تمرين : 2 ثانوي شعبة – رياضيات -

نعتبر كثيري الحدود P و Q

$$Q(x) = 2x^4 - 2x^2 - 4 \quad ، \quad P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2)$$

حيث α عدد حقيقي .

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$.

2) عين درجة كثير الحدود P ، ثم بين أن α جذر لـ $P(x)$.

3) بين أن : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$.

4) استنتج حلول المعادلة $P(|x| + 1) = 0$.

حل التمرين :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$:

لدينا : $2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$ ، نضع : $t = x^2$

نجد : $2t^2 - 2t - 4 = 0$ ، باستعمال المميز المختصر نجد :

$\Delta = b'^2 - ac$ ، $\Delta = (-1)^2 - 2(-4)$ ، $\Delta = 9$ و منه :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2} = 2 \\ \text{او} \\ t_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2} = -1 \end{cases}$$

لدينا : $t = x^2$ ومنه : $t_2 = -1 = x^2{}_2$ (مرفوض)

$t_1 = 2 = x^2{}_1$ (مقبول)

ومنه : $x_1 = \sqrt{2}$ و $x'_1 = -\sqrt{2}$.

اذن : $\boldsymbol{S = \{-\sqrt{2}; +\sqrt{2}\}}$.

2) تعيين درجة كثير الحدود P :

$$P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2)$$

$P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2\,x^5 - 2x^3 - 4x$ اذن درجة $P(x)$ هي : 5 .

تبيين أن α جذر لـ $P(x)$: $P(x) = -2\alpha(\alpha^4 - \alpha^2 - 2) + 2\alpha(\alpha^4 - \alpha^2 - 2) = 0$

3) تبيين أن : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

لدينا : α جذر لـ $P(x)$ و $P(x)$ من الدرجة 5 ومنه :

$$\boldsymbol{P(x) = (x - \alpha)(ax^5 + bx^3 + cx^2 + dx + e)}$$

ولدينا : $P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2)$

$$P(x) = -2\alpha x^4 + 2\alpha x^2 + 4\alpha + 2x^5 - 2x^3 - 4x$$
$$P(x) = 2x^5 - 2\alpha x^4 - 2x^3 + 2\alpha x^2 - 4x + 4\alpha$$

باستعمال طريقة هورنر :

	2	-2α	-2	2α	-4	4α
a	0	2α	$\underline{0}$	-2α	0	-4α
	2	0	-2	0	-4	0

نجد : $\boldsymbol{P(x) = (x - \alpha)(2x^4 - 2x^2 - 4)}$

اذن : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

استنتج حلول المعادلة $P(x)=0$:

لدينا : $P(x)=0$ **معناه :** $(x-\alpha)Q(x)=0$ ومنه : اذن $\begin{cases} x-\alpha=0 \\ \text{او} \\ Q(x)=0 \end{cases}$

. $\boldsymbol{S=\{\alpha\ ;\ -\sqrt{2}\ ;+\sqrt{2}\}}$

4) استنتج حلول المعادلة $P(|x|+1)=0$:

لدينا : $P(|x|+1)=0$ معناه: $|x|+1=\begin{cases}\alpha \\ -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}\end{cases}$ ومنه:(مرفوض) $|x|=\begin{cases}\alpha-1 \\ -\sqrt{2}-1 \\ +\sqrt{2}-1\end{cases}$

ومنه : $x=\begin{cases}\alpha-1 \\ -\alpha+1 \\ \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}+1\end{cases}$ اذن : $\boldsymbol{S=\{-\sqrt{2}+1\ ;\sqrt{2}-1\ ;\alpha-1;-\alpha+1\}}$