محور: المتتاليات العددية

مذكرة 01 المتتالية العددية

مذكرة 02 توليد متتالية

مذكرة 03 المتتاليات الحسابية: التعريف، الحد العام، الوسط الحسابي

مذكرة 04 حساب مجموع الحدود الأولى من متتالية حسابية

مذكرة 05 المتتاليات الهندسية: التعريف، الحد العام، الوسط الهندسي

مذكرة 06 حساب مجموع الحدود الأولى من متتالية هندسية

مذكرة 07 مفهوم المتتالية الرتيبة: تعيين اتجاه تغير متتالية

مذكرة 08 تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية

مذكرة 09 تحديد اتجاه تغير متتالية هندسية

مذكرة 10 استعمال المتتاليات الحسابية في حل المشكلات اليومية

مذكرة 11 المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$

مذكرة 12 المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$

مذكرة 13 حل مشكلات تُستعمل فيها متتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$

⋆ أستاذ الرياضيات ⋆

مذكرة رقم : 01

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون
ميدان التعلم: التحليل
المحور: المتتاليات العددية
الموضوع: عموميات على المتتاليات

ثانوية:
الموسم الدراسي: 2026 / 2027
التاريخ:
المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**نشاط مقترح :** (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = 5n - 2$ 1. أحسب قيمة الحدود : u_1، u_2، u_3 2. أكتب بدلالة n الحدود: u_{n+1}، u_{n+2} **مناقشة النشاط :** 1. حساب قيمة الحدود: • حساب u_1: نعوض $n = 1$ في العبارة: $u_1 = 5(1) - 2 = 5 - 2 = 3$ • حساب u_2: نعوض $n = 2$ في العبارة: $u_2 = 5(2) - 2 = 10 - 2 = 8$ • حساب u_3: نعوض $n = 3$ في العبارة: $u_3 = 5(3) - 2 = 15 - 2 = 13$ 2. كتابة الحدود بدلالة n: • كتابة u_{n+1} بدلالة n: نستبدل كل n بـ $(n+1)$ مع وضع الأقواس: $u_{n+1} = 5(n+1) - 2$ بنشر والتبسيط نجد : $u_{n+1} = 5n + 3$ • كتابة u_{n+2} بدلالة n: $u_{n+2} = 5n + 8$		

بناء التعلمات	**1. مفهوم متتالية :** **تعريف :** متتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$. **ترميز :** • نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بالمتتالية u بـ: u_n بدلا من $u(n)$ • نرمز إلى المتتالية u بـ: $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت معرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 • نرمز إلى المتتالية u بـ: $(u_n)_{n\geq}$ أو (u_n) إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$. • يسمى u_n الحد العام للمتتالية u ويسمى u_{n_0} حدها الأول • إذا كانت المتتالية u_n معرفة على $\mathbb{N}$ نرمز إلى حدها الأول بالرمز u_0 **ملاحظة :** لابد من التمييز بين متتالية (u_n) و بين حدها العام u_n الذي هو عدد حقيقي		

مذكرة رقم : 02

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: التحليل	الموسم الدراسي: 2027 / 2026
المحور: المتتاليات العددية	التاريخ:
الموضوع: توليد متتالية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**نشاط مقترح :** 1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $$u_n = 2n + 1$$ لتكن f هي الدالة العددية المرفقة بالمتتالية (u_n) حيث $u_n = f(n)$ • عين عبارة الدالة f • أحسب قيمة الحدود : u_1، u_2، u_3 2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \end{cases}$ • أحسب قيمة الحدود v_1، v_2، v_3 **مناقشة النشاط :** 1. لدينا: $u_n = 2n + 1$ و: $u_n = f(n)$ إذن f هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب: $f(x) = 2x + 1$ حساب الحدود: $u_3 = 2 \times (3) + 1 = 7$, $u_1 = 2 \times (1) + 1 = 3$,$u_2 = 2 \times (2) + 1 = 5$ 2. لدينا: $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \end{cases}$ حساب الحدود: معرفة قيمة v_0 تسمح من حساب قيمة v_1 و هكذا فإن $$v_1 = v_0 + 3 = 2 + 3 = 5$$ معرفة قيمة v_1 تسمح من حساب قيمة v_2 و هكذا فإن $$v_2 = v_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$		

بناء التعلمات

طرق توليد متتالية :

1. توليد متتالية بالحد العام :

تعريف :
يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بوضع من أجل كل عدد طبيعي n مع $n \geq n_0$، $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[n_0;+\infty[$.

مثال :
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$u_n = 4n + 1$$

لدينا $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = 4x + 1$. العلاقة $u_n = 4n + 1$ تسمح من حساب قيمة كل الحدود، ومن أجل ذلك يكفي تعويض n على التوالي بـ 0، 1، 2، ...

$$u_0 = 4 \times 0 + 1 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \times 1 + 1 = 5 \quad ; \quad u_2 = 4 \times 2 + 1 = 9$$

2. توليد متتالية بعلاقة تراجعية :

تعريف :
يمكن تعريف متتالية بالتراجع و ذلك بإعطاء: قيمة الحد الأول، علاقة تراجعية تربط بين كل حدين متتابعين من المتتالية.

مثال :
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n - 2$ تسمح العلاقة $u_{n+1} = 3u_n - 2$ بحساب قيمة الحد u_{n+1} إذا علمت قيمة الحد الذي يسبقه u_n. معرفة قيمة u_0 تسمح من حساب قيمة u_1 و هكذا فإن

$$u_1 = 3 \times u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$$

معرفة قيمة u_1 تسمح من حساب قيمة u_2 و هكذا فإن

$$u_2 = 3 \times u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

تطبيق :
(u_n) : المتتالية العددية المعرفة بمايلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n;

$$u_{n+1} = 5u_n + 4$$

أحسب u_1، u_2 و u_3

الحل :

$$u_1 = 5u_0 + 4 = 5 \times 1 + 4 = 9 \; ; \; u_2 = 5u_1 + 4 = 5 \times 9 + 4 = 49$$

مذكرة رقم : 03

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: التحليل	الموسم الدراسي: 2026 / 2027
المحور: المتتاليات العددية	التاريخ:
الموضوع: المتتاليات الحسابية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**نشاط مقترح :** (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ إليك الخمس الحدود الأولى : $u_0 = 2$، $u_1 = 6$، $u_2 = 10$، $u_3 = 14$ و $u_4 = 18$. 1. اشرح كيفية الحصول على كل حد انطلاقًا من الحد الذي قبله 2. من أجل كل عدد طبيعي n اكتب u_{n+1} بدلالة u_n؟ ماذا تلاحظ **مناقشة النشاط :** 1. شرح كيفية الحصول على كل حد: • لدينا : $u_1 - u_0 = 6 - 2 = 4$. للحصول على u_1 نضيف 4 لأن: $u_1 = u_0 + 4$ • لدينا : $u_2 - u_1 = 10 - 6 = 4$. للحصول على u_2 نضيف 4 لأن: $u_2 = u_1 + 4$ • لدينا : $u_3 - u_2 = 14 - 10 = 4$. للحصول على u_3 نضيف 4 لأن: $u_3 = u_2 + 4$ نلاحظ أنه للحصول على أي حد، نضيف دائماً العدد الثابت 4 إلى الحد الذي يسبقه مباشرة 2. كتابة u_{n+1} بدلالة u_n: بما أن الانتقال يتم بإضافة 4، فإن العلاقة: $$u_{n+1} = u_n + 4$$ **ملاحظة :** العدد الثابت 4 يسمى أساس المتتالية ونرمز له بـ r ونكتب : $r = 4$. وتسمى (u_n) بالمتتالية الحسابية. معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$ **المتتالية الحسابية :** **تعريف :** نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$		

ملاحظة هامة :

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول u_0

أمثلة :

المتتالية (u_n) حيث أن $u_n = 3n + 5$ هي متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ وأساسها $r = 3$

المتتالية (u_n) حيث أن $u_n = -2n + 1$ هي متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها $r = -2$

طريقة :

لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية ، يكفي أن نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت و هو أساسها r

مثال :

لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية حيث: $u_n = 3n + 1$

نحسب الفرق: $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 1 - 3n - 1 = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$

1. الحد العام لمتتالية حسابية :

بناء التعلمات

مبرهنة :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي n

ملاحظات :

- إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n - 1)r$
- بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي الحد

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

- تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n

مثال :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $r = 3$. نريد كتابة (u_n) بدلالة n، يكفي التعويض:

$u_n = u_0 + (n - 0)r$ ومنه : $u_n = 2 + 3n$

بناء التعلمات

3. الوسط الحسابي :

خاصية :

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c

مثال : نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) حيث: $u_4=15$ و $u_2=7$

تسمح خاصية الوسط الحسابي بحساب الحد u_3

لدينا : $u_2+u_4=2u_3$

معناه : $7+15=2u_3$ أي: $u_3=\dfrac{22}{2}=11$

4. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن :

$$S=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

بصفة عامة : $S=$ (عدد الحدود) $\times\left(\dfrac{\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير}}{2}\right)$ حيث: عدد الحدود= دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1

مثال :

(u_n) متتالية حسابية بـ: $u_n=2n+1$. نريد حساب $S=u_0+\ldots+u_n$. عدد الحدود هو $n+1$ و عليه:

$$S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{2n+2}{2}\right)=(n+1)(n+1)$$

تطبيق "باك 2024" :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=5n-2$

1. احسب u_0 ، u_1 و u_2.
2. بيّن أن المتتالية (u_n) حسابية، ثم عيّن أساسها
3. تحقق أن: $u_0+u_1+\cdots+u_{405}=410263$

الحل :

1. $u_0=-2$,$u_1=3$,$u_2=8$
2. $u_{n+1}-u_n=(5(n+1)-2)-(5n-2)=5$. اذن المتتالية (u_n) حسابية
3. عدد الحدود : 406 و لدينا $u_{405}=5(405)-2=2023$

$$S=406\times\left(\frac{-2+2023}{2}\right)=203\times2021=410263$$

مذكرة رقم : 04	الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: التحليل	الموسم الدراسي: 2026 / 2027
المحور: المتتاليات العددية	التاريخ:
الموضوع: المتتاليات الهندسية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**نشاط مقترح :** (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$. إليك الحدود الأولى: $u_0 = 3$، $u_1 = 9$، $u_2 = 27$، $u_3 = 81$ و $u_4 = 243$. 1. اشرح كيفية الحصول على كل حد انطلاقًا من الحد الذي قبله 2. من أجل كل عدد طبيعي n، اكتب u_{n+1} بدلالة u_n 3. احسب: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ماذا تلاحظ؟ **مناقشة النشاط :** 1. شرح كيفية الحصول: $\frac{u_1}{u_0} = \frac{9}{3} = 3$. نضرب في 3 لأن $u_1 = u_0 \times 3$ وكذلك $\frac{u_2}{u_1} = \frac{27}{9} = 3$. نلاحظ أنه نضرب دائماً في 3 الحد الذي يسبقه 2. كتابة u_{n+1} بدلالة u_n: العلاقة تكتب: $$u_{n+1} = u_n \times 3$$ **ملاحظة :** العدد الثابت 3 يسمى أساس المتتالية ونرمز له بـ: $q = 3$. وتسمى (u_n) بالمتتالية الهندسية. معناه: $u_{n+1} = u_n \times q$ **1. المتتالية الهندسية :** **تعريف :** نقول أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 و أساسها q (q عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = v_n \times q$ **ملاحظة :** إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة إذا كان $q = 0$ فإن حدود المتتالية معدومة إبتداءً من الحد الثاني		

بناء التعلمات

طريقة :

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية : نثبت أن $v_{n+1} = v_n \times q$ أو نثبت أن النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت

مثال :

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة ب: $v_n = 4 \times 3^n$. لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية نحسب النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = 3$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$

2. الحد العام لمتتالية هندسية :

مبرهنة :

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 أساسها q عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n) هي $v_n = v_0 \times q^n$

ملاحظات :

إذا كان الحد الأول v_1 عبارة الحد العام $v_n = v_1 \times q^{n-1}$. بصفة عامة $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

مثال :

(v_n) هندسية بحدها الأول $v_0 = 3$ و أساسها $q = 4$. كتابة (v_n) بدلالة n: $v_n = 3 \times 4^n$

3. الوسط الهندسي :

خاصية :

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c

مثال :

(v_n) هندسية حيث: $v_1 = 4$ و $v_3 = 36$. لدينا : $v_2^2 = v_1 \times v_3 = 4 \times 36 = 144$.

ومنه: $v_2 = 12$

4. مجموع حدود متتالية من متتالية هندسية :

خاصية :

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن :

$$S = v_0 + ... + v_n = v_0 \times \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)$$

بصفة عامة : $S =$ الحد الأول $\times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}\right)$

تطبيق :

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 \times 4^n$

أ) احسب الحدود v_0 ، v_1 و v_2

ب) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 4

جـ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

بناء التعلمات

الحل :

أ) $v_0 = 3 \times 1 = 3$,$v_1 = 3 \times 4 = 12$,$v_2 = 3 \times 16 = 48$

ب) إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية: نحسب النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4$$

ومنه نستنتج أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$

جـ) حساب المجموع S_n: عدد الحدود = $n + 1$. بالتعويض نجد:

$$S_n = 3 \times \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right) = 4^{n+1} - 1$$

مذكرة رقم : 05	الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	**ثانوية:**
ميدان التعلم: التحليل	**الموسم الدراسي:** 2026 / 2027
المحور: المتتاليات العددية	**التاريخ:**
الموضوع: مفهوم المتتالية الرتيبة	**المدة الزمنية:**

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**1. إتجاه تغير المتتالية :** **تعاريف :** (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$. القول عن (u_n) أنها متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n \geq 0$. متناقصة يعني $u_{n+1}-u_n \leq 0$. ثابتة يعني $u_{n+1}-u_n = 0$ **ملاحظة هامة :** القول عن (u_n) أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة. **مثال :** لتكن (u_n) المعرفة بـ $u_n = 2n+3$. $u_{n+1}-u_n = (2n+5)-(2n+3) = 2$. بما أن $2 > 0$، فإن (u_n) متزايدة **ملاحظات :** توجد متتاليات ليست متزايدة و ليست متناقصة، نقول عنها أنها غير رتيبة مثل $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ **طريقة :** لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n): ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$، أو نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1 عندما تكون الحدود موجبة تمامًا، أو ندرس اتجاه تغير الدالة f في حالة $u_n = f(n)$		

مذكرة رقم : 06

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون

ميدان التعلم: التحليل

المحور: المتتاليات العددية

الموضوع: تحديد إتجاه تغير متتالية حسابية

ثانوية:

الموسم الدراسي: 2026 / 2027

التاريخ:

المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**1. إتجاه تغير متتالية حسابية :** **خاصية :** (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها r لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=r$ • إذا كان r سالبا تماما $(r<0)$ فإن المتتالية متناقصة تماما • إذا كان r موجبا تماما $(r>0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما • إذا كان r معدوما $(r=0)$ فإن المتتالية ثابتة **تطبيق :** (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_n=3n+1$ 1. أحسب u_0، u_1 و u_2. 2. بين أن (u_n) متتالية حسابية، عين إتجاه تغير (u_n) **الحل :** 1. حساب الحدود u_0، u_1 و u_2: $u_0=3(0)+1=1$ ، $u_1=3(1)+1=4$ ، $u_2=3(2)+1=7$ 2. أ) إثبات أنها حسابية: نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$: نكتب أولاً عبارة u_{n+1} بدلالة n: $u_{n+1}=3(n+1)+1=3n+3+1=3n+4$ الآن نحسب الفرق: $u_{n+1}-u_n=(3n+4)-(3n+1)=3$ اذن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\boxed{r=3}$ ب) تعيين اتجاه التغير : بما أن أساس المتتالية الحسابية موجب تماماً $\boxed{r=3>0}$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً		

مذكرة رقم : 07

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: التحليل	الموسم الدراسي: 2027 / 2026
المحور: المتتاليات العددية	التاريخ:
الموضوع: تحديد إتجاه تغير متتالية هندسية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**1. إتجاه تغير متتالية هندسية :** **خاصية :** (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول v_0 و أساسها q نعلم أن $v_{n+1} = v_0 q^{n+1}$ و $v_n = v_0 q^n$. نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} - v_n = v_0 q^n (q-1)$ و منه: • إذا كان $0 < q < 1$ وكان $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماما • إذا كان $0 < q < 1$ وكان $v_0 < 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما • إذا كان $q > 1$ وكان $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما • إذا كان $q > 1$ وكان $v_0 < 0$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماما • إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة • إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني • إذا كان $q < 0$ فإن الفرق $v_{n+1} - v_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة و منه المتتالية (v_n) ليست رتيبة نلخص إتجاه التغير في الجدول التالي: | q \ v_0 | $v_0 > 0$ | $v_0 < 0$ | | $0 < q < 1$ | متناقصة تماما | متزايدة تماما | | $q = 1$ | ثابتة | ثابتة | | $q > 1$ | متزايدة تماما | متناقصة تماما | **تطبيق :** (v_n) هندسية حيث: $v_0 = 2$ و $q = 3$ 1. عبر عن v_n بدلالة n 2. عين اتجاه تغير المتتالية (v_n) 3. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + \ldots + v_{n-1}$		

بناء التعلمات

الحل :

1. التعبير عن v_n بدلالة n (كتابة عبارة الحد العام):
بما أن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 وأساسها q، فإن عبارة حدها العام تكتب على الشكل:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

بالتعويض بالقيم المعطاة ($v_0 = 2$ و $q = 3$) نجد:

$$\boxed{v_n = 2 \times 3^n}$$

اتجاه تغير المتتالية (v_n):
لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$
و لدينا الحد الأول $v_0 = 2$ وهو عدد موجب تماماً $(v_0 > 0)$
بما أن $v_0 > 0$ و $q > 1$، ن ومنه المتتالية (v_n) متزايدة تماماً
طريقة ثانية للتحقق (حساب الفرق):

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n = 2 \times 3^n \times 3 - 2 \times 3^n$$

باستخراج العامل المشترك 2×3^n نجد:

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^n(3-1) = 2 \times 3^n \times 2 = 4 \times 3^n$$

بما أن $4 \times 3^n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n، ومنه المتتالية (v_n)متزايدة تماماً

2. حساب المجموع S_n بدلالة n:
نطبق قانون المجموع لمتتالية هندسية:

$$S_n = \text{الحد الأول} \times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}\right)$$

- حساب عدد الحدود:

$$\text{عدد الحدود} = (\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}) + 1 = (n-1-0)+1 = n$$

- بالتعويض نجد :

$$S_n = v_0 \times \left(\frac{3^n - 1}{3-1}\right)$$

نعوض قيمة الحد الأول $v_0 = 2$:

$$S_n = 2 \times \left(\frac{3^n - 1}{2}\right)$$

نقوم باختزال العدد 2 من البسط والمقام نجد: $\boxed{S_n = 3^n - 1}$

مذكرة رقم : 08

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: التحليل	الموسم الدراسي: 2026 / 2027
المحور: المتتاليات العددية	التاريخ:
الموضوع: استعمال المتتاليات الحسابية و الهندسية في حل المشكلات اليومية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**النمو الديموغرافي :** يزداد عدد سكان مدينة A بـ 300 نسمة كل سنة ، في حين يزداد عدد سكان مدينة B بنسبة 2% من سنة إلى أخرى. في سنة 2020 بلغ عدد سكان كل مدينة 5000 نسمة. نرمز بـ u_n إلى A و v_n إلى B خلال $2020+n$ 1. عين u_0 و v_0 ثم احسب u_1 و v_1 2. جد علاقة بين u_{n+1} و u_n وتحقق أن (u_n) حسابية 3. عبر عن u_n بدلالة n 4. جد علاقة بين v_{n+1} و v_n وتحقق أن (v_n) هندسية 5. عبر عن v_n بدلالة n 6. قارن بين عددي سكان المدينتين A و B في سنة 2026 **الحل :** 1. تعيين u_0 و v_0 : عدد سكان كل مدينة في سنة 2020 هو : 5000 نسمة إذن : $\boxed{u_0=5000}$ و $\boxed{v_0=5000}$ حساب u_1 و v_1 : • u_1 عدد سكان المدينة A ومنه : $u_1=5000+300$ إذن : $\boxed{u_1=5300}$ • v_1 عدد سكان المدينة B ومنه : $v_1=5000\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=5000\times(1.02)$ إذن : $\boxed{v_1=5100}$ 2. u_{n+1} و u_n : لدينا : $u_1=u_0+300$ و $u_2=u_1+300$ و بعد التعميم نجد : $\boxed{u_{n+1}=u_n+300}$ التحقق أن (u_n) حسابية : لدينا : $u_{n+1}=u_n+300$ ومنه : $u_{n+1}-u_n=300$ إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r=300}$		

لدينا : $u_n = u_0 + nr$ إذن : $\boxed{u_n = 5000 + 300n}$

3. العلاقة بين v_{n+1} و v_n : لدينا : $v_1 = v_0 \times (1.02)$ و $v_2 = v_1 \times (1.02)$ و بعد التعميم نجد :

$$\boxed{v_{n+1} = v_n \times (1.02)}$$

التحقق أن (v_n) هندسية :

لدينا : $v_{n+1} = v_n \times (1.02)$ ومنه : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1.02$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 1.02}$

بناء التعلمات

4. التعبير عن v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ إذن : $\boxed{v_n = 5000 \times (1.02)^n}$

5. المقارنة بين عددي سكان A و B في سنة 2026 :

- نحسب رتبة سنة 2026 : لدينا : $2020 + n = 2026$ ومنه : $n = 6$
- عدد سكان المدينة A في سنة 2026 هو : $u_6 = 5000 + 300 \times 6$ إذن : $\boxed{u_6 = 6800}$
- عدد سكان المدينة B في سنة 2026 هو : $v_6 = 5000 \times (1.02)^6$ إذن : $\boxed{v_6 \approx 5630,81}$

نلاحظ أنه في سنة 2026 ، عدد سكان المدينة A أكبر من عدد سكان المدينة B

مذكرة رقم : 09

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون

ميدان التعلم: التحليل

المحور: المتتاليات العددية

الموضوع: المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$

ثانوية:

الموسم الدراسي: 2026 / 2027

التاريخ:

المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعلاقة $u_{n+1}=au_n+b$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$ **الحالة الأولى** $a=1$: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=2$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $$u_{n+1}=u_n-3$$ • من الواضح أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$ وحدها الأول $u_1=2$ • من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n=u_1+(n-1)r$ و منه $u_n=5-3n$ • من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$ و منه $$\boxed{S_n=\frac{n(7-3n)}{2}}$$ • من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}-u_n=-3$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة **الحالة الثانية** $u_1=\frac{b}{1-a}$ و $a\neq 1$: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=-3$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $$u_{n+1}=2u_n+3$$ • حساب الحدود الأولى يعطينا: $u_2=-3$ و $u_3=-3$ ، ...نخمن أن المتتالية (u_n) ثابتة **الحالة الثالثة** $u_1\neq\frac{b}{1-a}$ و $a\neq 1$: **طريقة :** لحساب الحد العام u_n و المجموع $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ نستعين بالمتتالية ذات الحد العام $$v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$$		

بناء التعلمات

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$،

$$u_{n+1} = 2u_n + 3$$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام: $v_n = u_n + 3$

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$،

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 3 + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$$

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$،

$$v_{n+1} = 2v_n$$

نستنتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_1 = 4$

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$

و

$$\boxed{u_n = v_n - 3 = 4 \times 2^{n-1} - 3}$$

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، لدينا

$$u_n = v_n - 3$$

لدينا

$$S'_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = -4(1 - 2^n)$$

و منه

$$S_n = (v_1 - 3) + (v_2 - 3) + \ldots + (v_n - 3) = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - (3 + 3 + \ldots + 3) = S'_n - 3n$$

نستنتج هكذا أن

$$\boxed{S_n = -4(1 - 2^n) - 3n}$$

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$،

$$u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$$

و منه للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس اتجاه التغير

محور: الحســـــــــــاب

مذكرة 01	معرفة و تحديد حاصل القسمة الإقليدية و باقيها
مذكرة 02	حصر عدد بين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح
مذكرة 03	تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي
مذكرة 04	معرفة توافق عددين صحيحين
مذكرة 05	معرفة خواص الموافقة و استعمالها في حل المشكلات
مذكرة 06	تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر
مذكرة 07	مبدأ الاستدلال بالتراجع

★ أستاذ الرياضيات ★

مذكرة رقم : 01

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون

ميدان التعلم: جبر

المحور: الحساب

الموضوع: معرفة و تحديد حاصل القسمة الإقليدية و باقيها

ثانوية:

الموسم الدراسي: 2027 / 2026

التاريخ:

المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	نشاط مقترح : بإتباع نفس المنهجية المقابلة عين باقي وحاصل قسمة a على b في الحالتين التاليتين: • $a = 216$ و $b = 34$ • $a = 594$ و $b = 11$ ماذا تلاحظ؟ مناقشة النشاط : $17 \mid 3$ $15 \mid 5$ 2 لدينا: $17 = 3 \times 5 + 2$ حاصل قسمة 17 على 3 هو 5 باقي قسمة 17 على 3 هو 2 $216 \mid 34$ $204 \mid 6$ 12 لدينا: $216 = 34 \times 6 + 12$ حاصل قسمة 216 على 34 هو 6 باقي قسمة 216 على 34 هو 12 $594 \mid 11$ $55 \mid 54$ 44 44 0 لدينا: $594 = 11 \times 54 + 0$ حاصل قسمة 594 على 11 هو 54 باقي قسمة 594 على 11 هو 0 • في الحالة الأولى: بما أن الباقي $12 \neq 0$، نقول أن العدد 216 لا يقبل القسمة على 34 (أي أن 34 لا يقسم 216) • في الحالة الثانية: بما أن الباقي معدوم (الباقي يساوي 0)، نقول أن العدد 594 يقبل القسمة على 11 (أي أن 11 يقسم 594)		

بناء التعلمات

1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف :

a و b عددان صحيحان و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث:

$$a = kb$$

نقول كذلك أن b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b

أمثلة :

- 2 يقسم 2026 لأن: $2026 = 2 \times 1013$
- (-4) يقسم 1448 لأن: $1448 = (-4)(-362)$
- 1 يقسم كل الأعداد الصحيحة

ملاحظة :

للعددين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$

2. القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة :

من أجل كل عدد صحيح a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b، توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث:

$$a = bq + r$$

و $0 \leq r < b$.

- تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q; r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على b.
- يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

أمثلة :

- $93 = 7 \times 13 + 2$ و منه: 13 هو حاصل قسمة 93 على 7 و باقيها 2
- $-74 = 25 \times (-3) + 1$ و منه: -3 هو حاصل قسمة -74 على 25 و باقيها 1
- $260 = 26 \times 10 + 0$ و منه: 10 هو حاصل قسمة 260 على 26 و باقيها 0

ملاحظة :

يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b، و نحصل على: $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$

مذكرة رقم : 02

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون

ميدان التعلم: جبر

المحور: الحساب

الموضوع: حصر عدد بين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح

ثانوية:

الموسم الدراسي: 2026 / 2027

التاريخ:

المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	نشاط مقترح : 1. عين باقي وحاصل قسمة a على b، في الحالتين التاليتين: $b = 13$ و $a = 150$ ، $b = 12$ و $a = 265$ 2. استنتج حصراً للعدد الطبيعي a بين مضاعفين متعاقبين للعدد الطبيعي b مناقشة النشاط : 1. لدينا: $265 = 12 \times 22 + 1$. الحاصل هو: 22 ، والباقي هو: 1 $150 = 13 \times 11 + 7$. الحاصل هو: 11 ، والباقي هو: 7 2. استنتاج الحصر بين مضاعفين متتاليين: بالنسبة للعدد 265: $12 \times 22 \leq 265 < 12 \times 23$ أي: $264 \leq 265 < 276$ بالنسبة للعدد 150: $13 \times 11 \leq 150 < 13 \times 12$ أي: $143 \leq 150 < 156$		

بناء التعلمات

حصر عدد بين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح :

تعريف :

نقول عن العدد a أنه محصور بين مضاعفين متعاقبين للعدد b معناه يوجد عدد صحيح q حيث: $bq \leq a < b(q+1)$

مثال :

- $118 = 5 \times 23 + 3$

و منه نلاحظ أن:

$$5 \times 23 \leq 118 < 5(23+1)$$

أي:

$$115 \leq 118 < 120$$

مذكرة رقم : 03

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: جبر	الموسم الدراسي: 2027 / 2026
المحور: الحساب	التاريخ:
الموضوع: تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**التهيئة النفسية :تذكـــــــير** **1. تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي :** **طريقة :** لحساب عدد قواسم عدد طبيعي n غير معدوم نتبع ما يلي: 1. نحلل العدد إلى جداء عوامل أولية كما يلي: $n = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times \ldots \times a_p^{\alpha_p}$ 2. نضيف إلى كل أس في التحليل العدد 1 3. نحسب جداء الأعداد المحصل عليها لنجد عدد القواسم كالتالي: عدد القواسم $= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_p + 1)$ أمثلة : مجموعة قواسم العدد 18 • لدينا: $18 = 2 \times 3^2$ • عدد قواسم 18 هو: $(1+1)(2+1) = 6$ • مجموعة قواسم العدد 18 هي المجموعة: $D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ مجموعة قواسم العدد 400 • لدينا: $400 = 2^4 \times 5^2$ • عدد قواسم 400 هو: $(4+1)(2+1) = 15$ • مجموعة قواسم العدد 400 هي المجموعة: $D_{400} = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 25; 40; 50; 80; 100; 200; 400\}$		

مذكرة رقم : 04

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون
ميدان التعلم: جبر
المحور: الحساب
الموضوع: معرفة توافق عددين صحيحين

ثانوية:
الموسم الدراسي: 2026 / 2027
التاريخ:
المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	نشاط مقترح : • عين باقي قسمة كل من العددين 142 و 79 على 9. ماذا تلاحظ؟ • ما هو باقي قسمة $142 - 79$ على 9؟ ضع تخميناً؟ مناقشة النشاط : • تعيين بواقي القسمة والملاحظة: لدينا: $142 = 9 \times 15 + 7$ باقي قسمة 142 على 9 هو 7 و لدينا: $79 = 9 \times 8 + 7$ باقي قسمة 79 على 9 هو 7 الملاحظة: نلاحظ أن للعددين 142 و 79 نفس باقي القسمة الإقليدية على 9 • حساب باقي قسمة الفرق والتخمين: لدينا: $142 - 79 = 63$ و بما أن: $63 = 9 \times 7 + 0$ إذن: باقي قسمة الفرق $142 - 79$ على 9 هو 0 (أي أن 63 يقبل القسمة على 9) التخمين: نستنتج أنه عندما يكون لعددين نفس الباقي في القسمة على عدد، فإن فرقهما يقبل القسمة على ذلك العدد، وهذا معناه أن "العددين 142 و 79 متوافقان بتردد 9"		

بناء التعلمات

1. الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف :

n عدد طبيعي غير معدوم. القول إن عددين صحيحين a و b متوافقان بتردد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n

و نرمز :

$$a \equiv b[n]$$

و نقرأ a يوافق b بتردد n

أمثلة :

لدينا: $17 \equiv 5[6]$

لأن: $17 = 6 \times 2 + 5$، ومنه باقي قسمة 17 على 6 هو 5

كذلك: $5 = 6 \times 0 + 5$، ومنه باقي قسمة 5 على 6 هو 5

ملاحظة :

من أجل كل عدد صحيح x: $x \equiv 0[1]$

مبرهنة :

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم

a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n

برهان :

- نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n. نضع: $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0 \leq r < n$ و منه: $a - b = nq + r - nq' - r = n(q - q')$ بما أن: $q - q'$ عدد صحيح فإن: $a - b$ مضاعف لـ n
- عكسيا: نفرض $a - b$ مضاعف لـ n يوجد عدد صحيح k حيث: $a - b = kn$ ليكن r باقي قسمة b على n إذن: $b = nq + r$، q عدد صحيح و $0 \leq r < n$ و منه: $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$ بما أن: $q + k$ عدد صحيح و $0 \leq r < n$ فإن: r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n. و منه: a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n.

نتيجة :

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم

a و b متوافقان بتردید n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعفا لـ n

مثال :

لدينا: $23 \equiv 2[7]$

لأن الفرق بينهما: $23-2=21$ و العدد 21 مضاعف للعدد 7

تطبيق :

من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة والخاطئة:

1. $26 \equiv 11\,[5]$
2. $478 \equiv 32\,[5]$
3. $63^2 \equiv 14\,[5]$

الحل :

بناء التعلمات

1. $26-11=15$ و $15=3\times 5$. إذن $26 \equiv 11\,[5]$ صحيحة
2. $478-32=446$ و $446=89\times 5+1$. إذن $478 \equiv 32\,[5]$ خاطئة، ونكتب: $478 \not\equiv 32\,[5]$
3. $63^2=3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو 4، وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4، فإنَّ $63^2 \equiv 14\,[5]$ صحيحة

مذكرة رقم : 05

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: جبر	الموسم الدراسي: 2026 / 2027
المحور: الحساب	التاريخ:
الموضوع: معرفة خواص الموافقة و استعمالها في حل المشكلات	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**1. خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:** **الخاصية 1 :** من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من أجل كل عدد صحيح a لدينا: $a \equiv a\,[n]$ برهان : لدينا $a - a = 0 \times n$ و منه $a - a$ مضاعف للعدد n. مثال : $3 \equiv 3\,[7]$, $-6 \equiv -6\,[5]$ **الخاصية 2 :** a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $b \equiv a\,[n]$. برهان : إذا كان لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n فإن لـ b و a نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n مثال : لدينا: $23 \equiv 2\,[3]$ ومنه : $23 \equiv 2\,[3]$		

الخاصية 3 (خاصية التعدي) :

n عدد طبيعي غير معدوم. a، b و c أعداد صحيحة

إذا كان ($a \equiv b\,[n]$ و $b \equiv c\,[n]$) فإن $a \equiv c\,[n]$

برهان :

($a \equiv b\,[n]$ و $b \equiv c\,[n]$) يعني ($a - b = kn$ و $b - c = k'n$) و k و k' عددان صحيحان

و منه و بالجمع نحصل على $a - c = (k + k')n$. بما أن $k + k'$ عدد صحيح فإن $a \equiv c\,[n]$

مثال :

لدينا $17 \equiv 7\,[5]$ و $7 \equiv 2\,[5]$، ومنه : $17 \equiv 2\,[5]$

الخاصية 4 (خاصية التلاؤم مع الجمع) :

n عدد طبيعي غير معدوم. a، b، c و d أعداد صحيحة

إذا كان ($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) فإن $a + c \equiv b + d\,[n]$

بناء التعلمات

برهان :

($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) أعداد صحيحة حيث ($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$).

($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) يعني ($a - b = kn$ و $c - d = k'n$) و k و k' عددان صحيحان

و منه و بالجمع نحصل على $(a + c) - (b + d) = (k + k')n$. بما أن $k + k'$ عدد صحيح فإن $a + c \equiv b + d\,[n]$.

مثال :

لدينا $13 \equiv 4\,[9]$ و $16 \equiv 7\,[9]$

ومنه: $13 + 16 \equiv 4 + 7\,[9]$ أي: $29 \equiv 11\,[9]$

الخاصية 5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) :

n عدد طبيعي غير معدوم. a، b، c و d أعداد صحيحة

إذا كان ($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) فإن $a \times c \equiv b \times d\,[n]$

برهان :

($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) أعداد صحيحة حيث ($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$)

($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) يعني ($a - b = kn$ و $c - d = k'n$) و k و k' عددان صحيحان

لدينا $ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c-d) + d(a-b) = ak'n + dkn = (ak' + dk)n$

بما أن $ak' + dk$ عدد صحيح فإن $ac \equiv bd\,[n]$

ملاحظة :

يمكن تعميم الخاصية السابقة إلى جداء عدة أعداد صحيحة

مثال :

لدينا $10 \equiv 3\,[7]$ و $8 \equiv 1\,[7]$

ومنه: $10 \times 8 \equiv 3 \times 1\,[7]$ أي: $80 \equiv 3\,[7]$

بناء التعلمات

الخاصية 6 :

n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $a^p \equiv b^p\,[n]$

مثال :

لدينا $11 \equiv 2\,[9]$

ومنه: $11^3 \equiv 2^3\,[9]$ أي: $1331 \equiv 8\,[9]$

الخاصية 7 :

إذا كان الباقي أكبر من التردد :

$$a \equiv r[n]$$

تردد $\rightarrow r > n \leftarrow$ باقي

قاعدة :

$$a \equiv r[n]$$

$$a \equiv r - n[n]$$

إذا كان الباقي سالب :

$$a \equiv -r[n]$$

r: إذا كان سالب نضيف التردد

قاعدة :

$$b \equiv -r[n]$$

$$b \equiv -r + n[n]$$

بناء التعلمات

أمثلة :

ليكن a عدد صحيح حيث: $a \equiv 9\,[7]$

نلاحظ أنَّ الباقي أكبر من التردد (نطرح التردد) :

$$a \equiv 9 - 7\,[7]$$

$$a \equiv 2\,[7]$$

ليكن b عدد صحيح حيث: $b \equiv -3\,[7]$

نلاحظ أنَّ الباقي سالب (نضيف التردد):

$$b \equiv -3 + 7\,[7]$$

$$b \equiv 4\,[7]$$

تطبيق : بكالوريا 2020

لتكن الأعداد الطبيعية a، b و c حيث: $a = 2020$ ، $b = 2970$ و $c = 1441$

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من الأعداد a، b و c على 9
2. تحقّق أنَّ العددين b و $(a+5)$ متوافقان بتردید 9
3. تحقّق أنَّ: $2a \equiv -1\,[9]$ ثمّ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9
4. بيّن أنَّ العدد $(3a - 2b - 12c^2)$ يقبل القسمة على 9

الحل :

لتكن الأعداد الطبيعية $a = 2020$، $b = 2970$، $c = 1441$

1. تعيين بواقي قسمة الأعداد a، b، c على 9:
   لدينا $a \equiv 4[9]$ و منه باقي قسمة a على 9 هو 4.
   لدينا $b \equiv 0[9]$ و منه باقي قسمة b على 9 هو 0.
   لدينا $c \equiv 1[9]$ و منه باقي قسمة c على 9 هو 1.
2. التحقق: b و $a+5$ متوافقان:
   لدينا $a \equiv 4[9]$ يعني أن $a + 5 \equiv 9[9]$ أي أن $a + 5 \equiv 0[9]$ و $b \equiv 0[9]$.
   و منه $a + 5 \equiv b[9]$ محققة.
3. التحقق $2a \equiv -1[9]$: $a \equiv 4[9]$ يعني أن $2a \equiv 8[9]$ و $8 \equiv -1[9]$. إذن $2a \equiv -1[9]$ بالتعدي.
   $2a \equiv -1[9]$ يعني أن $(2a)^{31} \equiv (-1)^{31}[9]$ و 31 عدد فردي يعني أن $(2a)^{31} \equiv -1[9]$.
   و $8 \equiv -1[9]$ إذن $(2a)^{31} \equiv 8[9]$ و منه باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9 هو 8.
4. إثبات أن العدد $3a - 2b - 12c^2$ يقبل القسمة على 9:
   لدينا $a \equiv 4[9]$ و منه $3a \equiv 12[9]$.
   و $b \equiv 0[9]$ و منه $2b \equiv 0[9]$.
   و $c \equiv 1[9]$ و منه $c^2 \equiv 1[9]$ إذن $12c^2 \equiv 12[9]$.
   و منه $3a - 2b - 12c^2 \equiv 12 - 0 - 12[9]$ أي أن $3a - 2b - 12c^2 \equiv 0[9]$ و منه العدد $3a - 2b - 12c^2$ يقبل القسمة على 9.

بناء التعلمات

مذكرة رقم : 06

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون	ثانوية:
ميدان التعلم: جبر	الموسم الدراسي: 2026 / 2027
المحور: الحساب	التاريخ:
الموضوع: تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**1. تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر :** تطبيق : بكالوريا 2016 1. عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 2^0 ، 2^1 ، 2^2 ، 2^3 و 2^4 على العدد 5 2. أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n يكون: $2^{4n} \equiv 1\,[5]$ ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على العدد 5 3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2^{2016} + 2 + n \equiv 0\,[5]$ الحل : 1. باقي القسمة الاقليدية لـ 2^0، 2^1، 2^2، 2^3 و 2^4 على العدد 5: لدينا $2^0 = 1 = 5 \times 0 + 1$ و منه $2^0 \equiv 1[5]$ الباقي هو 1. لدينا $2^1 = 2 = 5 \times 0 + 2$ و منه $2^1 \equiv 2[5]$ الباقي هو 2. لدينا $2^2 = 4 = 5 \times 0 + 4$ و منه $2^2 \equiv 4[5]$ الباقي هو 4. لدينا $2^3 = 8 = 5 \times 1 + 3$ و منه $2^3 \equiv 3[5]$ الباقي هو 3. لدينا $2^4 = 16 = 5 \times 3 + 1$ و منه $2^4 \equiv 1[5]$ الباقي هو 1. 2. أ) إثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $2^{4n} \equiv 1[5]$: لدينا $2^4 \equiv 1[5]$ باستعمال خاصية الرفع الى القوة n يكون $(2^4)^n \equiv 1^n[5]$ و منه $2^{4n} \equiv 1[5]$ لأن $1^n = 1$ و $(2^4)^n = 2^{4n}$ ب) باقي قسمة العدد 2^{2016} على 5: لدينا $2016 = 4 \times 504$ أي من الشكل $2016 = 4 \times n$ و منه $2^{2016} \equiv 2^{4n}[5]$ بما أن $2^{4n} \equiv 1[5]$ فإن $2^{2016} \equiv 1[5]$ إذن باقي قسمة 2^{2016} على 5 هو 1 3. تعيين قيم n بحيث يكون $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$: و منه $2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$ يكافئ $1 + 2 + n \equiv 0[5]$ يكافئ $n \equiv 2[5]$. و منه $n = 5k + 2 /\ k \in \mathbb{N}$		

مذكرة رقم : 07

الأستاذ :

المستوى: الثالثة آداب وفلسفة ، لغات ، فنون
ميدان التعلم: جبر
المحور: الحساب
الموضوع: مبدأ الاستدلال بالتراجع

ثانوية:
الموسم الدراسي: 2026 / 2027
التاريخ:
المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

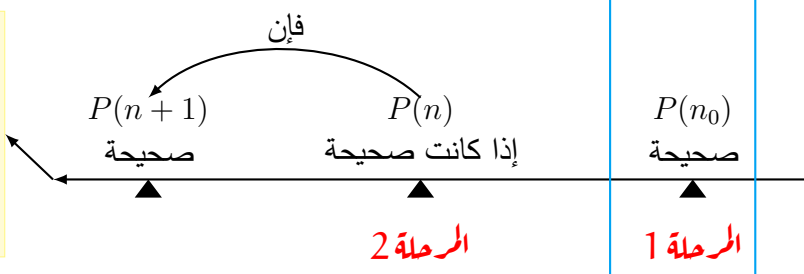
1. مبدأ الاستدلال بالتراجع :

مسلمة :

$p(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n، n_0 عدد طبيعي

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 نتبع ما يلي:

1. نتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل العدد الطبيعي n_0
2. نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $p(n+1)$



الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 الخاصية $P(n)$ صحيحة.

ملاحظة :

البرهان بالتراجع هو نمط من أنماط البرهان يستعمل في البرهنة على خاصية تتعلق بعدد طبيعي n

مثال : بكالوريا 2013

اثبات بالتراجع أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

الحل :

اثبات بالتراجع أن العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

التحقق من صحة $P(0)$:

لدينا: $3^0 - 1 = 0$ محققة لأن 0 يقبل القسمة على 2

نفرض أن $P(n)$ صحيحة: $3^n - 1 = 2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و نبرهن صحة $P(n+1)$:

لدينا: $3^n - 1 = 2k$

و منه:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 1 &= 3 \times 3^n - 1 \\ &= (2+1)3^n - 1 \\ &= 2 \times 3^n + (3^n - 1) \\ &= 2 \times 3^n + 2k \quad \text{(حسب فرضية التراجع)} \\ &= 2(3^n + k) \end{aligned}$$

و بما أن $3^n + k \in \mathbb{Z}$ فإن: $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2

إذن: $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2

بناء التعلمات

محور: الدوال العددية

مذكرة 01	تذكير حول المعادلات و المتراجحات
مذكرة 02	تذكير حول المشتقات ومعادلة المماس لمنحنى دالة
مذكرة 03	تعيين اتجاه التغيّر باستعمال إشارة المشتقة
مذكرة 04	الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى
مذكرة 05	الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية
مذكرة 06	الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة
مذكرة 07	القراءة البيانية
مذكرة 08	مناقشة معادلة بيانيا
مذكرة 09	الدوال التناظرية

★ أستاذ الرياضيات ★

مذكرة رقم : 01

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: تذكير حول المعادلات و المتراجحات	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	التهيئة النفسية :تذكير :		

1. إشارة $ax+b$:

مبرهنة 01 :

a و b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

ملاحظة:

يؤول حل متراجحة من الشكل $ax+b \leq 0$ $(ax+b \geq 0)$ إلى دراسة إشارة $ax+b$

تطبيق :

أدرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$f(x)=2x+4$, $g(x)=-3x+2$

الحل :

1. $2x+4=0$ يعني $2x=-4$ أي $x=-2$.

$2x+4$ هو من الشكل $ax+b$ مع $a=2$ و بما أن $a>0$ فإن:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $2x+4$	$-$	0	$+$

2. $x=\frac{2}{3}$ مع $a=-3$ و بما أن $a<0$ فإن:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
إشارة $-3x+2$	$+$	0	$-$

2. إشارة ax^2+bx+c:

a، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نميز ثلاث حالات و ذلك إشارة المميز Δ حيث: $\Delta = b^2-4ac$

الحالة الأولى $\Delta > 0$:

للمعادلة ax^2+bx+c جذران متمايزان $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$، $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

و لدينا بفرض $x_2 > x_1$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a		0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

الحالة الثانية $\Delta = 0$:

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذرا مضاعفا $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ و لدينا:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a		0	إشارة a	

بناء التعلمات

الحالة الثالثة $\Delta < 0$:

ليس للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذورا و لدينا:

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a	

ملاحظات:

يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2+bx+c \leq 0$ $(ax^2+bx+c \geq 0)$ إلى دراسة إشارة ax^2+bx+c

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نتبع الخطوات التالية:

نحسب المميز Δ ثم ندرس إشارته

تعيين الجذور إن وجدت $(\Delta \geq 0)$ ثم نستنتج الإشارة

تطبيق :

أدرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ حيث:

$f(x) = x^2+x+1$ ، $g(x) = -x^2-x+2$ ، $h(x) = 2x^2-10x+12$

الحل :

1. لدينا $\Delta = -3$ ومنه ليس للمعادلة $x^2 + x + 1 = 0$ حلولا. $x^2 + x + 1$ هو من الشكل $ax^2 + bx + c$ مع $a = 1$ و بما أن $\Delta < 0$ و $a > 0$ فإن:

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
إشارة $x^2 + x + 1$	$+$

2. لدينا $\Delta = 9$ ومنه للمعادلة $-x^2 - x + 2 = 0$ جذران هما: $x' = \dfrac{1+3}{-2} = -2$ و $x'' = \dfrac{1-3}{-2} = 1$

$-x^2 - x + 2$ هو من الشكل $ax^2 + bx + c$ مع $a = -1$ و بما أن $\Delta > 0$ و $a < 0$ فإن:

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
إشارة $-x^2 - x + 2$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

بناء التعلمات

3. لدينا $\Delta = 4$ ومنه للمعادلة $2x^2 - 10x + 12 = 0$ جذران هما: $x' = \dfrac{10-2}{4} = 2$ و $x'' = \dfrac{10+2}{4} = 3$

$2x^2 - 10x + 12$ هو من الشكل $ax^2 + bx + c$ مع $a = 2$ و بما أن $\Delta > 0$ و $a > 0$ فإن:

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
إشارة $2x^2 - 10x + 12$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

مذكرة رقم : 02

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: تذكير حول المشتقات ومعادلة المماس لمنحنى دالة	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	التهيئة النفسية :تذكير : **1. الدوال المشتقة :** قابلية الإشتقاق لدالة على مجال: f دالة معرفة على مجال I جزئي من $\mathbb{R}$ **مبرهنة :** الدالة f قابلة للإشتقاق على I إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I فإن العدد المشتق للدالة f عند كل عدد حقيقي x من I موجود الدالة المشتقة لدالة: f دالة معرفة على مجال I جزئي من $\mathbb{R}$ **مبرهنة :** الدالة f' المعرفة على I والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من I ، العدد المشتق $f'(x)$ للدالة f عند x تسمى الدالة المشتقة للدالة f الجدول التالي يلخص الدوال المشتقة للدوال المألوفة: a، b و k أعداد حقيقية. f دالة و f' دالتها المشتقة		

	$f(x)$	k	$ax+b$	x^2	$(n \geq 2, n \in \mathbb{N})\ x^n$	$\frac{1}{x}$
	$f'(x)$	0	a	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$
مجالات	قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

2. العمليات على الدوال المشتقة:

f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$، k عدد حقيقي.

الدالة	$f+g$	kf	$f\cdot g$	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
دالتها المشتقة هي	$f'+g'$	kf'	$f'g+g'f$	$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
قابلة للاشتقاق على	I	I	I	I باستثناء قيم x حيث $g(x)=0$	I باستثناء قيم x حيث $g(x)=0$

أمثلة :

بناء التعلمات

- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=5x+7$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=5$$

- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2-5x+4$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=6x-5$$

- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$$

- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$:

$$f'(x)=\frac{(3x+1)'(x-2)-(x-2)'(3x+1)}{(x-2)^2}=\frac{3(x-2)-1(3x+1)}{(x-2)^2}=\frac{-7}{(x-2)^2}$$

3. معادلة المماس :

نتيجة :

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$، و (C_f) تمثيلها البياني في معلم. إذا قبلت f الاشتقاق عند a من I فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

طريقة :

تعيين معادلة المماس لمنحن عند نقطة منه

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ وقابلة للإشتقاق عند العدد a من I
(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$
لتعيين معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a

- نحسب $f(a)$ و $f'(a)$ ونعوضهما في المعادلة

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

وتكون هذه المعادلة هي معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a

بناء التعلمات

مثال :

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=3x^2-6x+2$.

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة $a=1$ تُعين كما يلي:

- نحسب $f(1)$ و $f'(1)$ ونعوضهما في المعادلة:

$$f(1)=(1)^3-3(1)^2+2(1)+1=1$$

$$f'(1)=3(1)^2-6(1)+2=-1$$

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$y=-1(x-1)+1$$

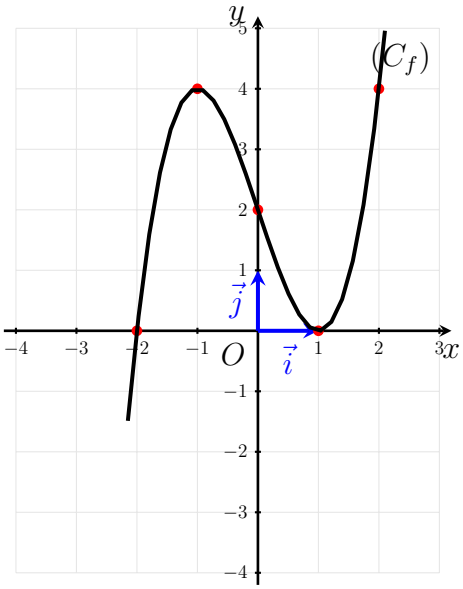
ومنه:

$$y=-x+2$$

مذكرة رقم : 03

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: تعيين اتجاه التغيّر باستعمال إشارة المشتقة	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	نشاط 01 ص 51 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ تمثيلها البياني (C_f) الممثل أدناه في معلم. 1. حدد حسب قيم x اتجاه تغير الدالة 2. عين $f(-2)$ ، $f(2)$ ، $f(-1)$ و $f(1)$ 3. شكل جدول تغيرات الدالة f  مناقشة النشاط : 1. تحديد حسب قيم x اتجاه تغير الدالة: الدالة f متزايدة تماما على كل من $[-2;-1]$ و $[1;2]$ الدالة f متناقصة تماما على $[-1;1]$ 2. تعيين الصور: بقراءة بيانية نجد: $f(-2)=0$، $f(-1)=4$ و $f(2)=4$، $f(1)=0$ 3. جدول تغيرات الدالة f:		

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	4

بناء التعلمات

1. إتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة :

مبرهنة :

" نقبل بدون برهان المبرهنة التالية " f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال I

إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على I

إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على I

إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I

2. دراسة إتجاه تغير دالة :

طريقة :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

لدراسة إتجاه تغير للدالة f على مجال I

- ندرس قابلية إشتقاق الدالة f على I
- نحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد x من I
- ندرس إشارة $f'(x)$

ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة f على I

مثال :

f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = 4x - 4$

إشارة $f'(x)$ ملخصة في جدول التالي:

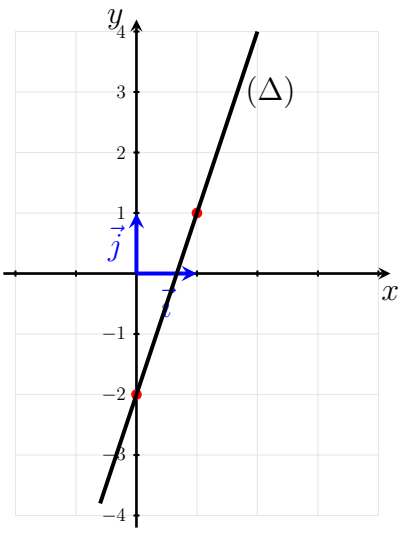
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه نستنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$

مذكرة رقم : 04

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	مناقشة نشاط 01 ص 68 : 1. رسم المنحني (Δ):  $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline x & 0 & 1 \\ \hline f(x) & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$ 2. * نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيماً كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيماً كبيرة بالقدر الكافي. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ * نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيماً كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ $(-x)$ قيماً كبيرة بالقدر الكافي. نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما يؤول x إلى $-\infty$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 3. المقارنة بين قيم $f(x)$ و $g(x)$: لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيما كبيرة بالقدر الكافي، فإن قيم $f(x)$ تقترب من قيم $g(x)$ 4. التخمين: لدينا من جهة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$		

بناء التعلمات

1. الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى:

تعريف :

نسمي f دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى للمتغير الحقيقي x إذا كانت معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = ax + b$$

حيث a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$، و تسمى أيضاً الدالة التآلفية.

دراسة مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 5x - 1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

45 النهايات: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

45 المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = 5$

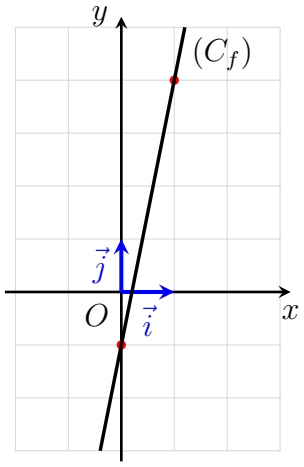
45 إشارة المشتقة: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما

45 جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

45 التمثيل البياني:

x	0	1
$f(x)$	-1	4



نتائج :

- نقبل بصفة عامة أن:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(ax+b)=\lim_{x\to+\infty}(ax) \text{ و } \lim_{x\to-\infty}(ax+b)=\lim_{x\to-\infty}(ax)}$$

- نستنتج هكذا أنه:
  - إذا كان $a>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=+\infty$
  - إذا كان $a<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=-\infty$
- نعلم أن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجموعة التعريف $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f':x\mapsto a$ إذن إشارة المشتقة من إشارة العدد a
- التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto ax+b$ هو المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$، لتمثيله يكفي رسم نقطتين منه ونستعمل جدول قيم مساعدة

2. نقط تقاطع (C_f) مع المحاور:

أ. تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

بناء التعلمات

تمثل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل القيم التي تكون فيها الدالة معدومة، أي الفواصل هي حلول المعادلة:

$$f(x)=0$$

- إذا كانت المعادلة لا تقبل حلولاً، فإن المنحنى (C_f) لا يقطع محور الفواصل.
- إذا كانت تقبل حلولاً $x_1,x_2,\ldots$ فإن نقط التقاطع هي: $A(x_1;0)$ ، $B(x_2;0)\ldots$

ب. تقاطع (C_f) مع محور التراتيب:

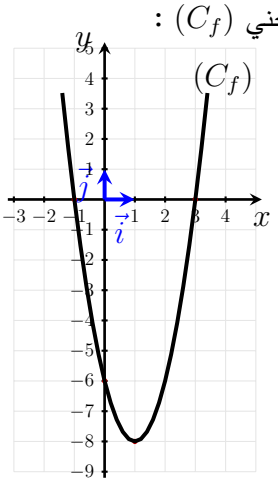
منحنى الدالة (C_f) يقطع محور التراتيب في نقطة وحيدة فاصلتها $x=0$ (بشرط أن يكون 0 ينتمي إلى مجموعة التعريف)، وإحداثيا هذه النقطة هما:

$$(0;f(0))$$

مذكرة رقم : 05

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: كثيرات الحدود	التاريخ:
الموضوع: الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	مناقشة نشاط 02 ص 68 : 1. تمثيل المنحني (C_f) : $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline f(x) & 0 & -6 & -8 & 0 \\ \hline \end{array}$  2. تعيين فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل: نضع $y=0$ أي $f(x)=0$ أي $2x^2-4x-6=0$ لدينا $\Delta=64>0$ أي $\sqrt{\Delta}=8$ و منه للمعادلة حلين مختلفين $x_1=3$ و $x_2=-1$ إذن: $(C_f)\cap(xx')=\{A(3;0),B(-1;0)\}$ 3. التعبير بكتابات مناسبة: لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty$ و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2)=+\infty$ 4. المقارنة بين قيم $f(x)$ و $g(x)$: لما يأخذ x (على الترتيب $-x$) قيما كبيرة بالقدر الكافي، فإن قيم $f(x)$ تقترب من قيم $g(x)$ 5. التخمين: لدينا من جهة $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$		

تعريف :

نسمي f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية للمتغير الحقيقي x إذا كانت معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

حيث: a، b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

و تسمى أيضا دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.

1. دراســـــــة مثـــــــال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

- النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1)$$

بناء التعلمات

- إشارة المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(x - 1)$

- $x - 1 \leq 0$ يعني $x \leq 1$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1]$
- $x - 1 \geq 0$ يعني $x \geq 1$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

- جدول التغيرات: لدينا $f(1) = -8$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

بناء التعلمات

- نقط التقاطع مع محوري الإحداثيات:

– مع محور التراتيب: نحسب $f(0)$، نجد: $f(0) = -6$. إذن نقطة التقاطع هي: $C(0;-6)$

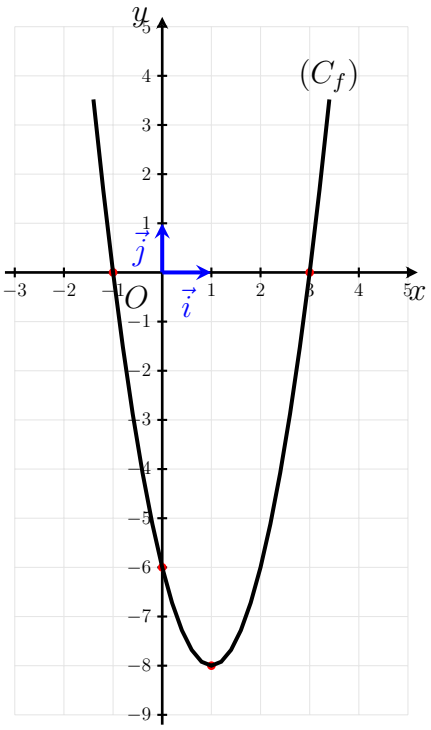
– مع محور الفواصل: نحل المعادلة $f(x) = 0$ أي: $2x^2 - 4x - 6 = 0$. بالمميز نجد حلين هما: $x_1 = -1$ و $x_2 = 3$. إذن نقطتا التقاطع هما: $A(-1;0)$ و $B(3;0)$

التمثيل البياني:

جدول القيم المساعدة:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	0	-6	-8	0

الرسم البياني للمنحنى (C_f):



نتيجة :

نقبل بصفة عامة أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c) = \lim_{x\to-\infty}(ax^2) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c) = \lim_{x\to+\infty}(ax^2)$$

نستنتج هكذا أنه:

- إذا كان $a > 0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c) = +\infty$
- إذا كان $a < 0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c) = -\infty$

مذكرة رقم : 06

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: كثيرات الحدود	التاريخ:
الموضوع: الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

تعريف :

نسمي f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة للمتغير الحقيقي إذا كانت معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

حيث a، b، c و d أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

1. دراســـــــة مثـــــــال (بكالوريا 2022) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم

بناء التعلمات

- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

- المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

- إشارة المشتقة:

نحل المعادلة $3x^2 - 12x + 9 = 0$

المميز: $\Delta = (-12)^2 - 4(3)(9) = 144 - 108 = 36$

بما أن $\Delta > 0$ فإن للمعادلة حلين هما:

$$x_1 = \frac{12-6}{6} = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{12+6}{6} = 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بناء التعلمات

- اتجاه تغير الدالة:

  - الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty;1]$ و $[3;+\infty[$
  - الدالة f متناقصة تماماً على المجال $[1;3]$

- جدول التغيرات: نحسب الصور: $f(1)=4$ و $f(3)=0$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

- معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$:

نحسب $f'(2)$ و $f(2)$:

$f(2)=(2)^3-6(2)^2+9(2)=2 \quad ; \quad f'(2)=3(2)^2-12(2)+9=-3$

بالتعويض في قانون معادلة المماس :

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y=-3(x-2)+2$$

ومنه

$$(\Delta): y=-3x+8$$

- نقط التقاطع مع محوري الإحداثيات:

  - مع محور التراتيب: نحسب $f(0)$ نجد: $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي المبدأ: $O(0;0)$
  - مع محور الفواصل: نحل المعادلة $f(x)=0$ لدينا $x^3-6x^2+9x=0$ نجد حلين هما: $x=0$ أو $x=3$. اذن نقط التقاطع هي: $O(0;0)$ و $B(3;0)$

التمثيل البياني:

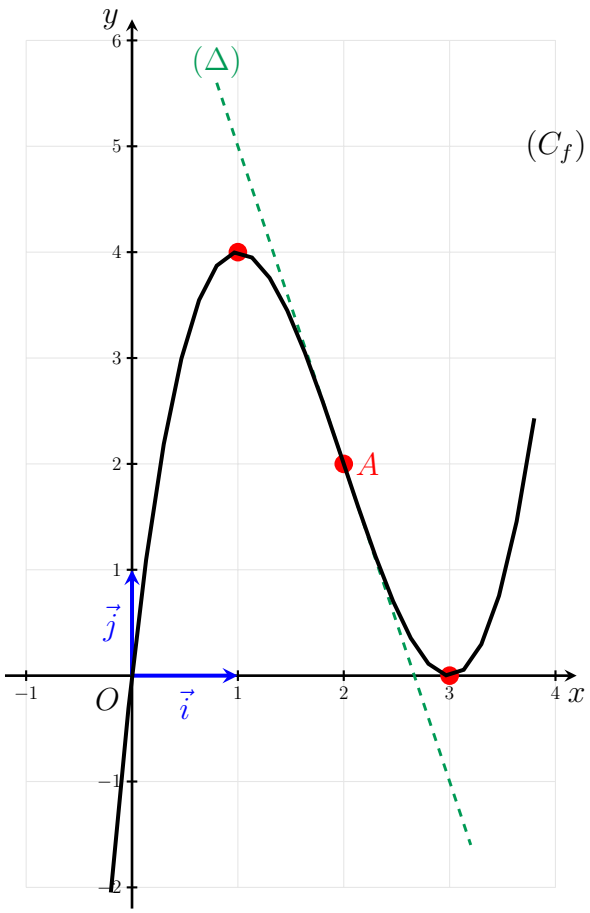
جدول القيم المساعدة للمنحنى (C_f):

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	4	2	0

جدول القيم المساعدة للمماس (Δ):

x	2	3
y	2	-1

بناء التعلمات



نتيجة :

نهاية دالة كثير حدود لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة :

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3)$$

2. الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) :

طريقة :

لدراسة الوضع النسبي لمنحنى دالة (C_f) ومستقيم (Δ) معادلته $y=ax+b$، نتبع المراحل التالية:

1. نحسب الفرق: $f(x)-(ax+b)$
2. نحل المعادلة: $f(x)-(ax+b)=0$
3. نضع جدول إشارة الفرق ومنه نستنتج الوضعية كما يلي:

- إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ)

بناء التعلمات

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x-2$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x-2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (Δ)

الحل:

- دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(x-2)]$:

لدينا $f(x)-(x-2)=x^3+x-2-x+2=x^3$. إذن $x^3=0$ يعني $x=0$.

- استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(x-2)$		$-$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) تحت (Γ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-2)$		(C_f) فوق (Γ)

ومنه المنحنى (C_f) يقع تحت المماس (Δ) على المجال $]-\infty;0[$، ويقع فوق المماس (Δ) على المجال $]0;+\infty[$، ويتقاطعان في النقطة $A(0;-2)$.

3. نقطة الإنعطاف :

تعريف :

نسمي نقطة انعطاف لمنحنى (C_f) ممثل لدالة f كل نقطة من (C_f) يخترق فيها (C_f) مماسه عندها.

نتيجة :

f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، و قابلة للإشتقاق مرتين على الأقل على I. إذا انعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها عند قيمة x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 أي $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف.

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم . بين أن $A(1;0)$ نقطة إنعطاف لـ (C_f).

بناء التعلمات

الحل:

- تبيان أن النقطة $A(1;0)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f):

حساب المشتقة الأولى: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

حساب المشتقة الثانية: نقوم باشتقاق عبارة المشتقة الأولى $f'(x)$، نجد:

$$f''(x) = 6x - 6$$

دراسة إشارة المشتقة الثانية: نحل المعادلة $6x - 6 = 0$ ومنه $6x = 6$ أي $x = 1$.

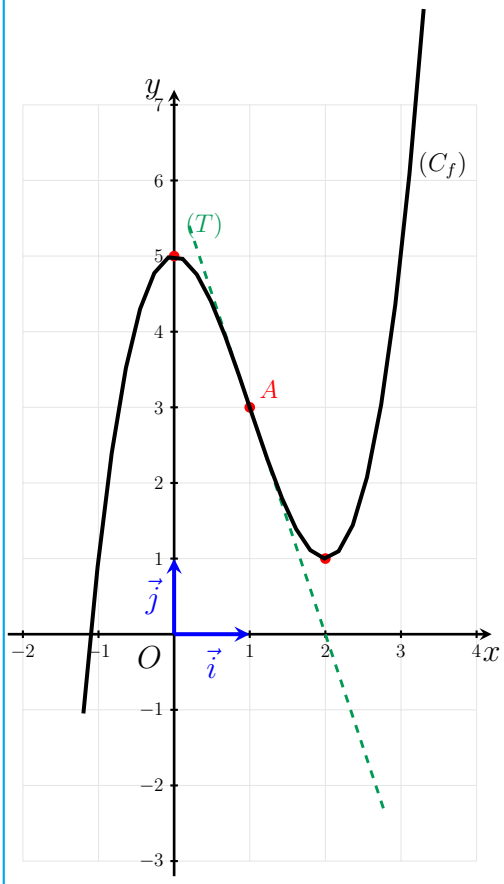
x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن المشتقة الثانية $f''(x)$ انعدمت عند القيمة 1 وغيرت إشارتها (من السالب إلى الموجب)، فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $A(1;0)$

مذكرة رقم : 07

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: القراءة البيانية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	نشاط مقترح : بكالوريا 2014  نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;3)$ كما في الشكل: بقراءة بيانية: 1. خمن نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ 2. ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها 3. اكتب معادله للمماس (T) 4. عيّن حلول المتراجحة: $f(x) > 5$ مناقشة النشاط : 1. تخمين نهايتي الدالة f : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 2. دراسة اتجاه تغير الدالة f بيانياً، نقرأ حركة المنحنى من اليسار إلى اليمين بتتبع الذروات: • الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty;0]$ والمجال $[2;+\infty[$ • الدالة f متناقصة تماماً على المجال $[0;2]$		

جدول التغيرات : بيانيا لدينا : $f(0)=5$ و $f(2)=1$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

3. إيجاد معادلة المستقيم المماس (T) المعرف بنقطتين:

بما أن (T) مستقيم، فإن معادلته تكتب من الشكل: $y=ax+b$

من القراءة البيانية، نلاحظ أن المستقيم (T) يمر بنقطتين هما:

نقطة التماس $A(1;3)$ ونقطة تقاطعه مع محور الفواصل $B(2;0)$

- حساب معامل التوجيه a:

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{2-1}=\frac{-3}{1}=-3$$

ومنه تصبح عبارة المعادلة: $y=-3x+b$

- حساب الثابت b: بالتعويض بإحداثيات النقطة $B(2;0)$ في العبارة نجد:
$b=6$ أي $0=-6+b$ ومنه $0=-3(2)+b$

بناء التعلمات

ومنه معادلة المستقيم المماس (T) هي: $(T):y=-3x+6$

4. تعيين حلول المتراجحة $f(x)>5$ بيانياً:

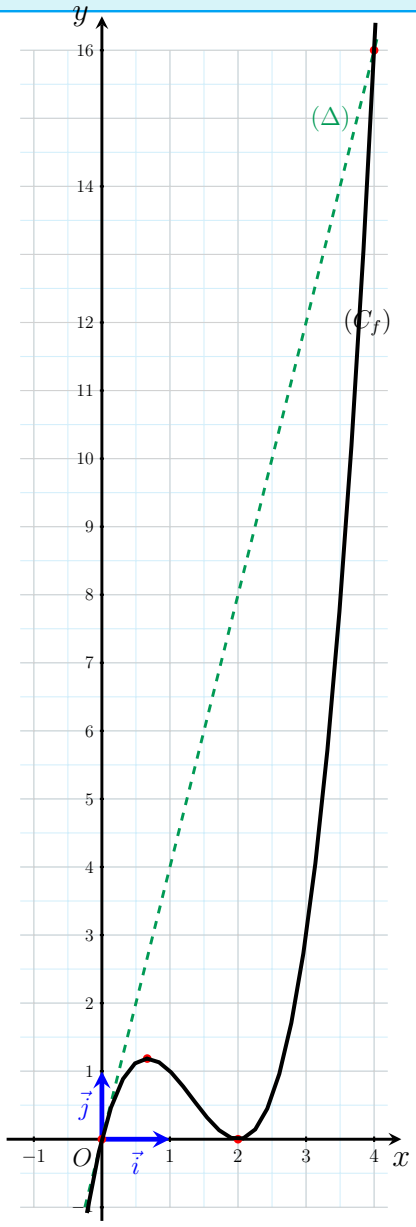
حلول هذه المتراجحة هي فواصل النقط من المنحنى (C_f) التي تقع تماماً فوق المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y=5$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة :

$$S=]3;+\infty[$$

مذكرة رقم : 08	الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: مناقشة معادلة بيانيا	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	نشاط مقترح (بكالوريا 2008) : في الشَّكل المقابل، المنحنى (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^3-4x^2+4x$ والمستقيم (Δ) هو مماس للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم O، حيث معادلته من الشكل $y=g(x)$ بقراءة بيانية، عيّن: 1. عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل. 2. إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ 3. عدد حلول المعادلة: $f(x)=g(x)$ 4. عيّن بيانياً، مجموعة قيم الوسيط الحقيقي m، التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول متمايزة  حل النشاط : 1. عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل هو نقطتان: $O(0;0)$ و $(2;0)$. 2. تعيين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$: • المنحنى (C_f) يقع تحت محور الفواصل على المجال $]-\infty;0]$ ومنه $f(x)\leq 0$ • المنحنى (C_f) يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0;+\infty[$ ومنه: $f(x)\geq 0$		

ومنه نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
إشارة $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3. تعيين عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$:

حلول هذه المعادلة بيانياً تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المماس (Δ)

ومنه أن للمعادلة: حلان متمايزان (هما $x=0$ و $x=4$)

4. تعيين مجموعة قيم الوسيط m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول متمايزة:

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي المتحرك ذو المعادلة $y=m$ (مناقشة أفقية نستعمل المسطرة)

ومنه تقبل المعادلة ثلاثة حلول متمايزة إذا وفقط إذا كان الوسيط m ينتمي إلى المجال :

$$m \in \left]0;\frac{32}{27}\right[$$

بناء التعلمات

1. التمثيل البياني وإشارة دالة :

خواص :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

- تكون دالة f موجبة تماماً على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع فوق محور الفواصل
- تكون دالة f سالبة تماماً على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع تحت محور الفواصل
- تنعدم f من أجل x_0 من I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني يقطع محور الفواصل عند x_0

2. مناقشة معادلة بيانياً :

طريقة :

118 لمناقشة بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$، ندرس فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المتحرك الموازي لحامل محور الفواصل

مذكرة رقم : 09

الأستاذ :

المستوى:	ثانوية:
ميدان التعلم:	الموسم الدراسي:
المحور: الدوال العددية	التاريخ:
الموضوع: الدوال التناظرية	المدة الزمنية:

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات
بناء التعلمات	**1. الدالة التناظرية:** **تعريف :** نسمي دالة تناظرية كل دالة f معرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بـ: $$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$ حيث a، b، c و d أعداد حقيقية مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ **2. نهايات الدوال التناظرية:** **نتيجة :** $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}\ ،\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$$ **3. المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (الأفقي):** **تعريف :** القول عن المستقيم ذو المعادلة $y=y_0$ والموازي لمحور الفواصل أنه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$) **نتيجة :** المنحني (C_f) يقبل، لما يؤول $+\infty$ أو $-\infty$، مستقيماً مقارباً موازياً لمحور الفواصل معادلته $y=\frac{a}{c}$ **خاصية :** النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) الدالة تناظرية هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)		

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-2}$

45 لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$

45 نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل للمنحني الممثل للدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

4. المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب (العمودي):

نتيجة 1 :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x-a}=-\infty \text{ ، } \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-a}=+\infty \text{ ، } \lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty \text{ ، } \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$$

بناء التعلمات

تعريف :

القول عن المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ والموازي لمحور التراتيب أنه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن

$$\lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=-\infty \text{ أو } \lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=+\infty$$

أو

$$\lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=-\infty \text{ أو } \lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=+\infty$$

نتيجة 2 :

المنحني (C_f) الممثل للدالة f (الدالة التناظرية) يقبل مستقيماً مقارباً موازياً لمحور التراتيب معادلته $x=-\dfrac{d}{c}$

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$

45 لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-3} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3} f(x)=-\infty$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=-3$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب للمنحني الممثل للدالة f

5. دراسة مثال (بكالوريا 2011):

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-2}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{1}=1$
- يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=(x+2)\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

لندرس إشارة $x-2$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
إشارة $x-2$		$-$	$\|$	$+$	

لدينا $\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

المستقيمات المقاربة:

يقبل المنحني (C_f) مستقيماً مقارباً موازياً لمحور الفواصل معادلته $y=1$

مستقيماً مقارباً موازياً لمحور التراتيب معادلته $x=2$

المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$

ولدينا من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{-4}{(x-2)^2}$$

بناء التعلمات

إشارة المشتقة:

نلاحظ أن المقام موجب إذن إشارة المشتقة من إشارة البسط وهي سالبة

إذن من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$، لدينا $f'(x)<0$

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	‖ $+\infty$	↘	1
			‖ $-\infty$		

بناء التعلمات

مركز التناظر:

نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي النقطة $A(2;1)$ وهي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

التقاطع مع المحورين:

- مع محور الفواصل: نضع $f(x)=0$ ومنه $x+2=0$ ومنه $x=-2$. إذن النقطة هي $(-2;0)$
- مع محور التراتيب: نحسب $f(0)$ ومنه $f(0)=\dfrac{2}{-2}=-1$. إذن النقطة هي $(0;-1)$

معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 4:

هي من الشكل: $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

لدينا: $f'(4)=\dfrac{-4}{(4-2)^2}=\dfrac{-4}{4}=-1$ و $f(4)=\dfrac{4+2}{4-2}=\dfrac{6}{2}=3$.

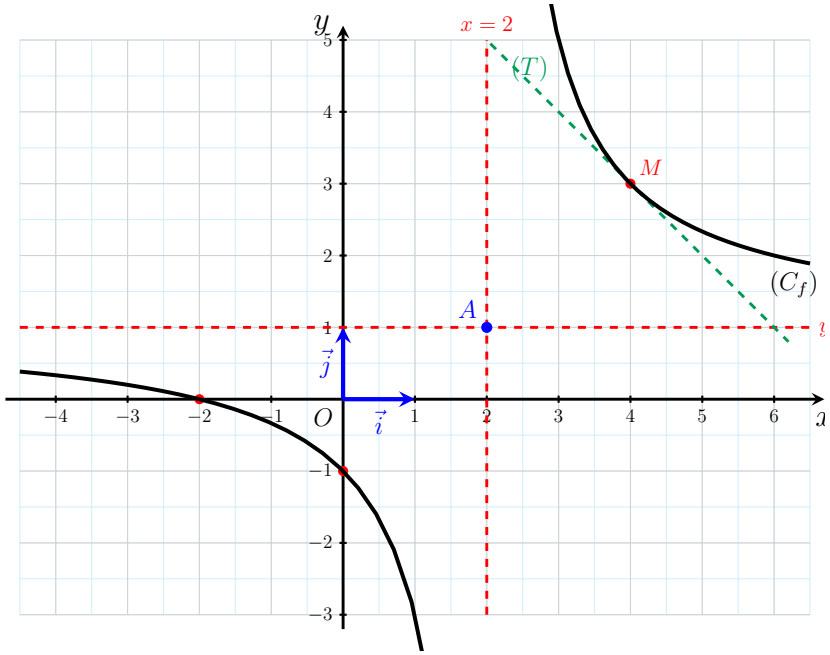
بالتعويض نجد:

$y=-1(x-4)+3$ ومنه $y=-x+4+3$

ومنه معادلة المماس (T) هي:

$$y=-x+7$$

التمثيل البياني: (C_f) , (T) :



بناء التعلمات

نتيجة :

- نقبل بصفة عامة أن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c} \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c} \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{<}-\frac{d}{c}} f(x)=\pm\infty \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{>}-\frac{d}{c}} f(x)=\pm\infty$$

- نعلم أن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجموعة التعريف $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و دالتها المشتقة هي:

$$f' : x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

- نقط تقاطع مع محوري الإحداثيات:

* محور الفواصل معادلته تعطى بـ: $y=0$ أي نحل المعادلة $f(x)=0$ أي $ax+b=0$ يعني $x=\frac{-b}{a}$ إذن النقطة هي: $\left(\frac{-b}{a};0\right)$

* محور التراتيب معادلته تعطى بـ: $x=0$ أي نحسب $f(0)$ و منه $f(0)=\frac{b}{d}$، إذن النقطة هي: $\left(0;\frac{b}{d}\right)$