على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

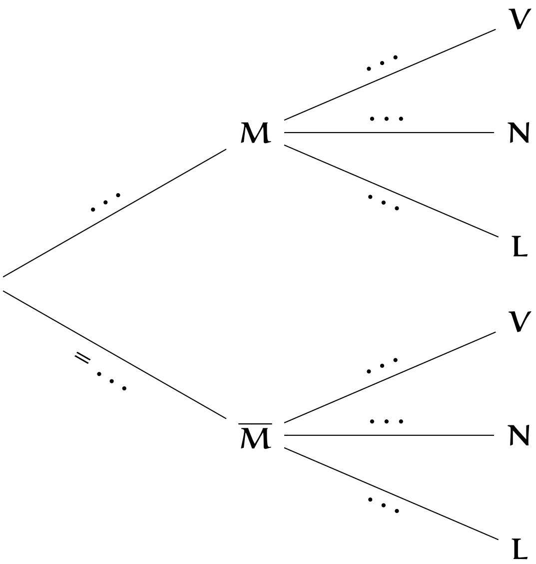
الموضوع الأول

التمرين 1: 04.5 نقاط

يحتوي صندوق U_1 على 9 كريات: 4 خضراء و 5 سوداء. ويحتوي صندوق U_2 على 10 كريات: 3 خضراء و 7 سوداء. (الكريات لا نفرق بينها باللمس).

نرمي زهرة نرد متوازنة (6 أوجه مرقمة من 1 الى 6 بدون تكرار):

- إذا كان الرقم الظاهر مربعاً كاملاً (1 أو 4)، نسحب عشوائياً كريتين على التوالي بإرجاع من الصندوق U_1.
- في الحالات الأخرى، نسحب عشوائياً 3 كريات في آن واحد من الصندوق U_2.



نعتبر الحوادث التالية:

❖ M: « الرقم الظاهر على النرد مربع كامل ». ❖ V: « الكريات المسحوبة كلها خضراء ».

❖ N: « الكريات المسحوبة كلها سوداء ». ❖ L: « الحصول على كريات ليست من نفس اللون ».

1) أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات

2) احسب الاحتمال $P(G)$ علما أن G: « الحصول على كريات من نفس اللون ».

3) إذا علمت أننا حصلنا على كريات مختلفة اللون، فما هو احتمال أننا سحبنا من الصندوق U_1؟

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المختلفة المحصل عليها.

- عرّف قانون الاحتمال للمتغير X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 2: 04.5 نقاط

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ 2$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول v_0.
- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ: $w_n = 2^{v_n}$.

- بيّن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0.

• احسب بدلالة n المجموع: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$، ثم استنتج قيمة الجداء $P_n = w_0 \times w_1 \times \cdots \times w_n$.

التمرين 3: 04 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z^2+1)(z^2-6z+13)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = 2-3i$ ، $z_B = iz_A$ و $z_C = -i$ ، L عدد مركب حيث: $L = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

أ) اكتب كلاً من العددين $z_A - z_C$ و $z_B - z_C$ على الشكل المثلثي.

ب) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

ج) بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها L^n عدداً حقيقياً سالباً تماماً.

ه) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg(z - z_C) = \arg(L)$.

التمرين 4: 07 نقاط

I) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$.

1. أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلّين أحدهما 1 والآخر α حيث: $2.79 \prec \alpha \prec 2.80$.

3. استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.
(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماساً مشتركاً (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3. ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

4. ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = \ln(m)$.

5. أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-1)h(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x: $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) استنتج الدالة H حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

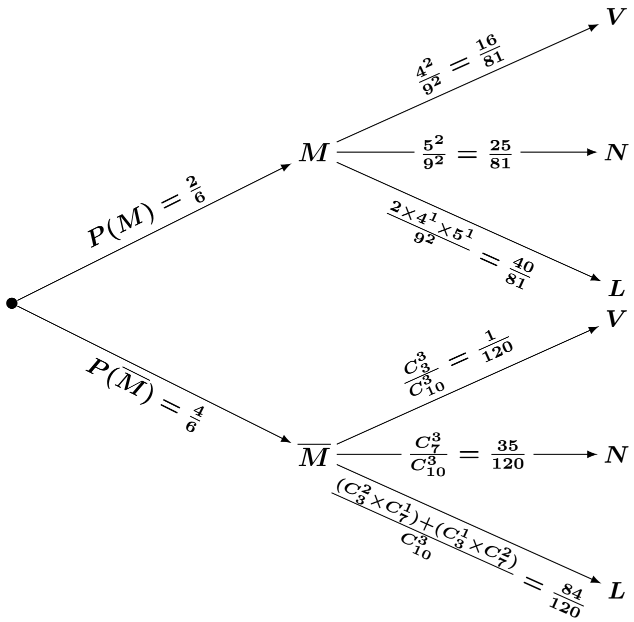
ه) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = 2$.

النّجاح في البكالوريا إن شاء اللّه. توفيقا وسدادا عن الأستاذ خساني مختار.

الموضوع الأول

حل التمرين الأول: الإحتمالات

① تمثيل شجرة الإحتمالات [ن 1.25]



② حساب الإحتمالات $P(G)$ [ن 1]

أ) حساب $P(G)$ (الحصول على كريات من نفس اللون):

الحادثة G تحقق إذا كانت الكريات كلها خضراء (V) أو كلها سوداء (N):

$$P(G)=P(M\cap V)+P(M\cap N)+P(\overline{M}\cap V)+P(\overline{M}\cap N)$$

ومنه $P(G)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{16}{81}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{25}{81}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{35}{120}\right)$

أي $P(G)=\frac{448}{1215}$

③ الإحتمال الشرطي [ن 1]

الاحتمال المطلوب هو $P_L(M)$:

$$P_L(M)=\frac{P(M\cap L)}{P(L)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{40}{81}}{1-P(G)}=\frac{200}{767}$$

④ المتغير العشوائي X [ن 1.5]

أ) القيم الممكنة لـ X (عدد الألوان المختلفة): [ن 0.5]

- في حالة الحصول على كريات من نفس اللون (V أو N): يكون لدينا لون واحد فقط، ومنه $X=1$، واحتماله: $P(X=1)=P(V\cup N)=P(G)=\frac{448}{1215}$.
- في حالة الحصول على كريات مختلفة اللون (L): يكون لدينا لونان (أخضر وأسود)، ومنه $X=2$، واحتماله: $P(X=2)=P(L)=\frac{767}{1215}$.
- إذن قيم المتغير العشوائي X هي: $X(\Omega)=\{1,2\}$.

ب) قانون الاحتمال لـ X: [ن 0.5]

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{448}{1215}$	$\frac{767}{1215}$

ج) الأمل الرياضياتي $E(X)$: [ن 0.5]

$$E(X)=1\left(\frac{448}{1215}\right)+2\left(\frac{767}{1215}\right)=\frac{1982}{1215}$$

التمرين الثاني

① البرهان بالتراجع واتجاه التغير [ن 1.25]

1) البرهان بالتراجع أن $u_n>2$: نسمي $P(n)$ الخاصية: "$u_n>2$" من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

- التحقق من صحة $P(0)$: لدينا $u_0=5$ وبما أن $5>2$ فإن الخاصية $P(0)$ **محققة**.

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n (أي نفترض أن $u_n > 2$)، ونبرهن على صحة $P(n+1)$:

لدينا $\frac{3(u_n-2)}{u_n+1} = \frac{3u_n-6}{u_n+1} = \frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{5u_n-4}{u_n+1} - 2 = u_{n+1}-2$، من فرضية التراجع لدينا $u_n > 2$
أي $u_n - 2 > 0$ وبما أن $u_n + 1 > 3$، إذن $u_{n+1} - 2 > 0$ ومنه $u_{n+1} > 2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، فإن $u_n > 2$ من أجل كل عدد طبيعي n.

2) اتجاه التغير والتقارب: $\frac{-(u_n-2)^2}{u_n+1} = \frac{-(u_n^2-4u_n+4)}{u_n+1} = \frac{5u_n-4-u_n^2-u_n}{u_n+1} = \frac{5u_n-4}{u_n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n$.

بما أن $(u_n-2)^2 > 0$ و $u_n+1 > 0$ فإن الفرق سالب، إذن (u_n) **متناقصة تماماً**. وبما أنها محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

② المتتالية الحسابية (v_n) [1.5 ن]

- إثبات أنها حسابية: $\frac{1}{3} = \frac{u_n-2}{3(u_n-2)} = \frac{3}{3(u_n-2)} - \frac{u_n+1}{3(u_n-2)} = \frac{1}{u_n-2} - \frac{1}{\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}} = v_n - \frac{1}{u_{n+1}-2} = v_{n+1} - v_n$.

إذن (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $\frac{1}{3} = \frac{1}{u_0-2} = v_0$.

- عبارة v_n و u_n: $\frac{n+1}{3} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} = v_0 + nr = v_n$، بما أن $\frac{1}{v_n} = u_n - 2$ ومنه $\frac{2n+5}{n+1} = 2 + \frac{3}{n+1} = 2 + \frac{1}{v_n} = u_n$.

- النهاية: $2 = \frac{2n}{n} \lim_{n\to+\infty} = u_n \lim_{n\to+\infty}$.

③ المتتالية الهندسية (w_n) والمجاميع [1.75 ن]

أ) إثبات أن (w_n) هندسية: $w_n \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{v_n} = 2^{v_n+\frac{1}{3}} = 2^{v_{n+1}} = w_{n+1}$، إذن (w_n) هندسية أساسها $q = \sqrt[3]{2}$
وحدها الأول $\sqrt[3]{2} = 2^{v_0} = w_0$.

ب) المجموع والجداء:

- المجموع S_n: $\sqrt[3]{2}\frac{2^{\frac{n+1}{3}}-1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{2}\frac{(\sqrt[3]{2})^{n+1}-1}{\sqrt[3]{2}-1} = w_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = S_n$.

- الجداء P_n: $2^{\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{n+1}{3}\right)} = 2^{(v_0+v_1+\cdots+v_n)} = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \cdots \times 2^{v_n} = w_0 \times w_1 \times \cdots \times w_n = P_n$ $= 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{6}}$.

التمرين الثالث

① حل المعادلة في $\mathbb{C}$ [0.75 ن]

المعادلة: $(z^2+1)(z^2-6z+13) = 0$ تعني:

- إما $z^2 + 1 = 0$ ومنه $z^2 = -1$ أي $z = i$ أو $z = -i$.

- أو $z^2 - 6z + 13 = 0$: نحسب المميز $\Delta = (-6)^2 - 4(13) = -16 = (4i)^2$. الجذران هما: $z = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$ أو $z = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$.

مجموعة الحلول: $S = \{i, -i, 3-2i, 3+2i\}$.

② الشكل المثلثي [1 ن]

لدينا $z_A = 2-3i$ و $z_C = -i$، نحسب $z_B = i(2-3i) = 2i - 3i^2 = 3+2i$.

- تعيين الشكل المثلثي للعدد $z_A - z_C = 2-2i$:

– الطويلة: $|z_A - z_C| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

– العمدة θ_1: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ إذن: $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}$

– الشكل المثلثي: $z_A - z_C = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

• تعيين الشكل المثلثي للعدد $z_B - z_C = 3 + 3i$:

– الطويلة: $|z_B - z_C| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

– العمدة θ_2: $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{a}{r} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{b}{r} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ إذن: $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$

– الشكل المثلثي: $z_B - z_C = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

③ طبيعة المثلث ABC والدائرة [1.25 ن]

أ) طويلة وعمدة L وطبيعة المثلث: $|L| = \dfrac{|z_A - z_C|}{|z_B - z_C|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3}$، $\arg(L) = \arg(z_A - z_C) - \arg(z_B - z_C) = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$. بما أن $\arg(L) = -\dfrac{\pi}{2}$ فإن المثلث ABC قائم في C.

ب) إثبات الانتماء لنفس الدائرة: بما أن المثلث ABC قائم في C، فإن النقط A, B, C تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$. مركز الدائرة I هو منتصف $[AB]$: $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2 - 3i + 3 + 2i}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. نصف القطر $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{|z_B - z_A|}{2} = \dfrac{|1+5i|}{2} = \dfrac{\sqrt{1+25}}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$. بما أن $OI = |z_I| = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\dfrac{25+1}{4}} = \dfrac{\sqrt{26}}{2} = R$، فإن O تنتمي للدائرة أيضاً.

④ قيم n ومجموعة النقط [1 ن]

د) قيم العدد الطبيعي n ليكون L^n حقيقياً سالباً تماماً:

لدينا العدد المركب L على الشكل المثلثي: $L = \dfrac{2}{3}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$، بتطبيق دستور موافر نجد: $L^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left[\cos\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$، ليكون L^n عدداً حقيقياً سالباً تماماً، يجب أن يتحقق الشرطان: $\sin\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$ و $\cos\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right) < 0$ ، هذا يعني أن العمدة يجب أن تكون من الشكل: $-\dfrac{n\pi}{2} = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ أي: $n = -4k - 2$ (حيث k عدد صحيح موجب).

هـ) مجموعة النقط M: لدينا: $\arg(z - z_C) = \arg(L)$ معناه $\arg(z - z_C) = -\dfrac{\pi}{2}$. مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[CM)$ (باستثناء C) حيث $(\vec{u}; \vec{CM}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

التمرين الرابع

① الجزء الأول: [2.5 ن]

1) النهايات: [0.5 ن]

• عند $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{+\infty}\underbrace{e^{-x+1}}_{+\infty} - 1$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1)\dfrac{e}{e^x} - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\dfrac{x^2}{e^x}}_{0} - \underbrace{\dfrac{x}{e^x}}_{0} + \underbrace{\dfrac{1}{e^x}}_{0}\right]e - 1 = -1$

استعملنا تزايد مقارن حيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

[01 ن]

2) اتجاه التغير:

لدينا: $h'(x)=(2x-1)e^{-x+1}+(x^2-x+1)(-1)e^{-x+1}=e^{-x+1}[2x-1-x^2+x-1]=(-x^2+3x-2)e^{-x+1}$

أي اشارة المشتقة من إشارة $-x^2+3x-2$، ومنه $-x^2+3x-2=0$ نجد $x_1=1$ و $x_2=2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة h متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1]$ و $[2,+\infty[$ ، و h متزايدة تماماً على المجال $[1,2]$.

[01 ن]

3) الحلول والإشارة:

- $h(1)=(1^2-1+1)e^{-1+1}-1=0$، إذن $x=1$ حل للمعادلة $h(x)=0$.

- الدالة h مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ولدينا: $h(2.79)\approx0.003>0$ و $h(2.80)\approx-0.006<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]2,+\infty[$ حيث $2.79<\alpha<2.80$.

إذن إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$ كالتالي :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

② الجزء الثاني: [04.5 ن]

[0.5 ن]

1) حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(2x-1)}_{-\infty}\underbrace{e^{-x+1}}_{+\infty}=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-1)\frac{e}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{2ex}{e^x}}_{0}-\underbrace{\frac{e}{e^x}}_{0}=0$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y=0$.

[0.75 ن]

2) اتجاه التغير وجدول التغيرات:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x)=(2)e^{-x+1}+(2x-1)(-1)e^{-x+1}=e^{-x+1}[2-2x+1]=(3-2x)e^{-x+1}$ بما أن $e^{-x+1}>0$، فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3-2x)$. تنعدم عند $x=1.5$.

- f متزايدة تماماً على $]-\infty,1.5]$ ومتناقصة تماماً على $[1.5,+\infty[$.

x	$-\infty$		1.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-0.5}$	$\searrow$	0

[0.5 ن]

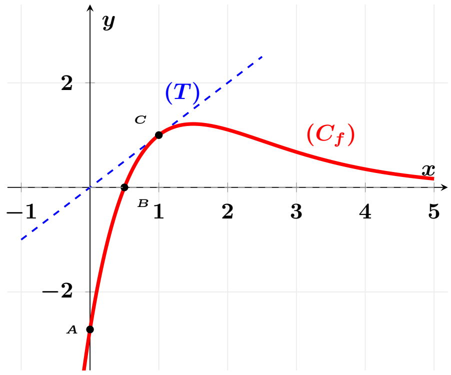
2) المماس المشترك (T) عند $x=1$:

- $f(1)=(2(1)-1)e^0=1$ و $g(1)=\frac{2(1)-1}{1-1+1}=1$، النقطة $(1,1)$ مشتركة.

• $f'(1)=(3-2)e^{0}=1$.

• $g'(x)=\dfrac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$ ومنه $g'(1)=\dfrac{-2+2+1}{(1)^2}=1$، بما أن $f(1)=g(1)$ و $f'(1)=g'(1)$، فإنهما يشتركان في مماس معادلته: $y=x$.

3) الرسم البياني [0.75 ن]



$A(0,-e)$; $B(0.5,0)$; $C(1,1)$

4) المناقشة البيانية للمعادلة $f(x)=\ln(m)$ [0.5 ن]

قيم الوسيط m	قيم $M=\ln(m)$	عدد وإشارة الحلول
$0<m<e^{-e}$	$M<-e$	حل وحيد سالب
$m=e^{-e}$	$M=-e$	حل وحيد معدوم $(x=0)$
$e^{-e}<m<1$	$-e<M<0$	حل وحيد موجب
$m=1$	$M=0$	حل وحيد موجب $(x=0.5)$
$1<m<e^{2e^{-0.5}}$	$0<M<2e^{-0.5}$	حلان متمايزان موجبان
$m=e^{2e^{-0.5}}$	$M=2e^{-0.5}$	حل وحيد موجب $(x=1.5)$
$m>e^{2e^{-0.5}}$	$M>2e^{-0.5}$	لا توجد حلول

5) الوضع النسبي والمساحة: [01.5 ن]

• أ) إشارة الفرق: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)h(x)}{x^2-x+1}$، المقام موجب تماماً، الإشارة من إشارة $(2x-1)h(x)$:

x	$-\infty$		0.5		1		α		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

• ب) الوضع النسبي: (C_f) تحت (C_g) على $]-\infty,0.5]\cup[\alpha,+\infty[$ وفوقه على $[0.5,\alpha]$.

• ج) المكاملة بالتجزئة: نضع $u=2t-1$ ومنه $u'=2$ و $v'=e^{-t+1}$ ومنه $v=-e^{-t+1}$.

وعليه $\displaystyle\int_1^x f(t)dt=[-(2t-1)e^{-t+1}]_1^x-\int_1^x -2e^{-t+1}dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$.

• د) استنتاج الدالة H حل المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ التي تنعدم عند $x=1$:

بما أن H هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=f(x)$، فإن H هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. نعلم أن الدالة الأصلية التي تنعدم عند القيمة a هي الدالة المعرفة بالتكامل: $H(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ وبما أن الشرط الابتدائي هو $H(1)=0$، فإن:

$H(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$.

• هـ) المساحة: على $[1,2]$ لدينا $f(x)\geq g(x)$.

ومنه $S=\displaystyle\int_1^2 (f(x)-g(x))dx=[-(2x+1)e^{-x+1}+3-\ln(x^2-x+1)]_1^2$

أي $S=(-5e^{-1}+3-\ln 3)-(-3+3-0)=3-5e^{-1}-\ln 3\,ua$.

النجاح في البكالوريا إن شاء الله.

توفيقا وسدادا عن الأستاذ خساني مختار.

الموضوع الثاني

التمرين 1: 04.5 نقاط

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) أ) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

ب) عين طبيعة الرباعي $ABCD$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $z_n=(z_B)^n+(z_C)^n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $t_n=z_{6n}$.

– عبر عن t_n بدلالة n ثم احسب P_n بدلالة n حيث: $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times\cdots\times t_n$.

التمرين 2: 04 نقاط

يحتوي كيس غير شفاف على كريات متماثلة فيما بينها، 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء.
نؤدي تجربة عشوائية تتكون من 3 مراحل؛ في كل مرحلة نسحب كرة، نسجل لونها، ثم نعيدها للكيس ونضيف معها كرة أخرى من نفس لونها قبل السحب الموالي.

1. أنشئ شجرة الاحتمالات التي تمذج هذه التجربة .
2. احسب احتمال الحوادث التالية:
   - A: "الحصول على 3 كرات حمراء".
   - B: "الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط في السحبات الثلاث".
   - C: "الحصول على كرة حمراء في السحبة الثالثة".
3. علمًا أن الكرة الثالثة المسحوبة بيضاء، ما احتمال أن تكون الكرة الأولى كانت حمراء؟
4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات "الحمراء" المسحوبة.
   (أ) حدد قيم المتغير العشوائي X.
   (ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 3: 04.5 نقاط

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=3+e^{-0.5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$.

1. (أ) تحقّق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-3)^2+3$.
   (ب) نعتبر الدالة f المعرفة على $[3;4]$ بـ $f(x)=(x-3)^2+3$. ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحنى (C_f) والمنصف الأول $(\Delta):y=x$.

(ج) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 دون حسابها (موضحاً خطوط الإنشاء).

(د) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2. • برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 \prec u_n \prec 4$.
   • ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3. المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.
   • بيّن أنَّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدّها الأوّل.
   • اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنَّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3 + e^{-2^{n-1}}$، احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$، احسب P_n بدلالة n.

التمرين 4: 07 نقاط

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71 < \alpha < 1,72$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2 + \dfrac{-1 + \ln x}{x}$.
(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) " نقبل أن $f(\alpha) \simeq 0,87$ و $f(\beta) = f(\gamma) = 0$ حيث $0,76 < \beta < 0,78$ و $4,19 < \gamma < 4,22$ ".
- أنشئ في المعلم السابق المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

4) ليكن λ عدد حقيقي حيث $1 \prec \lambda \preceq e$ ، نرمز ب $\mathscr{A}(\lambda)$ إ لى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 1$ و $x = \lambda$.

أ) احسب $\mathscr{A}(\lambda)$ بدلالة λ .

ب) عين قيمة λ حيث $\mathscr{A}(\lambda) = \dfrac{1}{2}cm^2$

النّجاح في البكالوريا إن شاء اللّه.

توفيقا وسدادا عن الأستاذ خساني مختار.

مناقشة بكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات للسنة الثالثة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: الأعداد المركبة

① حل المعادلة في $\mathbb{C}$ [1 ن]

$(z-4)(z^2-2z+4)=0$ تعني إما $z-4=0$ أو $z^2-2z+4=0$:

- **الحالة الأولى:** $z-4=0$ ومنه $z_1=4$ [0.25 ن]
- **الحالة الثانية:** $z^2-2z+4=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية:
  - **حساب المميز Δ:** $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(4)=4-16=-12$ بما أن $\Delta<0$ ومعاملات حقيقية فإن المعادلة تقبل جذرين مركبين مترافقين.
  - نكتب Δ على الشكل: $\Delta=12\times(-1)=12i^2=(2i\sqrt{3})^2$ و $w=2i\sqrt{3}=$. [0.5 ن]
  - حساب الجذور:

  $z_2=\dfrac{-b-w}{2a}=\dfrac{-(-2)-2i\sqrt{3}}{2(1)}=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ و $z_3=\overline{z_2}=1+i\sqrt{3}$. [0.25 ن]

  مجموعة الحلول: $S=\{4\,;\,1-i\sqrt{3}\,;\,1+i\sqrt{3}\}$

② الشكل الأسي وطبيعة المثلث [1 ن]

- **كتابة** $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ **على الشكل الأسي:**

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1-i\sqrt{3}-4}{1+i\sqrt{3}-4}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3+i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3+i\sqrt{3}\right)}=\frac{(-3-i\sqrt{3})^2}{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ [0.25 ن]

ليكن العدد المركب $Z=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. نعين طويلته وعمدته: [0.25 ن]

- الطويلة (r):

$$r=|Z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

- العمدة (θ): نبحث عن θ حيث:

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ إذن: $\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

- ومنه $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ [0.25 ن]
- **استنتاج طبيعة المثلث** ABC: بما أن $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ فإن $AC=AB$ (المثلث متساوي الساقين). وبما أن $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ أي $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ "(60°)"، فإن المثلث ABC **متقايس الأضلاع.** [0.5 ن]

③ الدوران والرباعي [1 ن]

- أ) لاحقة النقطة D: $z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_O) + z_O = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} = -2$ [0.5 ن]

- ب) طبيعة الرباعي $ABCD$: نلاحظ أن $z_A + z_D = 4 - 2 = 2$ و $z_B + z_C = 2$. بما أن $z_A + z_D = z_B + z_C$ فإن القطرين $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف، فالرباعي متوازي أضلاع. وبما أن $AB = AC = BC = BD = 2\sqrt{3}$، فالرباعي معين. [0.5 ن]

(طريقة ثانية): بما أن D صورة B بدوران مركزه O فإن $OB = OD$، وبما أن ABC متقايس الأضلاع و A, O, D على استقامة واحدة، نجد بتناظر المسافات أن $AB = AC = CD = DB = 2\sqrt{3}$، فالرباعي معين.

④ المتتالية z_n والمجموع [1.25 ن]

- أ) تبيان العبارة: أولا لدينا $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه

$$z_n = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^n + (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^n = 2^n(e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{-i\frac{n\pi}{3}}) = 2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right) = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$ [0.5 ن]

- ب) التعبير عن t_n: $t_n = z_{6n} = 2^{6n+1}\cos\left(\frac{6n\pi}{3}\right) = 2^{6n+1}\cos(2n\pi) = 2^{6n+1}$ [0.25 ن]

- حساب الجداء P_n بدلالة n: [0.5 ن]

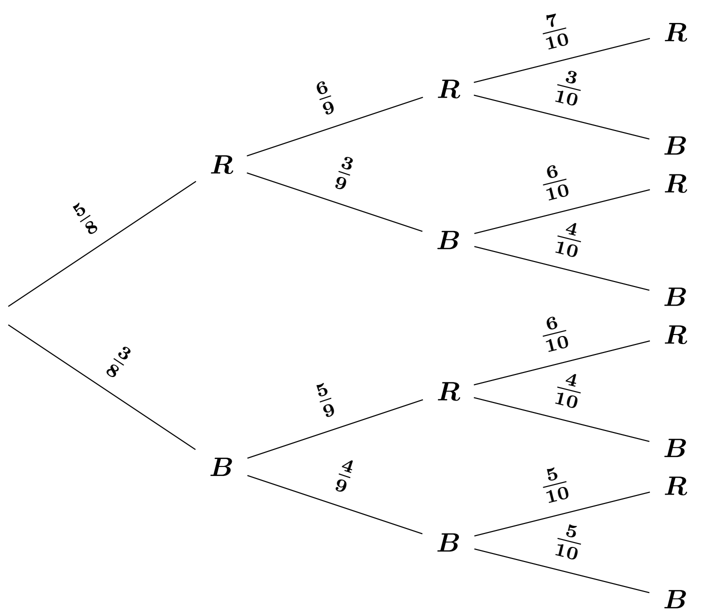
لدينا: $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \cdots \times t_n$. وبما أن $t_n = 2^{6n+1}$، فإن: $P_n = 2^{6(0)+1} \times 2^{6(1)+1} \times 2^{6(2)+1} \times \cdots \times 2^{6n+1}$ ومنه $P_n = 2^{1+7+13+\cdots+(6n+1)}$

نضع $u_n = 6n+1$ هي متتالية حسابية حيث $r = 6$، ليصبح الجداء من الشكل:

$$P_n = 2^{u_0+u_1+\cdots+u_n} = 2^{\frac{(n+1)}{2}(u_0+u_n)} = 2^{\frac{n+1}{2}(6n+2)} = 2^{(n+1)(3n+1)}.$$

حل التمرين الثاني: الاحتمالات

① إنشاء شجرة الإحتمالات [1 ن]



② حساب الإحتمالات [1.5 ن]

- احتمال الحادثة A (3 كرات حمراء): $P(A) = P(R,R,R) = \frac{5}{8} \times \frac{6}{9} \times \frac{7}{10} = \frac{210}{720} = \frac{7}{24}$ [0.5 ن]

• احتمال الحادثة B (كرة بيضاء واحدة فقط):

$$P(B) = P(R,R,B) + P(R,B,R) + P(B,R,R) = \frac{90+90+90}{720} = \frac{270}{720} = \frac{3}{8}$$ [0.5 ن]

• احتمال الحادثة C (حمراء في السحبة الثالثة):

$$P(C) = P(R,R,R) + P(R,B,R) + P(B,R,R) + P(B,B,R) = \frac{210+90+90+60}{720} = \frac{5}{8}$$ [0.5 ن]

③ الإحتمال الشرطي [0.5 ن]

نرمز بـ R_1 للكرة الأولى حمراء و B_3 للكرة الثالثة بيضاء:

$$P_{B_3}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(R,R,B) + P(R,B,B)}{P(B_3)} = \frac{150/720}{270/720} = \frac{5}{9}$$ [0.5 ن]

④ المتغير العشوائي X [1 ن]

• قيم المتغير X: هي $\{0,1,2,3\}$. [0.25 ن]

• قانون الاحتمال:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{24}$	1

[0.5 ن]

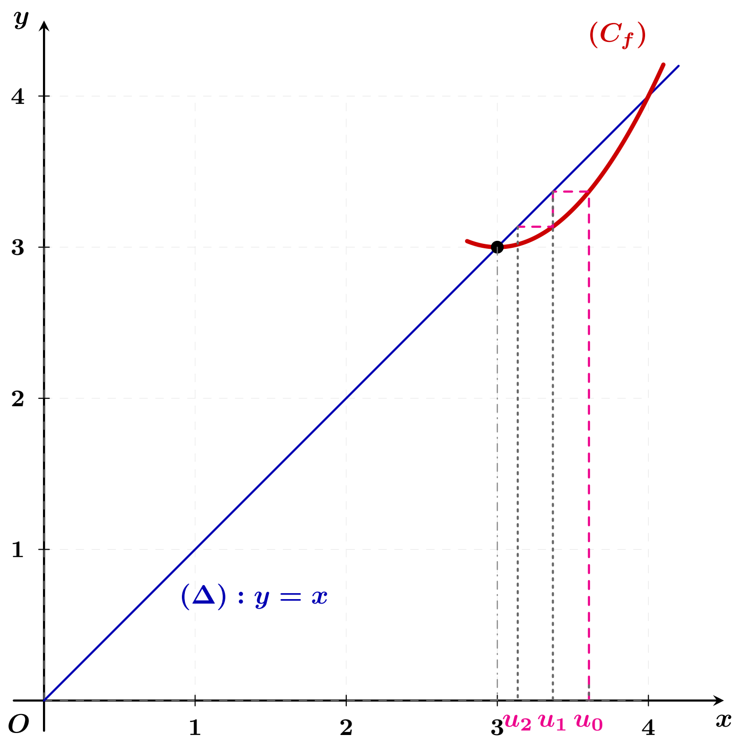
• الأمل الرياضياتي: $E(X) = (0\times\frac{1}{12}) + (1\times\frac{3}{8}) + (2\times\frac{3}{8}) + (3\times\frac{7}{24}) = \frac{9+18+21}{24} = \frac{48}{24} = 2$. [0.25 ن]

حل التمرين الثالث: المتتاليات

① التحقق والتخمين [1.25 ن]

• التحقق: لدينا $(u_n-3)^2+3 = u_n^2 - 6u_n + 9 + 3 = u_n^2 - 6u_n + 12$، إذن فعلاً: $u_{n+1} = (u_n-3)^2+3$. [0.25 ن]

• الرسم والإنشاء:



التخمين : نلاحظ من الرسم أن $u_0 \succ u_1 \succ u_2 \succ \ldots$ أي أن المتتالية متناقصة، ومتقاربة نحو 3.

[ن 1.25] ② البرهان بالتراجع واتجاه التغير

• **البرهان بالتراجع:** لنسمي الخاصية $P(n) : 3 < u_n < 4$

– لدينا $3 < u_0 = 3 + e^{-2} < 4$، إذن $P(0)$ **محققة.** [ن 0.25]

– نفرض صحة $P(n)$ أي أن $3 < u_n < 4$ من أجل عدد طبيعي n، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $3 < u_{n+1} < 4$.

من الفرضية لدينا: $3 < u_n < 4$ ومنه $0 < u_n - 3 < 1$ أي $0 < (u_n - 3)^2 < 1$ وعليه $0 + 3 < (u_n - 3)^2 + 3 < 1 + 3$

إذن: $3 < u_{n+1} < 4$ إذن $P(n+1)$ **صحيحة.** [ن 0.5]

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3 < u_n < 4$.

• **اتجاه التغير:** ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)^2 + 3 - u_n = u_n^2 - 6u_n + 9 + 3 - u_n = u_n^2 - 7u_n + 12 = (u_n - 3)(u_n - 4)$، بما أن $3 < u_n < 4$

من البرهان السابق، فإن: $(u_n - 3) > 0$ و $(u_n - 4) < 0$، إذن $u_{n+1} - u_n < 0$ **فالمتتالية متناقصة تماماً.** [ن 0.25]

• **التقارب:** بما أن (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 **فهي متقاربة.** [ن 0.25]

[ن 1.25] ③ المتتالية (v_n)

• **إثبات أنها هندسية:** $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln((u_n - 3)^2 + 3 - 3) = \ln((u_n - 3)^2) = 2\ln(u_n - 3) = 2v_n$.

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = 2$. [ن 0.5]

• **الحد الأول:** $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln(3 + e^{-0.5} - 3) = \ln(e^{-2}) = -0.5$. [ن 0.25]

• **كتابة v_n و u_n بدلالة n:** $v_n = v_0 \times q^n = -0.5 \times 2^n$. [ن 0.25]

بما أن $v_n = \ln(u_n - 3)$ ومنه $u_n - 3 = e^{v_n}$ أي $u_n = 3 + e^{-0.5\times 2^n}$.

• **النهاية:** بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0.5 \times 2^n) = -\infty$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. [ن 0.25]

[ن 0.75] ④ حساب الجداء P_n

نلاحظ أن $u_n - 3 = e^{v_n}$، إذن:

$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n} = e^{v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} = e^{-0.5 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}} = e^{0.5 - 2^{n-1}}$. [ن 0.75]

حل التمرين الرابع: الدوال

[ن 2] ① الجزء الأول:

[ن 0.5] أ) حساب النهايات:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

التعليل: لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(2 - \ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 = 0^+$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = -0.5$$

التعليل: لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ حسب التزايد المقارن.

ب) اتجاه التغير وجدول التغيرات: [0.75 ن]

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x)=\frac{(-\frac{1}{x})(x^2)-(2x)(2-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-4x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2\ln x-5}{x^3}$$

دراسة الإشارة: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2\ln x-5)$ لأن $x^3>0$. تنعدم المشتقة عند $2\ln x=5$ ومنه $\ln x=2.5$ أي $x=e^{2.5}$.

x	0		$e^{2.5}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(e^{2.5})$	↗	-0.5

الدالة g متناقصة تماماً على $]0;e^{2.5}]$ ومتزايدة تماماً على $[e^{2.5};+\infty[$.

ج) مبرهنة القيم المتوسطة والإشارة: [0.75 ن]

الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $]0;e^{2.5}]$، ولدينا:
$g(1.71)\approx 0.003>0$ و $g(1.72)\approx -0.004<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.71<\alpha<1.72$. **إشارة** $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

② الجزء الثاني: [0.5 ن]

1) حساب النهايات:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}\right)=-\infty$$

التعليل: لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}(-1+\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x=0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

التعليل: لأن $\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

ب) اتجاه تغير الدالة f: [0.75 ن]

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{x})(x)-1(-1+\ln x)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1+1-\ln x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

نلاحظ أن $f'(x)=g(x)$أي إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

الدالة f ومتزايدة تماماً على $]0;\alpha]$ ، ومتناقصة تماماً على $[\alpha;+\infty[$.

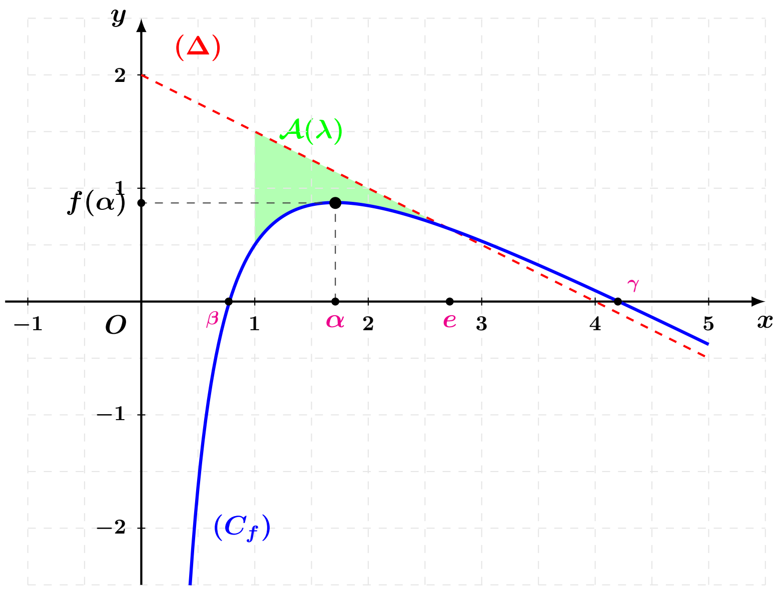
③ المقارب المائل والوضعية: [1 ن]

أ) إثبات المستقيم المقارب المائل: لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-\frac{1}{2}x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$

ب) دراسة الوضعية النسبية: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\frac{-1+\ln x}{x}$. الإشارة من إشارة $(-1+\ln x)$ لأن $x>0$:

- $-1+\ln x=0$ ومنه $\ln x=1$ أي $x=e$.
- **الوضعية:** (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e. يكون (C_f) **تحت** (Δ) على المجال $]0;e]$ و **فوق** (Δ) على المجال $[e;+\infty[$.

④ الرسم : [1.5 ن]



④ حساب المساحة: [1.75 ن]

أ) حساب $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة λ: بما أن $1 \leq \lambda \leq e$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)، ومنه:

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^{\lambda}(y_\Delta - f(x))dx=\int_1^{\lambda}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\ln x\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}=\ln\lambda-\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2 cm^2$$

ب) تعيين قيمة λ: نحل المعادلة $\ln\lambda-\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=\frac{1}{2}$ بتعويض $X=\ln\lambda$: $-X^2+2X-1=0$ ومنه $-(X-1)^2=0$ ومنه $X=1$ إذن $\ln\lambda=1$ ومنه $\lambda=e$.

النّجاح في البكالوريا إن شاء اللّه.

توفيقا وسدادا من الأستاذ خساني مختار.