا علما أن أعضاء اللجنة من جنسيين مختلفين .

II) يوجد من بين التلاميذ تلميذ يسمى " بلال " و تلميذة تسمى " زينب " .نعتبر الحوادث :

H: "بلال و زينب لا يجتمعان معا في نفس اللجنة ". A_1 : "بلال عضو باللجنة ".

A_2 : "زينب رئيسا للجنة ". A_3 : "اللجنة بدون بلال و زينب ".

❷ أحسب الإحتمالات الشرطية التالية : $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$

III) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الإناث فيها .

❶ عين قيم X .

❷ عين قانون إحتمال X .

❸ أحسب $E(X)$ و $V(X)$.

❶ أحسب الإحتمال : $p(X^2 - X = 0)$.

حل التّمرين ☆ ☆

I) ❶ عدد اللجان الممكن تشكيلها هو : $A_{25}^3 = \boxed{13800}$.

❷ حساب الإحتمالات :

$$P(A) = \frac{A_{14}^3}{A_{25}^3} = \boxed{\frac{91}{575}}.$$

$$P(B) = \frac{A_{14}^3 + A_{11}^3}{A_{25}^3} = \boxed{\frac{23}{100}}.$$

بما أن C الحادثة العكسية لـ B فإن $P(C) = 1 - P(B) = \boxed{\frac{77}{100}}$.

$$P(D) = \frac{A_{14}^1 \times A_{24}^2}{A^3} = \boxed{\frac{14}{25}}.$$

$\boxed{77}$

$$P(F)=P(D\cup F_1)=P(D)+\underbrace{P(F_1)}_{\text{التلميذة امينة}}-\underbrace{P(D\cap F_1)}_{\text{P(E)}}=\frac{A_{14}^1\times A_{24}^2}{A_{25}^3}+\frac{A_{11}^1\times A_{24}^2}{A_{25}^3}-\frac{A_{14}^1\times A_{11}^1\times A_{23}^1}{A_{25}^3}=$$

$$\boxed{\frac{223}{300}}.$$

$$P(G)=\frac{\left(\underbrace{3}_{\text{معامل ترتيب}}\times A_{14}^1\times A_{11}^2\right)+\left(3\times A_{14}^2\times A_{11}^1\right)+A_{14}^3}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{427}{460}}.$$

يمكن حساب $P(G)$ بطريقة ثانية بإستعمال الحادثة العكسية لـ G وهذا أسهل حيث: $\overline{G}$ "باللجنة ثلاث إناث ".

وعليه $P(G)=1-P(\overline{G})=1-\frac{A_{11}^3}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{427}{460}}$.

❸ حساب إحتمال أن يكون الرئيس ذكرا علما أن أعضاء اللجنة من جنسيين مختلفين أي $P_C(D)$:

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{A_{14}^1\times A_{11}^2+\left(A_{14}^1\times\left(2\times A_{13}^1\times A_{11}^1\right)\right)}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{231}{575}}.$$

II) ❶ حساب الإحتمالات الشرطية التالية $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$ ، $P_H(A_1)$:

☆ لدينا $P_H(A_1)=\frac{P(H\cap A_1)}{P(H)}$ ولدينا $P_H(A_1)=$ إذن $\begin{cases}P(H\cap A_1)=\dfrac{3\times A_1^1\times A_{23}^2}{A_{25}^3}=\dfrac{11}{100}\\ P(H)=\dfrac{3\times A_2^1\times A_{23}^2+A_{23}^3}{A_{25}^3}=\dfrac{99}{100}\end{cases}$

$$\boxed{\frac{\frac{11}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{1}{9}}$$

☆ لدينا $P_H(A_2)=\frac{P(H\cap A_2)}{P(H)}$ ولدينا $P_H(A_2)=\frac{\frac{11}{300}}{\frac{99}{100}}=$ إذن $\begin{cases}P(H\cap A_2)=\dfrac{A_1^1\times A_{23}^2}{A_{25}^3}=\dfrac{11}{300}\\ P(H)=\dfrac{99}{100}\end{cases}$

$\boxed{\frac{1}{27}}$. (ل لا يوجد معامل ترتيب هنا لان رتبة زينب محددة .).

☆ $P_H(A_3)=\frac{P(H\cap A_3)}{P(H)}$ ولدينا $P_H(A_1)=\frac{\frac{77}{100}}{\frac{99}{100}}=\boxed{\frac{7}{9}}$ إذن $\begin{cases}P(H\cap A_3)=\dfrac{A_{23}^3}{A_{25}^3}=\dfrac{77}{100}\\ P(H)=\dfrac{99}{100}\end{cases}$

III) ❶ تعيين قيم X : $\{0,1,2,3\}$.

❷ تعيين قانون إحتمال X :

☆ $P(X=0)=\frac{A_{14}^3}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{91}{575}}$.

☆ $P(X=1)=\frac{3\times A_{11}^1\times A_{14}^2}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{1001}{2300}}$.

☆ $P(X=2)=\frac{3\times A_{11}^2\times A_{14}^1}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{77}{230}}$.

☆ $P(X=3)=\frac{A_{11}^3}{A_{25}^3}=\boxed{\frac{33}{460}}$.

❸ حساب $E(X)$ و $V(X)$:

$V(X)=\sum_{i=1}^{4} p_i(x_i)^2-E^2(X)=0^2\times\frac{91}{575}+1^2\times\frac{1001}{2300}+2^2\times\frac{77}{230}+3^2\times\frac{33}{460}=\boxed{2{,}42}$.

❹ حساب $P(X^2-X^{=}0)$:

لدينا $X^2-X^{=}0$ يكافىء $X=1$ أو $X=0$ ومنه $P(X^2-X^{=}0)=P(X=1)+P(X=0)=\frac{91}{575}+\frac{1001}{2300}=\boxed{\frac{273}{460}}$.

العمراني ضياء الدين

تمرين ☆☆☆

I) يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ، 1 ، 1 وثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 وكرتين سوداويين تحملان الرقمين : 0 ، 2 . الكرات كلها متماثلة ولا نفرق بينها باللمس . نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع .

❶ احسب احتمال الحوادث التالية :

A: الكرات المسحوبة من نفس اللون ، B: ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث ،

C: ظهور ثلاث أرقام مجموعها عدد فردي ، D: الكرة المسحوبة ثانيا حمراء .

❷ بين أن : $p(B \cap D) = \frac{17}{84}$ ثم إستنتج $P(A \cup B)$

❸ علما أن الرقم 1 ظهر مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث ، أحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا حمراء .

❹ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق .

☛ عين قيم المتغير العشوائي X واكتب قانون احتماله .

☞ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

II) ننزع الآن من الصندوق الكرتين السوداوتين فتبقى فيه ثلاث كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء . نسحب من الصندوق كرة n مرة على التوالي مع الإرجاع في كل مرة . (n عدد طبيعي غير معدوم ويمثل عدد السحبات .) وليكن p_n هو إحتمال الحادثة A_n " الكرات المسحوبة من نفس اللون . "

❶ بين أن المتتالية (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $P_1 = 1$.

☛ ماهو أكبر عدد ممكن من السحبات بحيث يكون إحتمال الحادثة " الكرات المسحوبة من نفس اللون " أكبر أو يساوي العدد $\frac{1}{16}$.

☞ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P(n)$ ، ماذا تستنتج .

❷ من أجل n غير معدوم ، احسب بدلالة n إحتمال ان تكون في كل السحبات على الأقل كرة واحدة حمراء .

حل التّمرين ☆☆☆

I) ❶ حساب الإحتمالات :

☆ عدد الحالات الممكنة هو $A_8^3 = \boxed{336}$

☆ $P(A) = \frac{A_3^3 + A_3^3}{A_8^3} = \boxed{\frac{1}{28}}$.

☆ $P(B) = \frac{\boxed{3} \times A_3^1 \times A_5^2}{A_8^3} = \boxed{\frac{15}{28}}$.

☆ $P(C) = \frac{\boxed{3} \times A_3^1 \times A_5^2 + A_3^3}{A_8^3} = \boxed{\frac{31}{56}}$

☆ $P(D) = \frac{A_3^3 + \boxed{2} \times A_3^2 A_5^1 + A_5^2 A_3^1}{A_8^3} = \boxed{\frac{3}{8}}$.

❷ إثبات أ $P(B \cap D) = \frac{17}{}$

$P(B\cap D)=\dfrac{A_1^1\times A_5^2+\left(A_2^1\times\left(\boxed{2}\times A_3^1A_4^1\right)\right)}{A_8^3}=\boxed{\dfrac{17}{84}}$.

☛ إستنتاج $P(B\cup D)$ و $P_B(D)$:

لدينا : $P(B\cup D)=P(A)+P(B)-P(B\cap D)=\dfrac{1}{28}+\dfrac{15}{28}-\dfrac{17}{84}=\boxed{\dfrac{31}{84}}$.

☞ حساب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانيا حمراء علما أن الرقم 1 ظهر مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث :

$P_B(D)=\dfrac{P(B\cap D)}{P(B)}=\dfrac{\frac{17}{84}}{\frac{15}{28}}=\boxed{\dfrac{17}{45}}$.

❸ ☛ تعيين قيم X : $X\in\{0,1,2\}$.

☞ تعيين قانون إحتمال X :

$P(X=0)=\dfrac{\boxed{3}\times A_2^2\times A_6^1}{A_8^3}=\boxed{\dfrac{3}{28}}$.

$P(X=1)=\dfrac{\boxed{3}\times A_2^1\times A_6^2}{A_8^3}=\boxed{\dfrac{15}{28}}$.

$P(X=2)=\dfrac{A_6^3}{A_8^3}=\boxed{\dfrac{10}{28}}$.

✌ $E(X)=\sum_{i=1}^{3}p_ix_i=0\times\dfrac{3}{28}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{10}{28}=\boxed{\dfrac{5}{4}}$.

II) ❶ إثبات أن المتتالية (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $P_1=1$:

لدينا : $P(A_n)=P(n)=\dfrac{3^n+3^n}{6^n}=2\times\dfrac{3^n}{6^n}=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ إذن : $P_{n+1}=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}P(n)$ وعليه المتتالية (P_n) هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{2}}$ و حدها الأول $\boxed{1}$ $p_1=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=1$.

☛ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ نستنتج أنه كلما كان nعدد السحبات كبير جدا كان إحتمال الحادثة " الكرات االمسحوبة من نفس اللون " مستحيلا .

☞ تعيين أكبر عدد ممكن من السحبات بحيث يكون إحتمال الحادثة " الكرات االمسحوبة من نفس اللون " أكبر أو يساوي العدد $\dfrac{1}{16}$.

معناه أن : $P(n)\geq\dfrac{1}{16}$ يكافىء $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geq\dfrac{1}{16}$ يكافىء $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geq\dfrac{1}{32}$ يكافىء $e^{nln\frac{1}{2}}\geq\dfrac{1}{32}$ معناه $nln(2)\leq ln(32)$ أي : $n\leq5$ وعليه أكبر عدد ممكن من السحبات هو : $\boxed{5}$.

❷ الحساب بدلالة n إحتمال الحادثة H : " في كل السحبات على الأقل كرة واحدة حمراء " :

أي عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها يتغير من 1 إلى n .ولحساب الإحتمال نستعمل الحادثة العكسية $\overline{H}$: " في كل السحبات لاتوجد أي كرة حمراء " ومنه : $P(H)=1-P(\overline{H})=1-\dfrac{3^n}{6^n}=\boxed{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

رمضان كريم

العمراني ضياء الدين