

كؤكب الذُخبة في مادة الرِّياضيّات - بكالوريا 2024 -

محطة التحضير الممتاز نحو امتحان البكالوريا التجريبية

بكالوريات تجريبية سابقة مُختارة لبعض ثانويات الوطن الحبيب



الجزء الأول : 01



،، خاص بشعبة رياضيات ،،

باقية الامتياز - { 10 } بكالوريات تجريبية تحضيرية -

• { 07 } بكالوريات تجريبية مُنتقاة بعناية ،،

،، مرفقة بالتصحيح النموذجي المُفصّل ،،

• { 03 } بكالوريات تجريبية للمحاولة و الاستئناس ،،

ملاحظة : يمكن لتلاميذ شعبتي علوم تجريبية و تقني رياضي الاستفادة من هذه الباقية نظرا للعامل المشترك في أغلب المحاور بين الشعب الثلاث ،،
علما أنه سيتم رفع باقية لكل شعبة قريبا ،،

شِعارنا ... ،، تعب المُراجعة أفضل مِنْ ألم السُّقوط ،،

المنصة العلمية : عقبة بن نافع <https://www.facebook.com/okba.bac.2010>

توجيهات المنصة العلمية للنخبة - بكالوريا 2024 -

1* أيها التلاميذ الشرفاء ،، نضع بين أيديكم هذه الباقة المعلوماتية التطبيقية التحضيرية المُفعمة بالأفكار الطازجة والمفيدة في مادة الرياضيات شعبة رياضي ،، التي تتضمن ::

،، { 10 بكالوريات تجريبية تحضيرية مُختارة للمواسم الدراسية السابقة } ،،
،، من أجل التحضير و الاستعداد و ذلك بأخذ الأفكار الطازجة بشكل مباشر ،،

2* أيها النخبة هذه الباقة تعتبر محطة تحصيلية تحضيرية نحو اختبار الفصل الثالث 2024 ،، أي امتحان البكالوريا التجريبي ،، فامتحان البكالوريا ،، إذن المطلوب منكم هو استغلال هذه الفترة للمحاولة في هذه الباقة ،،

3* أيها النبلاء تجاوزوا الأفكار المُعادة لأنها وُضعت لفئة معينة من أجل التمرن وكسب سرعة بديهية معتبرة في حين مصادقتها بمراعاة المستوى الفردي لكل تلميذ { } ،، طبعاً ،،

4* أيها الشرفاء النظاميين : وليكن في العلم أن هذه الباقة التحضيرية لاختبار الفصل الثالث تشمل أغلب المحاور ،، تعتبر محطة تحضيرية مركزة لها يجب استغلال الوقت للمحاولة في هذه الباقة مع تدوين الأفكار الطازجة بعد المحاولة ،، استعداداً للامتحان ،، مع ترك ما لم يتم التطرق له في القسم حتى يصل وقته المحدد ،، و الله المُستعان .

5* أيها الشرفاء الأحرار : المطلوب منكم المحاولة في كامل مضمون الباقة لتكون بمثابة مرحلة التحضير المركز و مواكبة وتيرة الدروس النظامية للموسم الحالي ،، مع تدوين الأفكار طبعاً ،،

6* أيها التلاميذ الشرفاء ،، بعد تفحص المواضيع و المحاولة في أكبر قدر منها نرجو تدوين الأفكار الطازجة في كراس خاص مع تحديد رقم الموضوع و التمرين ،، من أجل العودة لأخذها قبيل موعد الامتحان الرسمي للبكالوريا في قادم الزمن .. تسهيلاً لكم و استغلالاً للوقت ،،



7* ملاحظة ختامية :: الباقة موجهة لشعبة : **رياضيات** ... أي أنه يمكن لشعبة تقني رياضي الاستفادة منها بالدرجة الأولى نظراً للعامل المشترك الأكبر في كل المحاور ... أما بالنسبة لشعبة علوم تجريبية الاستفادة منها في المحاور المشتركة فقط مع مراعاة البرنامج المقرر للشعبة طبعاً ،،

تغريدة أمل : **أيها التلاميذ الشرفاء** ،، **إننا نسعى لتوفير أجود المواد المعلوماتية الأولية لكم ،، من أجل الإبداع في صنع تاج الامتياز ،،**

كؤكب النؤبة في مادة الرياضيات - بكالوريا 2024 -

محطة التحضير الممتاز لامتحان البكالوريا التجريبية

القسم الأول : I

الاختبارات :

، من 01 إلى 07 ،،

المواضيع الـ {14} مرفقة بالتصحيح النؤنوجي المفصل و سلم التقيط

ملاحظة : هذه الباقة خاصة بتلاميذ شعبة رياضيات و يمكن لتلاميذ شعبي علوم تجريبية و تقني رياضي الاستفادة منها حسب المطلوب ،،

تحت شعار :

، تجرُبة اليوم ،، عبرة للغد ،،

المذصرة العلمية : عقبة بن نافع

<https://www.facebook.com/okba.bac.2010>



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (03 نقاط)

- أجب بصحيح أو خطأ :

(1)- حجم المجسم المولد بالدوران حول محور الفواصل للتمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[1, e]$ بـ :

$$f(x) = \frac{2(\ln x)^2}{\sqrt{x}} \text{ هو } : V = \frac{4\pi}{5} uv \text{ ؟}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = \frac{1}{2023} \quad (2)$$

$$1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3 + 3^{\frac{3}{2}} + \dots + 3^{\frac{n}{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \left(3^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)}{2} : \mathbb{N} \text{ من أجل كل } n \quad (3)$$

$$(4) - (U_n) \text{ و } (V_n) \text{ متتاليتان عدديتان معرفتان على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } : U_n = \frac{1}{2} - \frac{e}{n} \text{ ، } V_n = Ln \sqrt{\frac{3}{n} + e}$$

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

التمرين الثاني : (05 نقاط)

(I)- (1)- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 2^n ، 3^n على 11 .

(2)- n عدد طبيعي ، α عدد صحيح ، نضع : $A_\alpha = 2023^{2n+1} + \alpha \times 4^{5n+1}$

(أ)- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{1444} \equiv 0 [11]$.

(ب)- عين الأعداد الصحيحة α التي من أجلها A_α يقبل القسمة على 11 من أجل كل عدد طبيعي n .

(ج)- أوجد قيم العدد الطبيعي t بحيث : $1443^t + 1444^t \equiv 0 [11]$.

(II)- نضع في علبة بطاقات مرقمة ببواقي قسمة العدد 2^n على 11 ، نسحب من العلبة 3 بطاقات على التوالي وبدون إرجاع

لنكن الحادثتان التاليتان : A البطاقات المسحوبة تحمل أرقما أولية ، B البطاقات المسحوبة تحمل أرقما فرديا

(1) - أحسب احتمال الحوادث : A ، B ، $A \cap B$. استنتج احتمال الحادثة : $A \cup B$.

(2) - أحسب احتمال سحب بطاقة تحمل رقما أوليا علما أنه فردي .

(3) - ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد البطاقات التي تحمل رقما أوليا المتبقية في اللعبة

- عرف قانون احتمال X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) - $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$

(أ) - تحقق أن 2 هو جذر $P(z)$. (ب) - حل في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $P(z) = 0$.

(2) - في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) ، لتكن النقاط : A ، B و C تحقق لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 2 \quad , \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

(أ) - أكتب كل من z_B ، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي . (ب) - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا .

(ج) - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n} + z_C^{3n} + 2^{3n+1} = 0$

(د) - علم النقاط : A ، B و C ، ماهي طبيعة الرباعي $OBAC$ ؟

(3) - M و M' نقطتان من المستوي ذات اللاحقتان : z و z' على الترتيب حيث : $z' = \frac{z_A \times \bar{z} - z_C}{z - z_C}$

(أ) - لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $(z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 1$ ، عين ثم أنشئ (E) .

(ب) - تحقق أن : $z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C}$

(ج) - بين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (2x^2 - 5x + 4)e^{x-2} + 1$.

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			$7e^{-\frac{5}{2}} + 1$	

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$

(1) - أنقل ثم أكمل جدول تغيرات الدالة g ، استنتج إشارة g(x) على \mathbb{R} . (2) - تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} : g(x) - 1 > 0$

(3) - برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} : g(x) - 1 = 2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2}$

(4) - أحسب : $S = \int_1^2 (g(x) - 1) dx$ ، فسر هذه النتيجة بيانياً .

(II) - لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = \left(\frac{2x-3}{x-1}\right)(e^{x-2} + 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) - (أ) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. فسر هذه النتائج بيانياً . (ب) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) - أثبت أنه من أجل كل x من $D_f : f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، استنتج اتجاه الدالة f على D_f . شكل جدول تغيراتها .

(3) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 = x₀ .

(4) - أحسب : f(0) ، $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، ثم أنشئ (T) و (C_f) .

(III) - لتكن الدالة h المعرفة على $D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$: $h(x) = \left(\frac{2|x|-3}{|x|-1}\right)(e^{|x|-2} + 1)$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(1) - أثبت أن الدالة h دالة زوجية . (2) - اشرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقاً من (C_f) .

(3) - أنشئ (C_h) . (استعمل الألوان للتوضيح)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) - (1) - أوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

$$(2) - \text{أوجد الثنائيات } (a, b) \text{ من } (\mathbb{N}^*)^2 \text{ حيث : } \begin{cases} PGCD(a, b) = 17 \\ PPCM(a, b) = 2023 \end{cases}$$

(II) - لتكن في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) : $289x - 34y = 2023 \dots$

(1) - أوجد $PGCD(289, 34)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 .

(2) - بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلاً للمعادلة (E) فإن y مضاعف للعدد 17 . ثم استنتج في \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة (E) .

(3) - أوجد الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y \leq 52$

(III) - n عدد طبيعي فردي ، باقي قسمته على 17 هو 16 ، فما هو باقي قسمته على 34 ؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) - في ألعاب البحر المتوسط التي إحتضنها ولاية وهران (بالجزائر) في جوان 2022 ، تحصلت الجزائر في رياضة الملاكمة على :

7 ميداليات ذهبية ، 4 ميداليات فضية و ميدالية واحدة برونزية . وضعت هذه الميداليات في صندوق

- نسحب من الصندوق ميداليتين في آن واحد . نعتبر اللعبة التالية : يربح لاعب 20DA عند سحب ميدالية ذهبية ، يربح 10DA عند سحب ميدالية فضية و يخسر 10DA عند سحب ميدالية فضية

- ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب ، عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي

(2) - بعد نجاح رياضة الملاكمة في الجزائر ترشح للمشاركة في ألعاب البحر المتوسط التي ستقام بفرنسا : 20 ملاكمة (إناث) من بينهم الملاكمة : إيمان خليف و 18 ملاكم (ذكور) من بينهم الملاكم : بن قاسمية محمد .

تم اختيار مجموعة مكونة من ثلاث ملاكمين للمشاركة في هذه الظاهرة الرياضية

- احسب احتمال الحوادث التالية : A : المجموعة تضم ثلاث ذكور . B : المجموعة تضم ذكر وأنثيين .

C : المجموعة تضم إيمان أو محمد .

D : المجموعة تضم ثلاث إناث ولاتضم الملاكمة إيمان بعد ما تم إقصائها نهائياً من المنافسة .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$(I) \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} \end{cases} \text{ لتكن المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ :}$$

$$(1) \text{ أ- تحقق أنه من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : U_{n+1} = 9 - \frac{70}{U_n + 8}$$

ب- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 2$.

ج- أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} . ه- استنتج مما سبق أن المتتالية (U_n) متقاربة.

$$(2) \text{ أ- أثبت أنه من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : 2 - U_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - U_n)$$

ب- استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq 2 - U_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{7}{8}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$(II) \text{ لتكن المتتالية } (V_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ : } V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$$

(1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 .

(2) أكتب بدلالة عبارة n الحد العام V_n ثم U_n . (3) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ، ثم استنتج للمرة الثانية حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = U_0(V_0 - 1) + 10U_1(V_1 - 1) + 10^2U_2(V_2 - 1) + \dots + 10^nU_n(V_n - 1)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) a و b عدنان حقيقيان موجبان تماما ، باستعمال المساواة : $Ln(a \times b) = Ln(a) + Ln(b)$ أثبت أن :

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} Ln(a)$$

(II) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $D_g =]1, +\infty[$ بـ : $g(x) = Ln \sqrt{\frac{x-1}{2e}} + \frac{1}{2}$

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

(2) - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على D_g .

(3) - أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على D_g .

$$(III) - \text{ لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } D_f = [1, +\infty[: \begin{cases} (x-1) \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{x-1}{2e}} ; x > 1 \\ 0 ; x = 1 \end{cases} . f(x) =$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}$. ماذا تستنتج ؟ فسر هذه النتيجة بيانيا . (2) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) - أثبت أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

(4) - (أ) أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند نقطة A فاصلتها α حيث : $\alpha > 1$ يطلب تعيينها .

(ب) - أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A . (ج) - أنشئ (T) و (C_f) .

(5) - لتكن الدالة h المعرفة على المجال $D_h = [1, +\infty[$: $h(x) = -f(x)$.

- اشرح كيفية إنشاء (C_h) التمثيل البياني للدالة h إنطلاقاً من (C_f) . ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم السابق .

$$(6) - (أ) - تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $\frac{x^2 - 2x}{x-1} = x - 1 - \frac{1}{x-1}$ ، ثم أحسب : $\int_2^a \frac{x^2 - 2x}{x-1} dx$.$$

(ب) - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = \alpha$ ، $x = 2$.

(استعمل التكامل بالتجزئة)

(ج) - استنتج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و (C_h) و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = \alpha$ ، $x = 2$.

الأستاذة : بن زادي

بالتوفيق و النجاح في شهادة بكالوريا 2023

الإجابة النموذجية + سلم التقييم :

الموضوع الأول :

التمرين الأول (03 نقاط) :

$$V = \frac{4\pi}{5} uv \quad \text{هو} \quad V = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx \quad uv = \pi \int_1^e \frac{4(Lnx)^4}{x} dx \quad uv \quad (1)$$

(0.5ن) الإجابة صحيحة $V = 4\pi \left[\frac{(Lnx)^5}{5} \right]_1^e uv = \frac{4\pi}{5} uv$

(2) - من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x لدينا : $\left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = e^{xLn\left(1 + \frac{2023}{x}\right)}$

نضع : $t = \frac{1}{x}$ ، $x \rightarrow +\infty$ ، $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{Ln(1+2023t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{2023 \times \frac{Ln(1+2023t)}{2023t}}$$

(01ن) الإجابة خاطئة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = e^{2023}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ln(1+X)}{X} = 1$: بما أن :

(3) - نضع من أجل كل n من \mathbb{N} : $U_n = (\sqrt{3})^n$. متتالية هندسية أساها $q = \sqrt{3}$ و حدها الأول $U_0 = 1$.

$$S_n = U_0 + U_1 + U_1 + \dots + U_n = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \left[1 - (\sqrt{3})^{n+1} \right]$$

(0.5ن) الإجابة صحيحة $S_n = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 3} \right) \left[1 - 3^{\frac{n+1}{2}} \right] = \frac{(1 + \sqrt{3}) \left(3^{\frac{n+1}{2}} - 1 \right)}{2}$

(4) - من أجل كل n من \mathbb{N}^* : $U_{n+1} - U_n = \frac{e}{n(n+1)} > 0$ و (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}^* .

$$\sqrt{\frac{3}{n+1}} + e < \sqrt{\frac{3}{n}} + e , \quad \frac{3}{n+1} + e < \frac{3}{n} + e , \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} , \quad n+1 > n : \mathbb{N}^* \text{ من أجل كل } n$$

. \mathbb{N}^* متناقصة تماما على (V_n) ، أي أن $V_{n+1} < V_n$: منه و $Ln\sqrt{\frac{3}{n+1} + e} < Ln\sqrt{\frac{3}{n} + e}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 : \text{منه} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} Ln\sqrt{\frac{3}{n} + e} = Ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} Ln\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{n}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و منه : المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان **الإجابة صحيحة** (01ن)

التعريف الثاني: (05 نقاط)

، $2^5 \equiv 10[11]$ ، $2^4 \equiv 5[11]$ ، $2^3 \equiv 8[11]$ ، $2^2 \equiv 4[11]$ ، $2^1 \equiv 2[11]$ ، $2^0 \equiv 1[11]$ - (1- I
(0.5ن) $2^{10} \equiv 1[11]$ ، $2^9 \equiv 6[11]$ ، $2^8 \equiv 3[11]$ ، $2^7 \equiv 7[11]$ ، $2^6 \equiv 9[11]$

بواقفي قسمة 2^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p = 10$.

$n =$	$10k$	$10k + 1$	$10k + 2$	$10k + 3$	$10k + 4$	$10k + 5$	$10k + 6$	$10k + 7$	$10k + 8$	$10k + 9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$

(0.5ن) $3^5 \equiv 1[11]$ ، $3^4 \equiv 4[11]$ ، $3^3 \equiv 5[11]$ ، $3^2 \equiv 9[11]$ ، $3^1 \equiv 3[11]$ ، $3^0 \equiv 1[11]$

بواقفي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p = 5$.

$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	$[11]$

(2- أ-) لدينا : $2023 \equiv 10[11]$ أي أن : $2023 \equiv -1[11]$ و منه : $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ (لأن $2n + 1$ فردي)

: $4^{5n+1} = 2^{10n+2}$ و منه : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $1444 \equiv 3[11]$ و منه : $A_{1444} \equiv (-1 + 3 \times 4)[11]$ أي أن :

(0.5ن) **$A_{1444} \equiv 0[11]$**

(ب-) لدينا : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ ، A_α يقبل القسمة على 11 معناه : $A_\alpha \equiv 0[11]$.

: $A_\alpha \equiv (-1 + 4\alpha)[11]$ ، $-1 + 4\alpha \equiv 0[11]$ ، $4\alpha \equiv 1[11]$ ، $12\alpha \equiv 3[11]$ ، $\alpha \equiv 3[11]$. و منه :

(0.5ن) **A_α يقبل القسمة على 11 معناه : $\alpha = 11k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$)**

$n =$	$10k$	$10k + 1$	$10k + 2$	$10k + 3$	$10k + 4$	$10k + 5$ $5k'$	$10k + 6$ $5k' + 1$	$10k + 7$ $5k' + 2$	$10k + 8$	$10k + 9$	$k \in \mathbb{N}$ $k' \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	[11]
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	[11]
$2^n + 3^n \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	[11]

(ن.0.5) $n = 11k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$

طريقة ثانية :

لدينا : $3 \equiv -8 [11]$ ، $3^{3t} \equiv (-2)^{3t} [11]$ و منه : $1444^t + 1443^t \equiv 0 [11]$ يكافئ : $2^t + (-2)^{3t} \equiv 0 [11]$

$n =$	$10k$	$10k + 1$	$10k + 2$	$10k + 3$	$10k + 4$	$10k + 5$	$10k + 6$	$10k + 7$	$10k + 8$	$10k + 9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	[11]
$(-2)^{3t} \equiv$	1	-8	9	-6	4	-10	3	-2	5	-7	[11]
$2^t + (-2)^{3t} \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	[11]

$n = 11k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$

$A_{10}^3 = 720$ عدد الحالات الممكنة للسحب $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(ن.0.25) $P(A) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$ - البطاقات التي تحمل أرقاماً أولية هي : 2, 3, 5, 7 و منه :

(ن.0.25) $P(B) = \frac{A_5^3}{A_{10}^3} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$ - البطاقات التي تحمل أرقاماً فردية هي : 1, 3, 5, 7, 9 و منه :

(ن.0.25) $P(A \cap B) = \frac{A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$ - البطاقات التي تحمل أرقاماً فردية وأولية هي : 3, 5, 7 و منه :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120}$$

(ن.0.25) $P(A \cup B) = \frac{13}{120}$ و منه :

(ن.0.25) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{10}$

(3) - قيم المتغير العشوائي : $x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (0.25ن)

(0.25ن) (0.25ن)..... $P(X = 2) = \frac{A_4^2 \times A_6^1 \times 3!}{A_{10}^3 \times 2! \times 1!} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$ ، $P(X = 1) = \frac{A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$

(0.25ن) (0.25ن)..... $P(X = 4) = \frac{A_6^3}{A_{10}^3} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$ ، $P(X = 3) = \frac{A_4^1 \times A_6^2 \times 3!}{A_{10}^3 \times 2! \times 1!} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(0.25ن) $E(X) = \frac{1}{30} + \frac{6}{10} + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} \approx 2.8$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(0.25ن) (1) - (أ) $P(2) = 8 - 16 + 16 - 8 = 0$

(0.5ن) (ب) - من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 4)$

$P(z) = 0$ من يكافئ : $z = 2$ أو $z^2 - 2z + 4 = 0$ ($\Delta = -12$)

(0.5ن) $S = \{2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$

(0.5ن) (2) - (أ) $\frac{z_B}{z_C} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ، $z_C = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}$ ، $z_B = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

(ب) - $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n \cdot \left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n = e^{\frac{i2n\pi}{3}}$ حقيقي يكافئ : $\frac{2\pi n}{3} = k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) و منه :

$\frac{3}{n}$: $PGCD(2, 3) = 1$ و $\frac{3}{2n}$ لدينا ، $2n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) ومنه : حسب مبرهنة غوص :

(0.5ن) $n = 3k'$ ($k' \in \mathbb{N}$)

(ج) - n من فردي معناه : $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$(z_B)^{3n} = 2^{3n} (e^{i(2k+1)\pi}) = 2^{3n} e^{i\pi} = -2^{3n}$

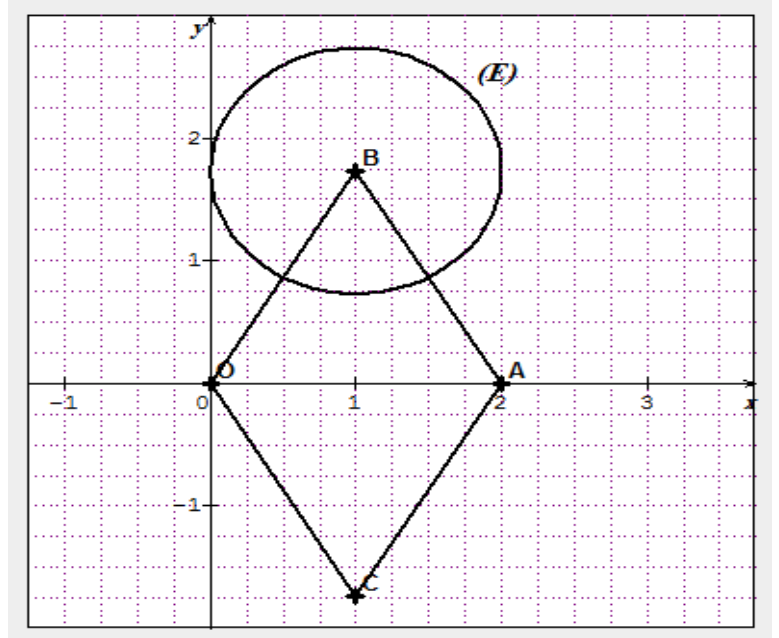
(0.5ن) $(z_C)^{3n} = 2^{3n} (e^{-i(2k+1)\pi}) = 2^{3n} e^{-i\pi} = -2^{3n}$

$(z_B)^{3n} + (z_C)^{3n} + 2^{3n+1} = -2^{3n} - 2^{3n} + 2^{3n+1} = -2^{3n+1} + 2^{3n+1} = 0$

د- لدينا : $\overline{OB} = \overline{CA}$ و $(z_B = z_A - z_C)$ و $OB = OC = 2$ (متوازي أضلاع له ضلعان متتابعان متقايسان)

ومنه : الرباعي $OBAC$ معين (0.5ن)

- تعليم النقاط : (0.5ن)



$$(2-1) \quad (z - z_B)(z - z_C) = (z - z_B)\overline{(z - z_C)} = 1 \quad \text{ومنه : } BM = 1$$

$$\text{(نذكر أن : } |z \cdot \bar{z}| = |z|^2 \text{)}$$

ومنه : (E) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $r = 1$ (0.5ن)

$$(ب-) \quad z' = z_A + \frac{z_C}{z - z_C} = \frac{z_A \cdot \bar{z} - z_A \cdot z_C + z_C}{z - z_C} = \frac{z_A \cdot \bar{z} - 2 \cdot z_C + z_C}{z - z_C} = \frac{z_A \cdot \bar{z} - z_C}{z - z_C}$$

$$(ج-) \quad AM' = \frac{OC}{BM} \quad \text{ومنه } |z' - z_A| = \left| \frac{z_C}{z - z_C} \right| = \left| \frac{z_C}{z - z_B} \right| = \left| \frac{z_C}{z - z_B} \right|$$

وبما أن : $M \in (E)$ فإن : $BM = 1$ ومنه : $AM' = 2$ ومنه : مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A

و نصف قطرها $r = 2$ (0.5ن)

التمرين الرابع : (07 نقاط)

$$(0.75ن) \quad \dots \cdot g(1) = e^{-1} + 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	1	$7e^{-\frac{5}{2}} + 1$	$e^{-1} + 1$	$+\infty$

(ن0.25) من أجل كل x من \mathbb{R} : $g(x) > 0$.

(ن0.25) $g(x) - 1 > 0$: ومنه $(\Delta = -7 < 0) 2x^2 - 5x + 4 > 0$, $e^{x-2} > 0$: \mathbb{R} من أجل كل x من \mathbb{R}

$$g''(x) = (2x^2 + 3x - 2)e^{x-2}, \quad 2g'(x) = (4x^2 - 2x - 2)e^{x-2}: \mathbb{R} \text{ قابلة للإشتقاق مرتين على}$$

$$2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2} = (4x^2 - 2x - 2 - 2x^2 - 3x + 2 + 4)e^{x-2}$$

(ن0.5) $2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2} = (2x^2 - 5x + 4)e^{x-2} = g(x) - 1$

$$S = \int_1^2 (g(x) - 1) dx = \left[2g(x) - g'(x) + 4e^{x-2} \right]_1^2 = \left[(2x^2 - 9x + 13)e^{x-2} \right]_1^2$$

(ن0.25) $S = \int_1^2 (g(x) - 1) dx = 3 - 6e^{-1}$

$S = (3 - 6e^{-1}) cm^2$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

(ن0.25) $x = 2, x = 1, y = 1$

(ن0.25) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)(e^{x-2} + 1) = -e^{-1} - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^{-1} \end{cases} \quad -(-1)$

(ن0.25) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)(e^{x-2} + 1) = -e^{-1} - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^{+1} \end{cases}$

(ن0.25) (C_f) يقبل مستقيما مقاريا عموديا معادلته: $x = 1$

(ن0.25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3}{x - 1} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-2} + 1) = 1 \end{cases}$

(ن0.25) (C_f) يقبل مستقيما مقاريا عموديا معادلته: $y = 2$ بجوار $-\infty$

(ن0.25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: ومنه $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{x-1} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-2} + 1) = +\infty \end{cases}$


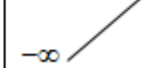
(2) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} (e^{x-2} + 1) + \left(\frac{2x-3}{x-1} \right) e^{x-2}$

$f'(x) = \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x-3}{x-1} \right] e^{x-2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

(ن0.5) $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

(ن0.25) ومنه: متزايدة تماما على $\mathbb{R} - \{1\}$. $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} > 0$

(ن0.5) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$+\infty$ 		$+\infty$ 

(ن0.25) (3) $(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3x - 4$

(ن0.25) (ن0.25) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ ، $f(0) = 3(e^{-2} + 1) \approx 3.40$

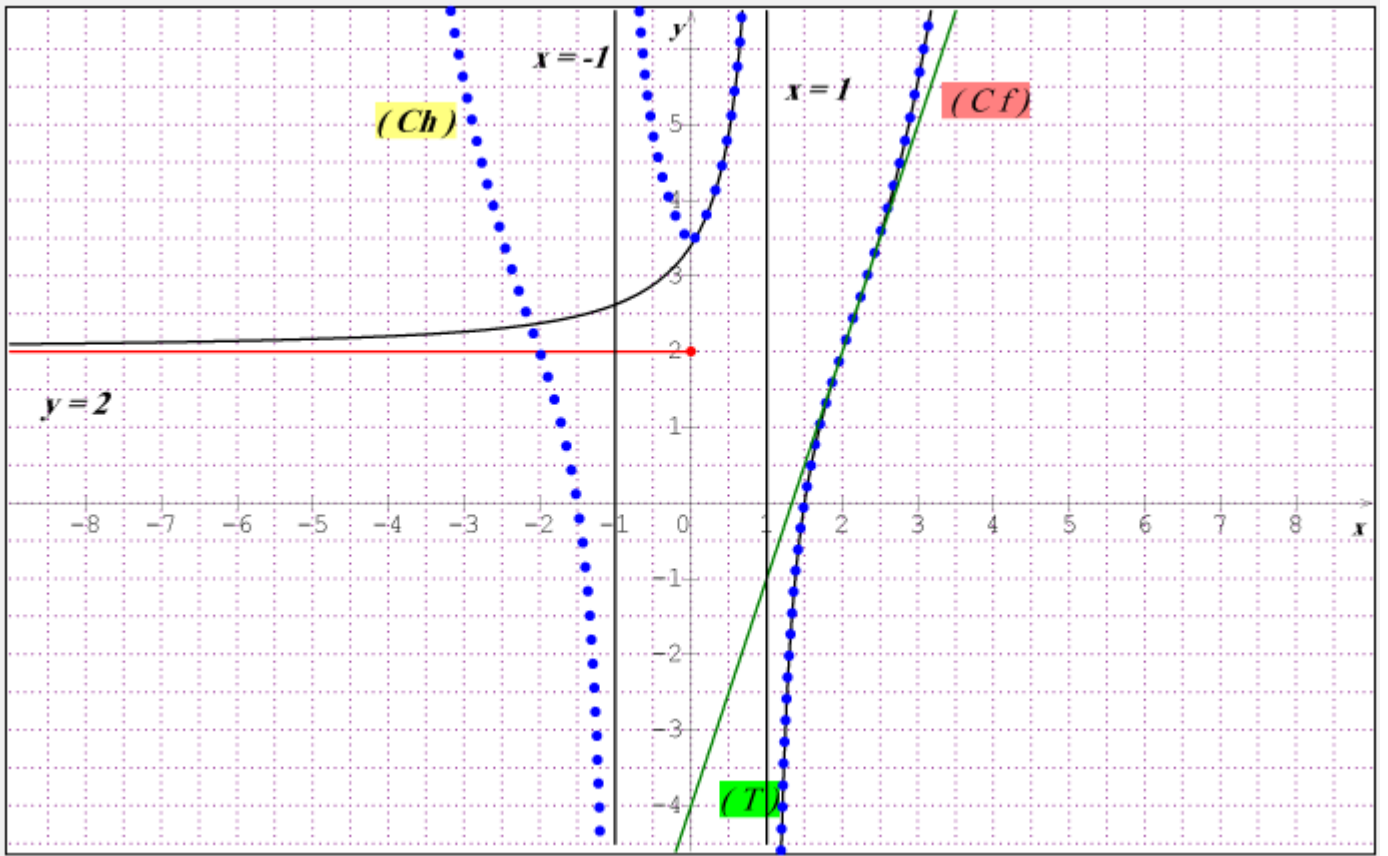
(ن0.25) (III) $-1 < x < 1$ من أجل كل x من D_h : $h(-x) = h(x)$ (لأن $|-x| = |x|$) ومنه : الدالة h دالة زوجية.

(2) $-$ على المجال $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$: $h(x) = f(x)$ ومنه (C_h) يطابق (C_f) .

(ن0.25) على المجال $[-1, 0] \cup [-\infty, -1[$ بما ان الدالة h دالة زوجية فإن يقبل محور الترتيب كمحور تناظر :

نرسم نظير الجزء السابق بالنسبة لـ (yy')

(ن0.75) (3) $-$ إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) :



الموضوع الثاني :

التمرين الأول (04 نقاط) :

(0.25ن) $D_{119} = \{1, 7, 17, 119\}$ ، $119 = 7 \times 17$ $-(1 - I)$

(2- نضع : $a = 17a'$ ، $b = 17b'$ حيث $PGCD(a', b') = 1$

لدينا : $m = \frac{a \times b}{d}$ حيث : $d = PGCD(a, b)$ ، $m = PPCM(a, b)$ ومنه :

$$\begin{cases} a'b' = 119 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 17a'b' = 2023 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$$

a'	1	119	7	17
b'	119	1	17	7

(1.25ن) $S = \{(17, 2023); (2023, 17); (119, 289); (289, 119)\}$

(0.25ن) $PGCD(289, 34) = 17$: ومنه ، $119 = 7 \times 17$ ، $34 = 2 \times 17$ $-(1 - II)$

ومنه : المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 (ن0.25)

2- المعادلة (E) تكافئ : $17x - 2y = 119$ (E) . $17x - 2y = 119$ معناه $2y = 17x - 199$

$2y = 17(x - 7)$ لكن 2 و 17 أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة غوص :

..... (ن0.5) $17/y$ أي أن : y مضاعف 17

$y = 17k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ، نعوض y بما يساويه في المعادلة (E) نجد : $y = 17k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

..... (ن0.5) $S = \{(2k + 7, 17k); (k \in \mathbb{Z})\}$

..... (ن0.5) $x^2 - y \leq 52$ يكافئ : $4k^2 + 28k + 49 - 17k \leq 52$ ، $4k^2 + 11k - 3 \leq 0$.

$k \in \{-3, -2, -1, 0\}$: ومنه $k_2 = \frac{1}{4}$ ، $k_1 = -3$ ، $\Delta = 169$

..... (ن0.5) $S' = \{(1, -51); (3, -34); (5, -17); (7, 0)\}$

III - n عدد طبيعي فردي معناه : $n \equiv 1 [2]$ ، باقي قسمته على 17 هو 16 معناه : $n \equiv 16 [17]$

..... (ن0.5) $\begin{cases} 17n \equiv 17 [34] \\ 2n \equiv 32 [34] \end{cases}$ ، $15n \equiv -15 [34]$ ، $n \equiv -1 [34]$ ، $n \equiv 33 [34]$ و منه :

..... (ن0.5) باقي قسمة n على 34 هو 33

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1- عدد الحالات الممكنة للسحب : $C_{12}^2 = 66$

2ذهبية ← 40 ، 1 ذهبية + 1 فضية ← 30 ، 1 ذهبية + 1 برونزية ← 10 ، 2 فضية ← 20 ، 1 فضية + 1 برونزية ← 0 .

..... (ن0.5) $x_i \in \{, 10, 20, 30, 40\}$

..... (ن0.25)(ن0.25) $P(X = 10) = \frac{C_1^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{66}$ ، $P(X = 0) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{66} = \frac{2}{33}$

..... (ن0.25)(ن0.25) $P(X = 30) = \frac{C_4^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$ ، $P(X = 20) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

..... (ن0.25) $P(X = 40) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$

x_i	0	10	20	30	40
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{7}{22}$

(0.25ن) $E(X) = \frac{85}{3}$ ، $E(X) = 0 \times \frac{2}{33} + 10 \times \frac{7}{66} + 20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{14}{33} + 40 \times \frac{7}{22}$

(2) - عدد الحالات الممكنة : $C_{38}^3 = 8436$.

(0.5ن) $P(A) = \frac{C_{18}^3}{C_{38}^3} = \frac{816}{8436} = \frac{68}{703}$

(0.5ن) $P(B) = \frac{C_{18}^1 \times C_{20}^2}{C_{38}^3} = \frac{3420}{8436} = \frac{15}{37}$

(0.5ن) $P(C) = \frac{C_2^1 \times C_{36}^2 + C_2^2 \times C_{36}^1}{C_{38}^3} = \frac{1296}{8436} = \frac{108}{703}$

(0.5ن) $P(D) = \frac{C_{19}^3}{C_{37}^3} = \frac{969}{8436} = \frac{17}{148}$

التعريف الثالث: (05 نقاط) :

(0.25ن) $U_{n+1} = \frac{9U_n + 72 - 70}{U_n + 8} = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8}$: \mathbb{N} من أجل كل n من \mathbb{N} - (1) - (أ) من أجل كل n من \mathbb{N}

(ب) - $0 \leq U_n \leq 2 \dots P(n)$

من أجل $n = 0$: $0 \leq \frac{1}{2} \leq 2$ و منه : $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ معناه $0 \leq U_n \leq 2$ ، نبهن على صحة $P(n+1)$ معناه : $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

$$\frac{-70}{8} \leq \frac{-70}{U_n + 8} \leq \frac{-70}{10} \quad , \quad \frac{1}{10} \leq \frac{1}{U_n + 8} \leq \frac{1}{8} \quad , \quad 8 \leq U_n + 8 \leq 10 \quad , \quad 0 \leq U_n \leq 2$$

$$. \text{ محققة } P(n+1) : \text{ ومنه } 0 \leq \frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq 2$$

(0.5ن) ومنه : من أجل كل n من \mathbb{N} : $0 \leq U_n \leq 2$ حسب مبدأ البرهان بالتراجع .

(ج) - من أجل كل n من \mathbb{N} : $U_{n+1} - U_n = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} - U_n = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{U_n + 8} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + 8}$

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 2$ ومنه: $U_n + 8 > 0$, $U_n + 1 > 0$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$ أي أن:

(0.5ن) (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}

(0.25ن) (هـ) - (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} ومحدودة من الأعلى بـ 2 فهي متقاربة

$$2 - U_{n+1} = 2 - \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} = \frac{2U_n + 16 - 9U_n - 2}{U_n + 8} = \frac{7(2 - U_n)}{U_n + 8} : \mathbb{N} \text{ من أجل كل } n$$

(0.5ن) $2 - U_{n+1} \leq \frac{7}{8}(2 - U_n)$: ومنه $\frac{7}{U_n + 8} \leq \frac{7}{8}$, $\frac{1}{U_n + 8} \leq \frac{1}{8}$, $U_n + 8 \geq 8$, $U_n \geq 0$

(بـ)

$$\cancel{2 - U_1} \leq \frac{7}{8}(2 - U_0)$$

$$2 - U_2 \leq \frac{7}{8}(\cancel{2 - U_1})$$

⋮

⋮

$$\cancel{2 - U_n} \leq \frac{7}{8}(2 - U_{n-1})$$

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n (2 - U_0)$$

(0.5ن) ومنه : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 2 - U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

(0.25ن) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$: ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{9U_n + 2}{U_n + 8} - 2}{\frac{9U_n + 2}{U_n + 8} + 1} = \frac{9U_n + 2 - 2U_n - 16}{9U_n + 2 + U_n + 8} = \frac{7(U_n + 2)}{10(U_n + 2)} : \mathbb{N} \text{ من أجل كل } n$$

(0.5ن) $V_0 = \frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{1}{2} + 1} = -1$: وحدها الأول $q = \frac{7}{10}$ متتالية هندسية أساسها (V_n) ومنه $V_{n+1} = \frac{7}{10}V_n$

(2) من أجل كل n من \mathbb{N} : $V_n = V_0 \times q^n = -\left(\frac{7}{10}\right)^n$ (0.25ن)

$$U_n (V_n - 1) = -V_n - 2, V_n \times U_n - U_n = -V_n - 2, V_n (U_n + 1) = U_n - 2, V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$$

(0.5ن) $U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n} = \frac{-\left(\frac{7}{10}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{7}{10}\right)^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$ (0.25ن)(0.25ن)

(4) لدينا : $U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n}$ ، $U_n (1 - V_n) = V_n + 2$ ، $U_n (V_n - 1) = -V_n - 2 = \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2$ ، $10^n U_n (V_n - 1) = 7^n - 2 \times 10^n$

ومنه : $S_n = \frac{1}{1-7} (1 - 7^{n+1}) - \frac{2}{1-10} (1 - 10^{n+1})$ ، $10^n U_n (V_n - 1) = 7^n - 2 \times 10^n$

(0.5ن) $S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{6} - \frac{2(10^{n+1} - 1)}{9}$

التعريف الرابع (07 نقاط)

$$2Ln(\sqrt{a}) = Lna : \text{ومنه} \begin{cases} Ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = Ln(\sqrt{a}) + Ln(\sqrt{a}) = 2Ln(\sqrt{a}) \\ Ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = Lna \end{cases} \quad -(I)$$

أي أن : $Ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} Lna$ (0.25ن)

(II) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ (0.25ن)(0.25ن)

(2) g قابلة للإشتقاق على D_g : $g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2e}}{\frac{x-1}{2e}} \right) = \frac{1}{2(x-1)} > 0$ (0.25ن)

ومنه : الدالة متزايدة ماما على D_g (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة g : (0.25ن)

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

(0.25ن) $g(3) = \text{Ln} \sqrt{\frac{2}{2e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ - (3)

إشارة $g(x)$: (0.25ن)

x	0	3	$+\infty$
$g(x)$: إشارة	-	○	+

(0.25ن) (0.25ن) ومنه: f غير قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين.. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Ln} \sqrt{\frac{x-1}{2e}} = -\infty$ - (1-III)

(0.25ن) (C_f) - يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $W(1,0)$

(0.25ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ - (2)

(0.25ن) $f'(x) = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{x-1}{2e} \right) + \frac{1}{x-1} \times \frac{x-1}{2} = g(x)$:]1, +∞[قابلة للإشتقاق على المجال - (3)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال :]1, +∞[

(0.25ن)]3, +∞[: f متزايدة تماما على المجال ،]-∞, 3[: f متناقصة تماما على المجال

جدول تغيرات الدالة f : (0.5ن)

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

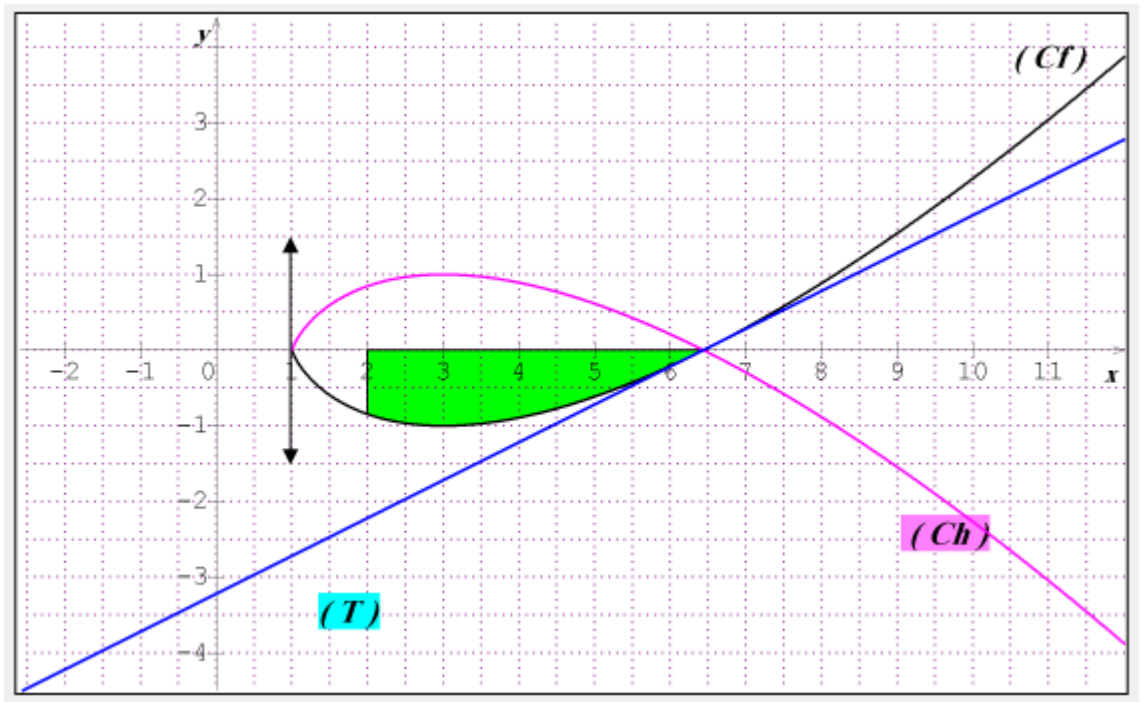
$$\text{Ln}\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = 0 \text{ أو } x-1=0 \text{ : معناه } (x-1)\text{Ln}\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = 0 \text{ - (4)}$$

$$\cdot x = 1 + 2e, \frac{x-1}{2e} = 1, \frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{x-1}{2e}\right) = 0, \text{Ln}\sqrt{\frac{x-1}{2e}} = 0 \text{ أو } x = 1$$

(0.25ن) بما أن $\alpha > 1$ فإن $\alpha = 1 + 2e$

$$(0.25ن) (T) : y = f'(1+2e)(x-1-2e) + f(1+2e) = \frac{1}{2}x - e - \frac{1}{2} \text{ - (5)}$$

(0.75ن) - إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) :



(0.25ن) (5) - (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لـ (xx') على المجال $[1, +\infty[$.

$$(0.25ن) (6) - \left(x - 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1) - 1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x}{x-1} \right)$$

$$\int_2^\alpha \frac{x^2 - 2x}{x-1} dx = \int_2^\alpha \left[x - 1 - \frac{1}{x-1} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - x - \text{Ln}(x-1) \right]_2^\alpha$$

$$(0.25ن) \int_2^\alpha \frac{x^2 - 2x}{x-1} dx = 2e^2 - \frac{3}{2} - \text{Ln}2$$

$$U'(x) = \frac{x-1}{2} \quad U(x) = \frac{x^2-2x}{4}$$

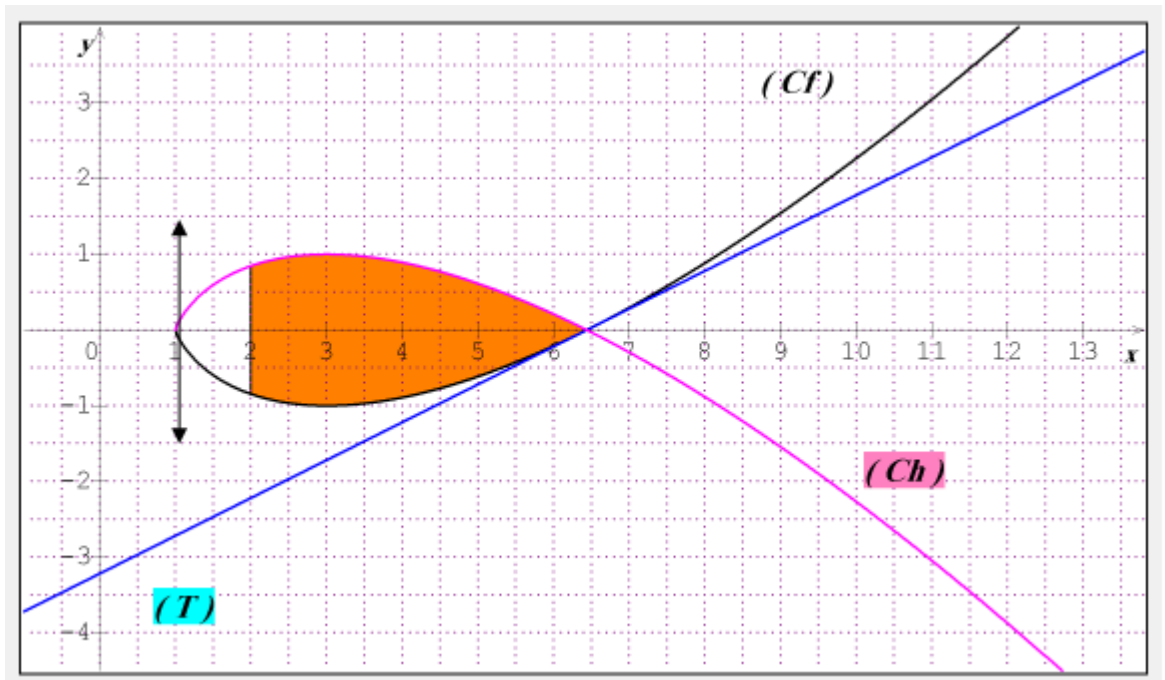
$$V(x) = \text{Ln}\left(\frac{x-1}{2e}\right) \quad V'(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{---}(\rightarrow)$$

$$\int_2^a f(x) dx = \left[\left(\frac{x^2-2x}{4} \right) \text{Ln}\left(\frac{x-1}{2e}\right) \right]_2^a - \frac{1}{4} \int_2^a \frac{x^2-2x}{x-1} dx$$

$$S = -\int_2^a f(x) dx = \frac{1}{4} \left(2e^2 - \frac{3}{2} - \text{Ln}2 \right) \quad \int_2^a f(x) dx = -\frac{1}{4} \left(2e^2 - \frac{3}{2} - \text{Ln}2 \right)$$

(ن0.75) $S \approx 3.146 \text{cm}^2$

(ن0.25) $S' = \int_2^a g(x) - f(x) dx = -2 \int_2^a f(x) dx \approx 6.292 \text{cm}^2$ ---(\rightarrow)





على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

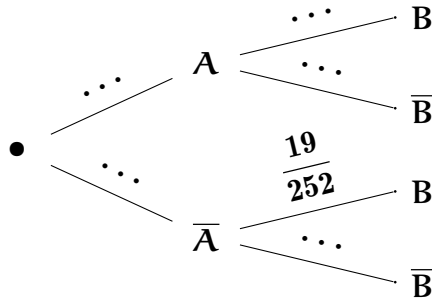
التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على 3 كريات حمراء وكريتين بيضاوين، ويحتوي كيس U_2 على كرتين حمراوين و 5 كريات بيضاء. لا نميز بين الكريات عند اللمس.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس U_1 ونضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الكيس U_2 . ونعتبر الحدثين: **A**: «سحب كرتين حمراوين من الكيس U_1 ».

B: «سحب كرتين حمراوين من الكيس U_2 ».

وليكن \bar{A} و \bar{B} الحدثين العكسيين للحدثين A و B .



1/ أ/ أحسب الإحتمال $P(A)$ ثم $P_A(B)$ ، واستنتج $P_A(\bar{B})$.

ب/ بين أن $P(\bar{A} \cap B) = \frac{19}{360}$ ، ثم استنتج أن $P_{\bar{A}}(B) = \frac{19}{252}$.

2/ أ/ أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة التي تتمم هذا السحب.

ب/ بين أن $P(B) = \frac{37}{360}$ ثم أحسب $P(A \cup B)$.

3/ علما أن الكرتين المسحوبتين من U_2 حمراوين، ما إحتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من U_1 غير حمراوين؟

4/ نقترح اللعبة التالية: عند القيام بالتجربة العشوائية يربح اللاعب 1 دج إذا تحقق الحدث A ويخسر 2 دج إذا لم يتحقق الحدث A ، ويخسر 2 دج إذا تحقق الحدث B ويربح 1 دج إذا لم يتحقق الحدث B .

ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن قيمة الربح أو الخسارة الإجمالية.

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله. ب/ أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $u_n = 2^n$ ، وليكن المجموع المعروف بـ: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

1/ أكتب S_n بدلالة u_n ، ثم استنتج أن S_n و u_n أوليان فيما بينهما.

2/ أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 7.

ب/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد: $2 \times 6^{2022} - 2^{1954} - (u_{2024} + u_{1962} - S_{1444})$ على 7.

ج/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_{2n} مضاعفاً لـ 7.

3/ نعتبر المعادلة (E) $4x - 7y = 3$ ذات المجهولين الصحيحين x و y .

أ/ بين أن الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل للمعادلة (E)، ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E).



ب/ بين أنه إذا كان $d = \text{PGCD}(x; y)$ فإن $d = 1$ أو $d = 3$.

4/ ليكن N العدد الطبيعي الذي يُكتب $1\alpha\alpha 21\alpha^4$ في النظام ذي الأساس 4 ، بحيث α عدد طبيعي .
• جد قيمة العدد الطبيعي α حتى يكون 7 قاسما للعدد N ، ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

I/ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول Z التالية: (E) $\bar{Z}^3 - 3\bar{Z}^2 + 3\bar{Z} + 7 = 0$. . .

1/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(\bar{Z} + 1)(\bar{Z}^2 + a\bar{Z} + b) = 0$.

2/ حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .

II/ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C, D ، لواحقتها

على الترتيب: $Z_A = -1$ ، $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = \bar{Z}_B$ و $Z_D = 3$.

1/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(Z_B - Z_A)^n$ حقيقيا سالبا .

2/ عين طبيعة المثلث ABC .

3/ أ/ أكتب العدد $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن صورة D بتحويل نقطي يُطلب تعيينه .

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ADC .

4/ أ/ نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة Z حيث: $Z + 1 = 2k\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ مع k يمسح المجال $[0; +\infty[$. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

ب/ عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة Z حيث:

$$\arg(Z^2 - 1 - 4i\sqrt{3}) = \arg(Z - 2 - i\sqrt{3}) + k\pi \quad \text{مع } k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I/ لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$.

1/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

2/ استنتج أنه: إذا كان: $0 < x < 1$ فإن: $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، وأنه إذا كان: $x > 1$ فإن: $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

II/ لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$ وليكن

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

و نعتبر h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق (موضح في الملحق الصفحة 7) .

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا .

2/ أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم أحسب $f'(1)$.

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .



3/ ا/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:
 $0.5 < \alpha < 0.6$ و $1.5 < \beta < 1.6$.

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

ج/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1، يُطلب تعيين معادلته.

4/ ا/ أنشئ (C_f) و (T) . (الإنشاء يكون على الملحق الصفحة 7 ويُعاد مع ورقة الإجابة).

ب/ أوجد قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m بحيث تقبل المعادلة: $f(x) = f(m)$ حلين متميزين.

5/ ا/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x (t^2 - 2t + 2) e^t dt = (x^2 - 4x + 6) e^x - 3e$.

ب/ ليكن λ عددا حقيقيا من المجال $]0; 1]$. ولتكن $A(\lambda)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f)

و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \lambda$ و $x = 1$.

• إستنتج $A(\lambda)$ ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول.



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1/ نعتبر المعادلة (E) ... $2022x - 1443y = 9$ ذات المجهولين الصحيحين x و y .

ا/ جد القاسم المشترك الأكبر للعديدين 2022 و 1443، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .
ب/ حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) علما أن الثنائية (5; 7) حل لها.

ج/ استنتج قيم الأعداد الصحيحة λ التي تحقق الجملة:
$$\begin{cases} \lambda \equiv 1 [674] \\ \lambda \equiv 4 [481] \end{cases}$$

2/ ا/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $A = 1441^{2020} + 1442^{2021} + 1443^{2022}$ على 9.

3/ α و β عدنان طبيعيان يُكتبان في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل: $\alpha = \overline{31042}^5$ و $\beta = \overline{21233}^5$.

ا/ أكتب العديدين α و β في النظام العشري.

ب/ x و y عدنان طبيعيان. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:
$$\begin{cases} \alpha x - \beta y = 9 \\ 7^{x+y} + 2n^2 \equiv 0 [9] \end{cases}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقين غير شفافين بحيث: يحتوي الصندوق U_1 على 6 كريات تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2، 2، 3، ويحتوي الصندوق U_2 على 4 كريات تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2. كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس. نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 10 بطاقات متماثلة مرقمة من 1 إلى 10، فإذا حصلنا على عدد أولي نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع من الصندوق U_1 ، وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بالإرجاع من U_2 .

1/ نعتبر الأحداث التالية: A: «سحب كرتين تحملان رقمين فرديين».

B: «سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين».

C: «سحب كرتين إحداهما تحمل رقما فرديا والأخرى تحمل رقما زوجيا».

ا/ أحسب: $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الأحداث: A، B و C على الترتيب.

ب/ أحسب $P_B(U_1)$ احتمال السحب من الصندوق U_1 شرط أن الرقمين المسحوبين زوجيين.

2/ نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد V ، ثم نسحب من الصندوق V عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب جداء الأرقام المسحوبة.

ا/ عين قيم المتغير العشوائي X .

ب/ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

ج/ أحسب احتمال الحدث: « $\log(X - 2) < \frac{1}{2}$ ».



التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين كما يلي: $u_0 = \alpha$ و $v_0 = \beta$ حيث: $0 < \alpha < \beta$ ،
ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq v_n$.

2/ 1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n)$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (\beta - \alpha)$ ، واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

3/ 1/ أدرس إتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) على \mathbb{N} .

ب/ بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4/ نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $w_n = u_n \times v_n$.

1/ أثبت أن المتتالية (w_n) ثابتة على \mathbb{N} ثم عين قيمتها بدلالة α و β .

ب/ بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l يُطلب تعيينها.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I/ لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) & ; x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ولیکن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ 1/ برهن أن الدالة f مستمرة على يمين 0 .

ب/ هل الدالة قابلة للاشتقاق على يمين 0 ؟

ج/ لتكن h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{2}{x}$.

• بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = \frac{2 \ln(1+h(x))}{h(x)}$ ، ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

2/ 1/ من أجل كل x من $]0; +\infty[$ أحسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.

ب/ أدرس إتجاه تغير الدالة f' على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

ج/ استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$.

3/ أكتب معادلة لكل من (T_1) و (T_2) المماسين لـ (C_f) عند النقطة $A(2; f(2))$ وعند المبدأ O على الترتيب.

II/ لتكن u الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = \frac{2x}{x+2}$

و ليكن (γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق (الموضح الشكل أدناه).

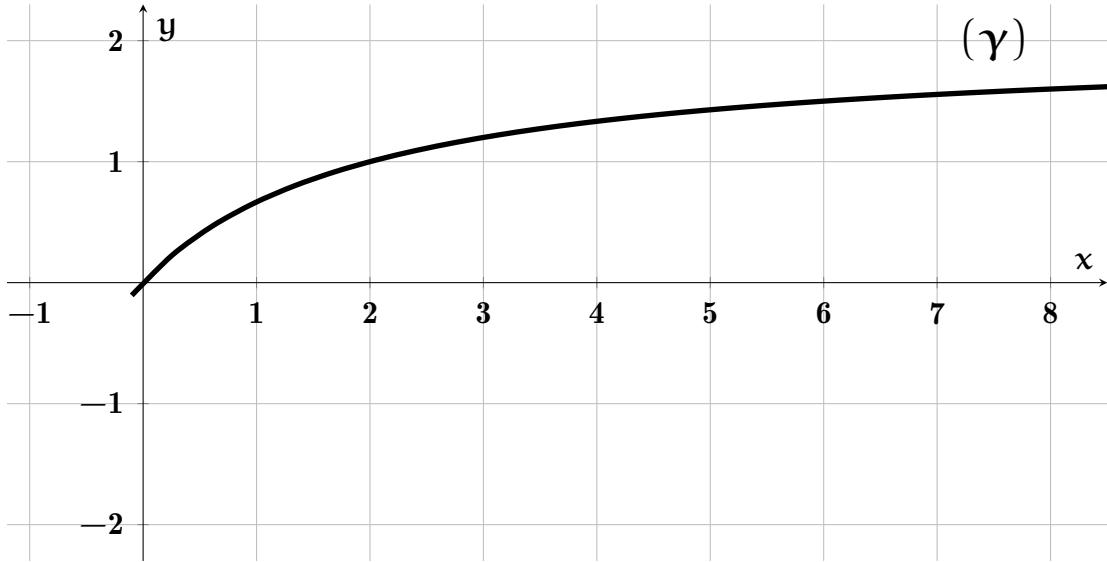
1/ 1/ شكل جدول تغيرات الدالة u .

ب/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) - u(x) = x f'(x)$ واستنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) .

2/ 2/ علم النقطة B من (γ) ذات الفاصلة 2 ، ثم أنشئ (C_f) و (T_2) .



- 3 / ا / λ عدد حقيقي موجب تماما. بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة λ يقطع محور الترتيب في النقطة I التي ترتبها $u(\lambda)$.
- ب/ باستعمال المنحنى (γ) عين طريقة لإنشاء المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة λ ، ثم أنشئ المماس (T_1) .



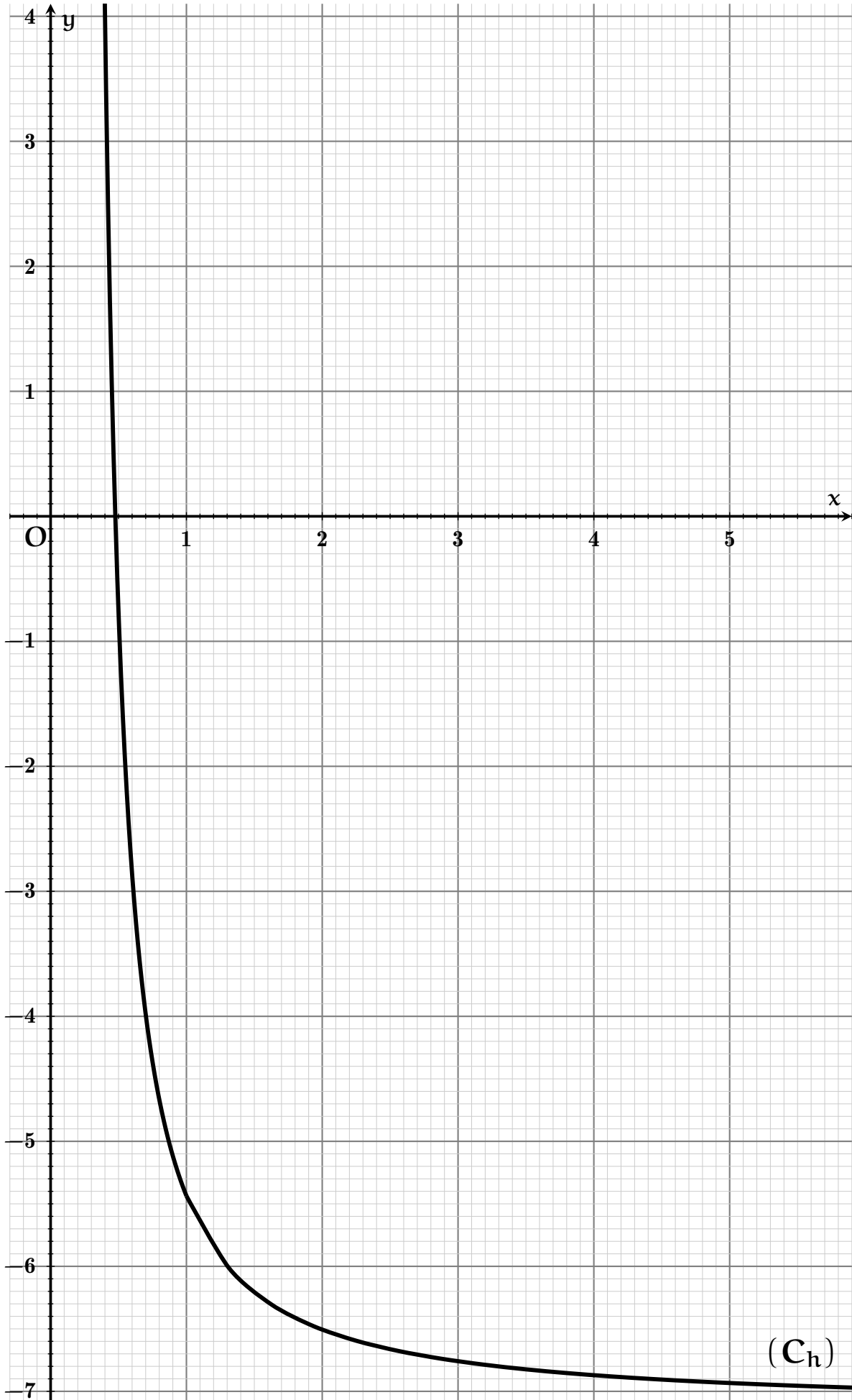
انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:



الإجابة النموذجية

😊😊 بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا😊😊



الإسم:

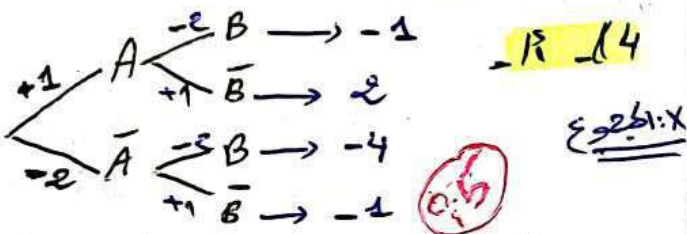
اللقب:

$$P(B) = \frac{19}{360} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{37}{360} = P(B) \text{ ومنه } \textcircled{0,25}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{37}{360} - \frac{3}{10} \times \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{127}{360} \textcircled{0,35}$$

$$P_{B|A}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{19}{360}}{\frac{37}{360}} = \frac{19}{37} \textcircled{0,51}$$



$$X(\Omega) = \{-4, -1, 2\} \text{ ومنه } \textcircled{0,6}$$

$$P(X = -4) = \frac{7}{10} \times \frac{19}{252} = \frac{133}{2520} = \frac{19}{360}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{90}{360}$$

$$P(X = -1) = 1 - \frac{19}{360} - \frac{90}{360} = \frac{251}{360}$$

$X = x_i$	-4	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{360}$	$\frac{251}{360}$	$\frac{90}{360}$

$$E(X) = -4 \times \frac{19}{360} - 1 \times \frac{251}{360} + 2 \times \frac{90}{360} = \frac{-147}{360} \approx -0,41 = E(X) \textcircled{0,2}$$

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \textcircled{0,25}$$

الاستنتاج: $P(\bar{A} \cap B) = \frac{19}{360}$: الشبان 64
 $P(\bar{A} \cap B)$: هو احتمال سحب كرتين

حمر أوين من U_1 وسحب كرتين حمر أوين من U_2 أي سحب

$(2R; 7B)$ (U_2 من R و U_1 من B)

أو $(1R; 1B; 1R)$ (U_1 من B و U_2 من R) $(3R; 6B)$

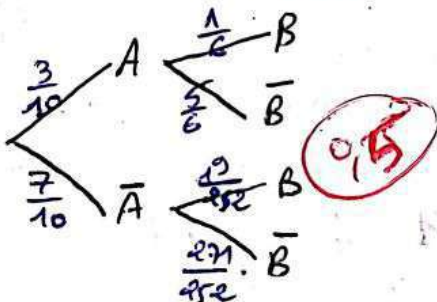
$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{C_2^2}{C_9^2} + \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} \times \frac{C_3^2}{C_9^2}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{36} + \frac{2 \times 3}{10} \times \frac{3}{36}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{19}{360} \textcircled{0,5}$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{19}{360}}{\frac{37}{360}} = \frac{19}{37} = \frac{19}{360} \times \frac{10}{7}$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{19}{252} \textcircled{0,25}$$



$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \textcircled{0,5}$$

الإجابة الفوزية للكالوريوسية
 في مادة الرياضيات

السنة: الرياضيات / 2022/2023

الموضوع الأول :

التحريك الأول : (سحب في آن واحد) (64)

$(2R; 5B)$ $(3R; 2B)$

U_2 U_1

قرص للأحمر R ولأبيض B

A : سحب كرتين حمر أوين من الكيس U_1

B : سحب كرتين حمر أوين من U_2

1- حساب الاحتمالات :

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{10} = P(A) \textcircled{0,25}$$

$P_A(B)$: احتمال سحب كرتين حمر أوين

من U_2 مع العلم أن الكرتين ابيضتين

من U_1 حمر أوين أي نصح : $(4R; 5B)$

$$P_A(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P_A(B) \textcircled{0,25}$$

(أ) تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_B - z_C| = |2 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

فما إذاً $AB = AC = BC$ ، المثلث ABC متساوي الأضلاع.

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-3 + 3i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3}{4} = i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وهذا يدل على أن المثلث متساوي الأضلاع.

$$z_A - z_C = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_B - z_C)$$

وهذا هو الدوران D بالسيارة AB حول A مركزه C والزاوية $\frac{\pi}{2}$ ونسبة $\sqrt{3}$.

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$$

لأنه المثلث ABD قائم في C ، وبالتالي ACD ، وبالتالي A زاوية المثلث ACD مركزها منتصف القطعة $[AD]$ ، نصف قطرها $r = \frac{AD}{2}$

ب) $z = -1$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7) = -12$$

$$\Delta = (\sqrt{12}i)^2 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3} \Rightarrow z = 2 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 + i\sqrt{3} \Rightarrow z = 2 - i\sqrt{3}$$

$$S = \{-1; 2 - i\sqrt{3}; 2 + i\sqrt{3}\}$$

$$z_C = z_B = 2 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_A = -1$$

$$z_D = 3 \quad ; \quad z_B = 2 + i\sqrt{3}$$

(1) تعيين قوس n بحيث يكون $(z_B - z_A)^n$ حقيقياً

$$\arg[(z_B - z_A)^n] = n \arg(z_B - z_A) = \pi + 2\pi k$$

$$z_B - z_A = 2 + i\sqrt{3} + 1 = 3 + i\sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$|z_B - z_A| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$n \times \left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{N} ; n = 12k + 6$$

$$321 \equiv 6 [7] \quad ; \quad 1060 \equiv 3 [7]$$

$$321d + 1060 \equiv -d + 3 [7]$$

$$-d + 3 \equiv 0 [7] \Rightarrow d = 7k + 3$$

$$d = 7k + 3 \quad ; \quad d \equiv 3 [7] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}$$

$$N = 321d + 1060 = 321(7k + 3) + 1060$$

$$N = 2023$$

التعيين الثالث : (4 نقاط)

$$(E) : z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$$

(1) تعيين a, b حيث (E) تكافئ $(z+1)(z^2 + az + b) = 0$

$$z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b = 0$$

$$a+7=3 \quad ; \quad b=7$$

$$a = -4$$

(2) حل المعادلات (E) في \mathbb{C} : $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$

$$0 = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$$

$$z+1=0 \Rightarrow z = -1$$

$$z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Delta = 16 - 28 = -12$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = 2 \pm i\sqrt{3}$$

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^2 - 2x + 2)e^x + \frac{1}{x^2} - 3e \right]$
 $= +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(x^2 - 2x + 2)e^x + \frac{1}{x^2} - 3e \right] = +\infty$

التفسير الهندسي: حامل محور الفرضين مستقيم مائل للمنفذ (ق)

(2) $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$: تبيان أول
 ان الـ f تقبل الاستقامة على $]0, +\infty[$ ولدينا
 ما يدل على $x \in]0, +\infty[$:

$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$= x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$:

$f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0 = f'(1)$

لذا f لها مسيحية :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

ومما يدل على ان f متناهية تماثلا على المجال $]1, +\infty[$ ومما يدل على ان f متناهية تماثلا على المجال $]0, 1[$

$\arg(z + z_B) = k\pi$
 $\arg(z - z_B) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

ومما يدل على ان Π على المستقيم (PB') حيث B' نقطة B بالنسبة الى A مبرأ وهو موازي لحامل محور الحقيقي، ما عدا النقطة B'

التمهيد الرابع : $g(x) = x^2 e^x; D_g = \mathbb{R}_+^*$
 دراسة اتجاه تغير الدالة g :
 الدالة g تقبل الاستقامة على \mathbb{R}_+^* :

$g'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$
 لدينا : $x^2 + 2x > 0$ ما يدل على $x \in \mathbb{R}_+^*$
 لذا $g'(x) > 0$ على المجال $]0, +\infty[$

لذا g متزايدة تماثلا على \mathbb{R}_+^*

(2) $\frac{1}{x} > x$: اذا كان $0 < x < 1$ فكل :
 ومما يدل على ان g متزايدة تماثلا على $]0, 1[$: $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

و اذا كان $x > 1$: فكل : $\frac{1}{x} < x$
 ومما يدل على ان g متزايدة تماثلا على $]1, +\infty[$: $g\left(\frac{1}{x}\right) < g(x)$

$D_f = D_g = \mathbb{R}_+^*$:
 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + \frac{1}{x^2} - 3e$
 $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$

$r = \frac{|z_0 - z_A|}{2} = \frac{|3 + i|}{2} = \sqrt{2} = r_1$
 ويرتبطها النقطة I ذات الـ 0 واقعة 1

$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{2}{2} = 1$
 $I(1; 0)$

(14) - (1) $\arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
 $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

تعيين مجموعة النقطة (r) :
 $z + 1 = \frac{2k\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

ومما تكافئ : $z - z_A = k(z_B - z_A)$
 $\frac{z - z_A}{z_B - z_A} = k$

$(\vec{AB}, \vec{AP}) = 0$
 $AP = k \cdot AB$

ان مجموعة النقطة (r) هي نصف المستقيم الذي يربط A والنقطة B والنقطة A توجدها جميعا : $(\vec{u}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{6}$
 ما عدا النقطة A

(5) $\arg(z^2 - 1 - 4i\sqrt{3}) = \arg(z - e^{-i\sqrt{3}}) + k\pi$
 $\arg(z^2 - z_B^2) = \arg(z - z_B) + k\pi$

ومما $\arg[(z - z_B)(z + z_B)] = \arg(z - z_B) + k\pi$

$(n^2 - 4n + 6)e^{-3e} = 3e - 3e = 0$ وبما أن n ...

$f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x \rightarrow (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$

$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$

$A(x) = \int_1^x (f(x) - h(x)) dx$

$= \int_1^x (x^2 - 2x + 2)e^x dx$
 $= - \int_1^x (x^2 - 2x + 2)e^x dx$

$A(x) = - (x^2 - 4x + 6)e^x + 3e$

$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3e - (x^2 - 4x + 6)e^x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = 3e - 6$

$f(x) = h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$

وذلك لأن $f(x) - h(x) > 0$ مع كل x من المجال $]0, +\infty[$ وبما أن $f(1) = 0$...

جاءت $f(x) - h(x)$ في تقبل الاستنتاج

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ فكل (x) يقبل ههنا عند كل نقطة فاصلاً x مع المجال $]0, +\infty[$ ومنه (x) يقبل ههنا عند النقطة ذات الفاصلة \pm معادلتها

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T): y = -e$

(4) $f(x)$ الاستثناء (انظر الشكل) $0,95$

جاءت المعادلة $f(x) = f(m)$ حلها $f(m) \in]-e, +\infty[$ متى ما $m \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

(5) $f(x)$ متى ما

$[(x^2 - 4x + 6)e^x - 3e]' = (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 6)e^x$
 $= (x^2 - 2x + 2)e^x$
 $= f(x) - h(x)$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$f(1) = e + e - 3e$

$f(1) = -e$

$0,5$

3- ك

متى ما $f(x) = 0$ فمتى ما $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$

$f(0,5) \approx 1,3 > 0$

$f(0,6) \approx -0,7 < 0$

ومن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة الاعداد $0,5 < \alpha < 0,6$ $f(\alpha) = 0$

ولبنا ان $f(x) = 0$ متى ما $x \in]0, \alpha[\cup]\alpha, 1[$

$f(1,5) = -96 < 0$

$f(1,6) = 0,4 > 0$

ومن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة الاعداد $1,5 < \beta < 1,6$ $f(\beta) = 0$

ومن (x) يقبل حامل هو الفواصل $]0, \alpha[$ و $]\beta, 1[$

فاصلتها α و β حيث $0,5 < \alpha < 0,6$

و $1,5 < \beta < 1,6$

بدراسة الوضعية النسبية (f) و (h) متى ما $f(x) - h(x)$

2) في السنة الأولى الفصول (7ⁿ) : 9

دوم

n = 3k	3k+1	3k+2
7 ⁿ = 1	7	4

نبدأ

$$\begin{cases} 7^0 \equiv 1 [9] \\ 7^1 \equiv 7 [9] \\ 7^2 \equiv 4 [9] \\ 7^3 \equiv 1 [9] \end{cases}$$

1- قسم باقي سنة A على 9

$$A = 1441^{2020} + 1442^{2021} + 1443^{2022}$$

نبدأ

- $1441 \equiv 1 [9] \Rightarrow 1441^{2020} \equiv 1 [9]$
- $1442 \equiv -1 [9] \Rightarrow 1442^{2021} \equiv -1 [9]$
- $1443 \equiv 3 [9] \Rightarrow 1443^{2022} \equiv 3 [9]$

وبما أن: $2021 = 3 \times 673 + 2$ فإن:

$$(2) \dots 1442^{2021} \equiv 4 [9]$$

- $1443 \equiv 3 [9] \Rightarrow 1443^{2022} \equiv 3 [9]$

$$1443 \equiv (3^2) [9]$$

$$(3) \dots 1443^{2022} \equiv 0 [9]$$

بحسب (1) و (2) و (3) طرقاً أخرى:

$$A \equiv 5 [9] \text{ أي } A \equiv 1 + 4 + 0 [9]$$

لذا باقي سنة A على 9 هو 5.

1- (3)

$$\alpha = 31042 = 2 + 4 \times 5 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^3$$

$$+ 3 \times 5^4 = 2022 = \alpha$$

$$674(x-5) = 481(y-7)$$

ومنه $674/481(y-7)$ وبما أن

$$\text{PGCD}(674; 481) = 1$$

فإنه حسب غاوس:

$$674 | y-7 \text{ أي } y-7 = 674k \text{ ; } k \in \mathbb{Z}$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$674(x-5) = 481(674k+7-7)$$

$$x-5 = 481k$$

$$x = 481k + 5 \text{ ; } k \in \mathbb{Z}$$

لذا نكتب الحل العام لـ (E) على الشكل:

$$(x, y) \in \{ (481k+5; 674k+7) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

1- حل الجزئية:

$$\begin{cases} \lambda \equiv 1 [674] \\ \lambda \equiv 4 [481] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 674k + 1 \\ \lambda = 481q + 4 \end{cases} \text{ ; } q, k \in \mathbb{Z}$$

$$674k + 1 = 481q + 4$$

$$674k - 481q = 3$$

$$\begin{cases} k = 481t + 5 \\ q = 674t + 7 \end{cases} \text{ ; } t \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda = 674(481t+5) + 1$$

$$A = 324194t + 3371 \text{ ; } t \in \mathbb{Z}$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (4 نقاط)

$$(E) \dots 2022x - 1443y = 3$$

$$\text{PGCD}(2022, 1443) = 3$$

أي أن المعادلة (E) تنقسم:

$$2022 = 1443 \times 1 + 579$$

$$1443 = 579 \times 2 + 285$$

$$579 = 285 \times 2 + 9$$

$$285 = 9 \times 31 + 6$$

$$9 = 6 \times 1 + 3$$

$$6 = 3 \times 2$$

PGCD(2022, 1443) = 3

طرق التحليل إلى عوامل أولية:

$$2022 = 2 \times 3 \times 337$$

$$1443 = 3 \times 13 \times 37$$

$$\text{PGCD}(2022, 1443) = 3$$

المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 لأن:

$$3 | 9$$

أي أن المعادلة (E) تنقسم:

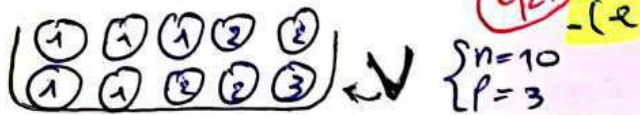
$$674x - 481y = 3$$

$$674(5) - 481(7) = 3$$

وبما أن (5, 7) حل للمعادلة (E) تنقسم:

$$674(x-5) - 481(y-7) = 0$$

$$P_B(u_2) = \frac{2}{\frac{53}{100}} = \frac{8}{159} = P_B(u_2) \text{ واصله}$$



- $\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \rightarrow x=1$ $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \rightarrow x=6$
 $\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{2} \rightarrow x=2$ $\textcircled{2} \textcircled{2} \textcircled{2} \rightarrow x=8$
 $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{2} \rightarrow x=4$ $\textcircled{2} \textcircled{2} \textcircled{3} \rightarrow x=12$
 $\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{3} \rightarrow x=3$

$$x(u) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\} \text{ واصله}$$

$$P(x=1) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(x=2) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_7^3} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$P(x=3) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_7^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

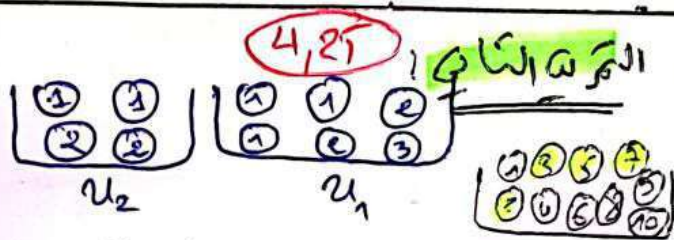
$$P(x=4) = \frac{C_5^1 \times C_4^2}{C_7^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

$$P(x=6) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_4^1}{C_7^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(x=8) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(x=12) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_7^3} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

الاصح 07 و 12



A: سحب كرتين لثلاث دفعات متتالية
 B: سحب كرتين كرتين لثلاث دفعات متتالية

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{31}{100}$$

$$P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{53}{100}$$

$$P(C) = \frac{4}{10} \times \frac{A_4^1 \times A_4^1 \times A_4^1}{A_6^3} + \frac{6}{10} \times \frac{2^1 \times 2^1 \times 2^1}{4^3}$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{16}{30} + \frac{3}{5} \times \frac{8}{16} = \frac{77}{150}$$

$$P_B(u_2) = \frac{P(B \cap u_2)}{P(B)}$$

$$P(B \cap u_2) = \frac{4}{10} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2}{75}$$

$$\beta = 2n^2 + 3n - 3 = 3 + 3 \times 5 + 2 \times 5^2 + 5^3 + 2 \times 5^4 = 1443 = \beta$$

$$\begin{cases} 2022x - 1443y = 9 & \text{--- (1)} \\ 7^{x+y} + 2n^2 = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 481k + 5 \\ y = 674k + 7 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7^{5+674k+7} + 2n^2 = 0 \Rightarrow 7^{12+674k} + 2n^2 = 0$$

$$1 + 2n^2 = 0 \Rightarrow 2n^2 = -1$$

$$n^2 = 4 \Rightarrow n = 2, -2$$

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]	
n^2 =	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	[9]

$$n = 9k + 7 \text{ و } n = 9k + 2 \quad k \in \mathbb{N}$$

$$n \in \{9k + 2; 9k + 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

المسألة الثالثة: 0,4,25

$X=x_i$	1	2	3	4	6	8	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$

• حساب التوقع $E(X)$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{30} + 12 \times \frac{1}{20}$$

$$= \frac{58}{15} \approx \boxed{3,87 \approx E(X)}$$

• حساب احتمال وقوع $\log(X-2) < \frac{1}{2}$

ولنا $\log(X-2) < \frac{1}{2}$ يعني $0 < X-2 < 10^{\frac{1}{2}}$

وهذا $2 < X < 2 + \sqrt{10}$

وهذا $2 < X < 5,162 \dots$

وهذا $X \in \{3, 4, \dots\}$

وهذا

$$P(\log(X-2) < \frac{1}{2}) = P(X=3) + P(X=4)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12}$$

$P(\log(X-2) < \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ 0,25

وكذلك $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$ بما هو جدي؟

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{4u_n v_n - (u_n + v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{4u_n v_n - u_n^2 - v_n^2 - 2u_n v_n}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{-(u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n)}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{-(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq 0$$

0,7

لأن $0 < u_n \leq v_n$

وهذا $P(n+1)$ حقيقة

بأنه حسب مبدأ البرهان بالراجع فإنه

من أجل كل عدد طبيعي n

$0 < u_n \leq v_n$

• البرهان بالرجوع إلى العدد طبيعي n

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \quad \text{بما هو جدي؟}$$

(u_n) $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$ $0 < \alpha < \beta$

(v_n) $\begin{cases} v_0 = \beta \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

• البرهان بالراجع إلى عدد طبيعي n

• $0 < u_n < v_n$: طبيعي n

• أي البرهان إلى: $u_n - v_n \leq 0$

• $0 < v_n$ و $0 < u_n$

بني $P(n)$ الخاصة، $u_n - v_n \leq 0$ و $u_n > 0$ و $v_n > 0$

ولتثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n

• من أجل $n=0$ لدينا: $u_0 = \alpha$ و $v_0 = \beta$

وهذا $0 < u_0 < v_0$

وهذا $P(0)$ حقيقة

• ولأنه عددًا طبيعيًا

• ولنفرض أن: $0 < u_n \leq v_n$

• ولتثبت أن: $0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

• $0 < u_{n+1}$ و $0 < v_{n+1}$

$f''(x) < 0$ 0,25
 و f' متزايدة أو متناقصة

في $]0, +\infty[$ و f' متزايدة
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} \right]$ 0,25

$= 0$
 أي أن f' متزايدة -1

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 0,25

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 $f'(x) > 0$ *

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 * f' متناقصة

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

0,5

3) كتابة معادلات التماس (T_1) و (T_2)
 في (T_2) عند $x=0$ و $f'(0) = 2$ 0,25
 $(T_2): x=0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(1+h(x))}{h(x)}$ 0,25
 $= \lim_{h(x) \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+h(x))}{h(x)} = 2$

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{(x+2)'}{x} - \frac{2}{(x+2)^2}$

$= \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} \times x$

$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$ 0,25

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 في $]0, +\infty[$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$
 $= -\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$
 $= \frac{-2x-4+2x}{x(x+2)^2}$ 0,25

$f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$
 في $]0, +\infty[$ و $f''(x) < 0$
 في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة

التمرين الرابع: 7,5

$f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$; $x > 0$: (I)
 $f(0) = 0$

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة

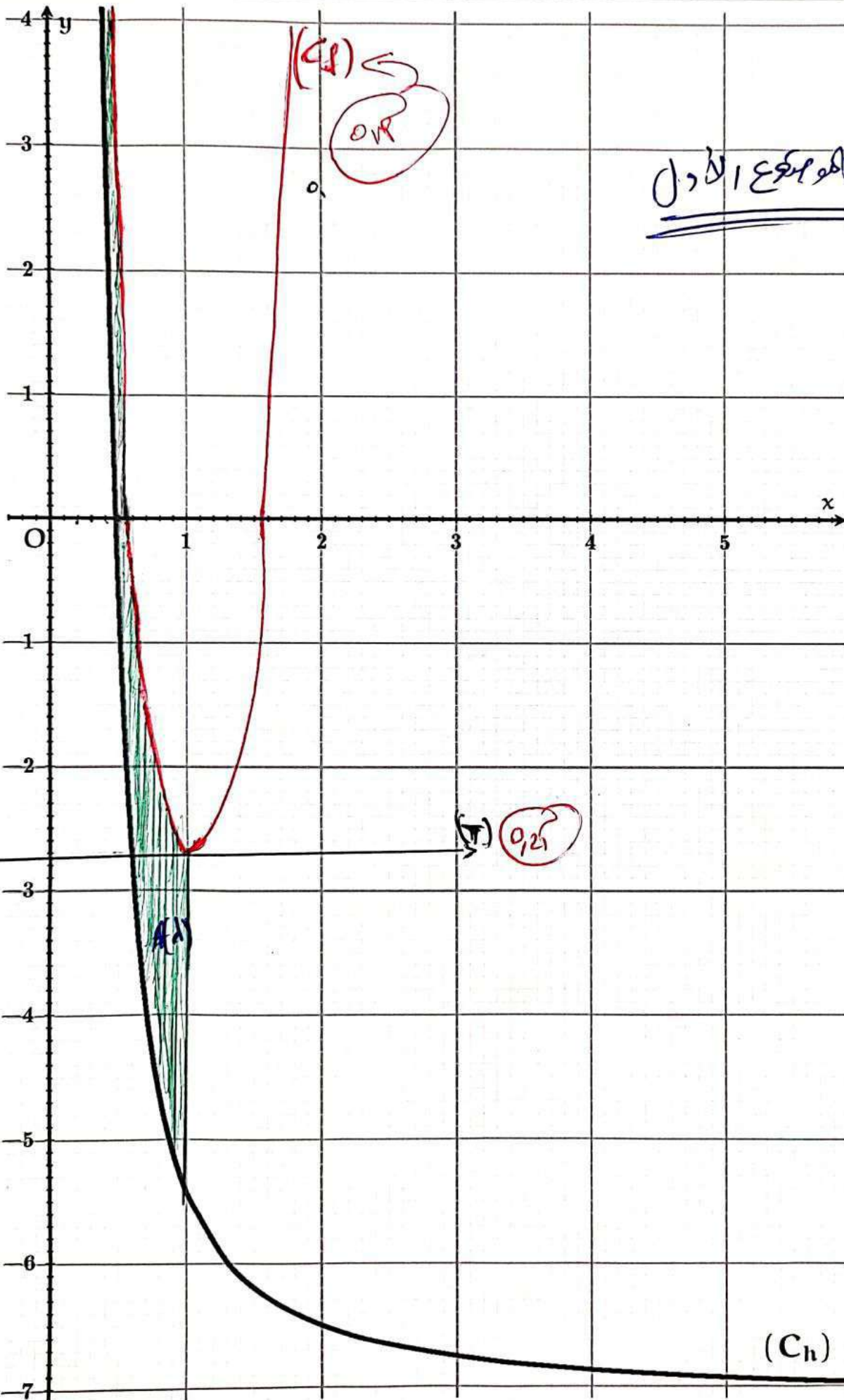
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln(x+2) - x \ln x]$
 $= 0 = f(0)$ 0,5

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 دراسة قابلية الاستنتاج

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ 0,5
 $= +\infty$

في $]0, +\infty[$ و f' متناقصة
 عند $x=0$ و f' متناقصة

$h(x) = \frac{2}{x}$ -1
 $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$
 $= \frac{2}{x} \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{2 \ln(1+h(x))}{h(x)}$ 0,25



الإسم:
الممثل البياني هو مجموع الأدول

اللقب:

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانويات المقاطعة التفتيشية غرداية 02
دورة: ماي 2023

مديرية التربية لولاية غرداية
امتحان بكالوريا التجريبي
الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(z-4)(z^2+4z+16)=0$

(2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب

$$z_C = \bar{z}_B \text{ و } z_B = -2 + 2i\sqrt{3}, z_A = 4$$

• أكتب الأعداد المركبة z_C و z_B, z_A على الشكل الأسّي ثم بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

(3) نعتبر العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

أ- أكتب العدد L على الشكل الأسّي ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقي سالب.

د- ما طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C . أوجد عبارته المركبة.

هـ- عين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتحويل r .

و- ما طبيعة الرباعي $ABCE$ ؟ علل إجابتك.

(4) (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$

أ- بين أن كلا من النقطتين E و B تنتميان إلى (γ)

ب- عين طبيعة المجموعة (γ) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر ثنائية $(x_0; q)$ حيث x_0 و q عددين طبيعيين غير معدومين و $\text{pgcd}(x_0, q) = 1$. (x_n) متتالية هندسية

أساسها q وحدها الأول x_0 ، وتحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $x_{n+1} + 2x_{n+3} - 44x_0^2 q^n = 0$

(1) أ- بين أن: $q + 2q^3 = 44x_0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\text{pgcd}(1 + 2q^2, 4) = 1$ ثم حدد قيمة كل من x_0 و q

(2) نأخذ فيما يلي $(x_0; q) = (3; 4)$ ونضع من أجل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \equiv 0[3]$

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+1} = 4S_n + 3$ ، ثم حدد قيمة العدد: $\text{pgcd}(S_{n+1}; S_n)$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n \equiv 0[5]$

(3) أ- حدد باقي قسمة العدد S_{27} على 17.

ب- استنتج ثلاثة قواسم أولية للعدد S_{27}

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: رياضيات /البكالوريا التجريبي 2023

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على 5 كريات حمراء و 3 كريات صفراء وكريتين خضراوين. الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من الوعاء U .
 A و B و C ثلاثة أحداث حيث:

• A : " الحصول على ثلاث كريات حمراء "

• B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون "

• C : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى "

(1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A و B و C على الترتيب.

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

• عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي.

(3) نظيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع.

D و E حدثين حيث:

• D : " الحصول على كرتين حمراوين "

• E : " الحصول على كرتين من نفس اللون "

أ- برهن أن: $P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

ب- أحسب بدلالة n العدد $P(E)$ احتمال الحدث E .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P(E) \geq \frac{1}{2}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f_m الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f_m(x) = e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m$ حيث m وسيط حقيقي

(C_m) التمثيل البياني للدالة f_m في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

I. في هذا الجزء نضع: $m=1$

(1) أدرس تغيرات الدالة f_1

(2) أ- برهن أن المنحني (C_1) يقبل A_0 نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

ب- أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_1) عند النقطة A_0 ثم أنشئه.

ج- أنشئ المنحني (C_1)

II

(1) أ- بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها.

ب- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m وجود نقط تقاطع المنحني (C_m) مع حامل محور الفواصل.

(2) أدرس تغيرات الدالة f_m ، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m) .

(3) أ- m_1 و m_2 عددين حقيقيين حيث: $m_1 < m_2$ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_1}) و (C_{m_2})

ب- أنشئ (دون دراسة التغيرات) المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) في نفس المعلم السابق.

(4) نعتبر y_m القيمة الحدية المحلية للدالة f_m التي تأخذها عند x_m أكتب كل من x_m و y_m بدلالة m .

استنتج معادلة مستقلة عن m للمنحني (P) مجموعة النقط $M(x_m; y_m)$ لما m يسمح $]-1; +\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: رياضيات /البكالوريا التجريبي 2023

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

نعتبر المعادلة التالية: (E) $7x - 5y = 11$ حيث x و y عدنان صحيحان

(1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3 [5]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

ج) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x; y) = 11$

(2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $5^n + 7^{2023}$ قابلا للقسمة على 11

(3) a و b عدنان طبيعيين غير معدومين كلاهما أصغر تماما من 7، N عدد طبيعي يكتب $a01b$ في النظام العشري

أ) تحقق أن $10^3 \equiv -1 [11]$

ب) عين قيمة العدد N إذا علمت أن باقي قسمته على 11 هو 4

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 11

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس U على 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء و كرتين خضراوان، الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس

(1) أحسب احتمال الحادثتين التاليتين :

A : " الكريات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B : " من بين الكريات الثلاثة المسحوبة توجد كرة واحدة فقط خضراء "

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الألوان الظاهرة

أ) عين قانون احتمال المتغير X

ب) احسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X

(3) في تجربة مستقلة نعتبر الكيس U وكيس آخر V به كرتين بيضاوين و كرتين حمراوين و كرية خضراء

نرمي حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6، إذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس U

وإلا نسحب كرية من الكيس V

أ) بين أن احتمال سحب كرية بيضاء هو $\frac{5}{12}$

ب) علما أن الكرية المسحوبة بيضاء فما احتمال ان تكون من الكيس V

التمرين الثالث: (04 نقاط).

a عدد حقيقي موجب تماما

$f(x) = \sqrt{1+ax^2}$:- المجال $[0; +\infty[$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: رياضيات /البكالوريا التجريبي 2023

(1) نفرض أن $0 < a < 1$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

(ب) بين أن (u_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} ، واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

(2) نضع $a > 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$

(أ) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$

(ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (w_n) كالاتي:

$$w_0 = 0 \quad \text{ومن أجل كل } n > 1 \quad w_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

- أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و a

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{w_n}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - \ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

(2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بالعلاقة التالية: $f(x) = \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right)$

(C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ أحسب $f(-x) + f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) (أ) أثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (C_f) يوازيان (Δ) يطلب تحديد معادلة كل منهما.

(ب) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث

$$-0,5 < \beta < -0,4 \quad \text{و} \quad 2 < \alpha < 2,1$$

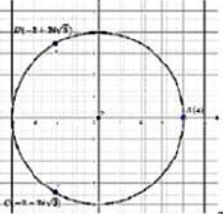
(ج) أرسم كلاً من (Δ) ، (T) ، (T') والمنحنى (C_f) .

(5) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e - 2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا

(6) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين

الذين معادلتهم: $x = \alpha$ و $x = 1$

انتهى الموضوع الثاني

النقطة	عناصر الإجابة
الموضوع الاول	
التمرين الأول: (6 نقاط)	
2	<p style="text-align: right;">$z^2 + 4z + 16 = 0 / 1$</p> <p>إما: $z - 4 = 0$ أي $z = 4$ أو $z^2 + 4z + 16 = 0$ و $\Delta = -12$ أي $\Delta = 12i^2$</p> <p>أي: $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ ، $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$</p> 
0.5	<p>2 / كتابة كل من z_C و z_B، z_A على الشكل الأسّي. $z_C = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ و $z_B = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_A = 4e^{i0}$</p> <p>استنتاج خصائص الدائرة المحيطة بالمثلث ABC بما أن: $z_A = z_B = z_C = 4$ فإن النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O نصف قطرها 4.</p>
0.5	<p>كتابة L على الشكل الأسّي: $L = \frac{\bar{z}_B - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A} / i / 3$ ، $L = 1$ ، $\frac{\bar{z}_B - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>و $Arg(L) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ومنه: $L = e^{-i\frac{\pi}{3}}$</p> <p>التفسير الهندسي للنتائج: $L = 1$ معناه $\left \frac{\bar{z}_B - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A} \right = 1$ أي: $\left \frac{\bar{z}_B - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A} \right = 1$ أي: $\bar{z}_B - \bar{z}_A = \bar{z}_C - \bar{z}_A$</p> <p>ومنه: $AB = AC$ و $Arg\left(\frac{\bar{z}_B - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$ معناه: $(\overline{AC}, \overline{AB}) = -\frac{\pi}{3}$</p> <p>ب / المثلث ABC متقايس الأضلاع.</p> <p>ج / تعيين قيم n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقيا سالبا تماما.</p> <p>L^n حقيقي سالب تماما معناه: $Arg(L^n) = (2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}^-$ أي: $-\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}^-$</p> <p>$-n = 6k+3 / k \in \mathbb{Z}^-$ أي: $n = -6k-3 / k \in \mathbb{Z}^-$</p> <p>د / إيجاد طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C. لدينا: $\frac{\bar{z}_C - \bar{z}_A}{\bar{z}_B - \bar{z}_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $\frac{\bar{z}_B - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فإن</p> <p>التحويل دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$.</p> <p>أيجاد العبارة المركبة للتحويل: $z' = az + b$ و $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و</p> <p>ومنه $b = 2 - 2i\sqrt{3}$ وتصبح العبارة المركبة من الشكل:</p> <p style="text-align: right;">$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2 - 2i\sqrt{3}$</p>

هـ / تعيين \bar{z}_E لاحقة النقطة E صورة C بالدوران γ . لدينا: $z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C + 2 - 2i\sqrt{3}$ أي: $z_E = 4 - 4i\sqrt{3}$
 و / الرباعي $ABCE$ معين لأن المثلثين ABC و ACE متقايسا الأضلاع ويشتركان في الضلع $[AC]$

4 / (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$
 أ / التبيين أن النقطتين B و E تنتميان إلى المجموعة (γ) . أي: $|iz_B + 2i - 2\sqrt{3}| = |i(-2 + 2i\sqrt{3}) + 2i - 2\sqrt{3}| = |-2 + 2i\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3}| = |-6 + 2i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ و $|iz_E + 2i - 2\sqrt{3}| = |i(4 - 4i\sqrt{3}) + 2i - 2\sqrt{3}| = |4i + 4\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3}| = |6i + 2\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$
 أي: $B \in (\gamma)$ و $E \in (\gamma)$ أي: $|z_B - 4| = |-2 + 2i\sqrt{3} - 4| = |-6 + 2i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ و $|z_E - 4| = |4 - 4i\sqrt{3} - 4| = |-4i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$
 $|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$
 $\left| i \left(z + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{i} \right) \right| = |z - 4|$
 $|i(z + 2 + 2i\sqrt{3})| = |z - 4|$
 $|i| \times |z + 2 + 2i\sqrt{3}| = |z - 4| \quad ; \quad |i| = 1$
 $|z - (-2 - 2i\sqrt{3})| = |z - 4|$
 $|z - z_C| = |z - z_A|$
 ب / تعيين طبيعة المجموعة (γ) : لدينا:
 $|z - z_C| = |z - z_A|$ معناه: $MC = MA$ ومنه المجموعة (γ) هي محور القطعة $[AC]$
 أو بعبارة أخرى هي المستقيم (BE)

التمرين الثاني: (6 نقاط)

الاجابة النموذجية مادة الرياضيات السعبة: رياضيات بك 2023

العلامة		عناصر الاجابة (الموضوع الاول)
مجزأة / مجموع		المترين الثاني (04 نقاط)
1	0,5	<p>أ - لدينا $x_0^2 + 2x_1 = 44x_0^2$: $x_1 = 21x_0$ عند سبه $x_0 = x_0 q^n$ اي $x_1 = 21x_0 q$</p> <p>ومن $x_0^2 q^{2n+1} + 2x_0^2 q^{2n+2} - 44x_0^2 q^{2n+2} = 0$ اذن $q + 2q^3 = 44q$</p>
	0,5	<p>ب - لدينا $q(1+2q^2) = 44q$</p> <p>يقسم $44x$ و 44 يقسم q فنعو يقسم 44 (تسبب q)</p> <p>$q \in \{1, 4, 11, 44\}$</p> <p>لما $q=1$ فان $1+2q^2 = 3$ ؛ بما $q=4$ فان $1+2q^2 = 33$</p> <p>لما $q=11$ فان $1+2q^2 = 243$ ؛ بما $q=44$ فان $1+2q^2 = 1937$</p> <p>في كل الحالات $\text{PGCD}(1+2q^2, 44) = 1$ لا توجد x_0 : $q=1, 4$</p> <p>لما $q=1$ او $q=11$ فان $x_0 \notin \mathbb{N}$</p> <p>لما $q=4$ فان $x_0 = 3$ ؛ بما $q=44$ فان $x_0 = 3313$</p>
ع	0,5	<p>أ - لدينا $(x_0, q) = (3, 4)$: $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$</p> <p>$S_n = x_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 3 \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = 4^{n+1} - 1$</p>
	0,5	<p>ب - التحقق : $S_{n+1} = 4^{n+2} - 1 = 4 \times 4^{n+1} - 1 = 4(4^{n+1} - 1) + 3 = 4S_n + 3$</p> <p>اذ $\text{PGCD}(S_n, S_{n+1}) = 3$</p>
	0,5	<p>ج - لدينا : $S_n \equiv 0 \pmod{3}$ اي $4^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ ومنه $4^{n+1} \equiv 1 \pmod{3}$ ومنه $4 \equiv 1 \pmod{3}$</p> <p>لدينا : $4 \equiv -1 \pmod{5}$ ، ومنه $4 \equiv (-1) \pmod{5}$ ، ومنه $4^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{5}$</p> <p>ومن $n+1$ زوجي اي n فردي</p> <p>اذ n متكبر (تساوي) $S_n \equiv 0 \pmod{5}$ اي n فردي اي $n = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$</p>

3 - أ - باقى قسمه S_{28} على 17 =

لدينا: $S_{28} = 4^{28} - 1 = 4^{29} - 1$

لدينا: $4^{29} = 4 \times 4^{28} = 4 \times 4^{14}$

نعمل أي $16 \equiv -1 \pmod{17}$ ومنه $(16)^{14} \equiv (-1)^{14} \pmod{17}$ أي $(16)^{14} \equiv 1 \pmod{17}$

ومنه $4 \times (16)^{14} \equiv 4 \times 1 \pmod{17} = 4$ ومنه $4 \times (16)^{14} - 1 \equiv 4 - 1 \pmod{17} = 3$

ومنه $S_{28} \equiv 3 \pmod{17}$

إذى باقى قسمه S_{28} على 17 هو 3

ب - استنتاج القواسم الثلاث الأولية للعدد S_{27} :

لدينا: $S_{28} = 4S_{27} + 3$ و $S_{28} \equiv 3 \pmod{17}$

ومنه $4S_{27} + 3 \equiv 3 \pmod{17}$ أي $4S_{27} \equiv 0 \pmod{17}$

ومنه $S_{27} \equiv 0 \pmod{17}$

إذى: القواسم الأولية الثلاث المطلوبة هي $3, 5, 17$

			(1)
			(2)

التمرين الثالث: (6 نقاط)

0.5	حساب الاحتمالات:	(1)
0.5	$p(A) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}$	
0.5	$p(B) = \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$	
0.5	$p(C) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$	

0.25	(2) قيم المتغير العشوائى هي: $X \in \{1; 2; 3\}$.					
	$p(X=1) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$					
	$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1 + C_5^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_5^1 + C_2^2 \times C_3^1 + C_5^2 \times C_2^1 + C_5^1 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{79}{120}$					
	$p(X=3) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$					
	قانون احتمال المتغير العشوائى:					
	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>$(X = x_i)$</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	$(X = x_i)$	1	2	3	
$(X = x_i)$	1	2	3			

0.75		$p(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$								
0.25	الأمل الرياضياتي: $E(X) = 1 \times \frac{11}{120} + 2 \times \frac{79}{120} + 3 \times \frac{30}{120} = 0,87.$												
0.25	(3) (أ) البرهان أن $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ $p(D) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{n!}{(n+5)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ (ب) حساب $p(E)$ بدلالة n :												
0.5	$p(E) = \frac{A_2^2 + A_3^2 + A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{2 + 6 + \frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}} = \frac{8 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2 - n + 8}{n^2 + 9n + 20}$												
0.5	(ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E) \geq \frac{1}{2}$ $p(E) \geq \frac{1}{2} \text{ يكافئ } \frac{n^2 - n + 8}{n^2 + 9n + 20} \geq \frac{1}{2} \text{ أي } 2n^2 - 2n + 16 \geq n^2 + 9n + 20$ وبالتالي $n^2 - 11n - 4 \geq 0$ نحسب Δ $\Delta = 137$ $n_1 = -0,35$ $n_2 = 11,35$ أي قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E) \geq \frac{1}{2}$ هي: $n \geq 12$												
التمرين الرابع: (6 نقاط)													
1.5	0.5	(I) لدينا: $f_1(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$ دراسة تغيرات الدالة f_1 : (أ) حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-2x} - 2e^{-x} + 1] = 1$											
0.25	(ب) الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على وعبرة دالتها المشتقة هي: $f_1'(x) = 2e^{-2x}(e^x - 1)$ أي $f_1'(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-x}$												
0.75	إشارة $f_1'(x)$ من إشارة $e^x - 1$ ومنه نلخص إشارة في الجدول التالي: أي f_1 متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$												
		<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">x</td> <td style="padding: 2px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$f_1'(x)$</td> <td style="padding: 2px;">-</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f_1'(x)$	-	0	+			
x	$-\infty$	0	$+\infty$										
$f_1'(x)$	-	0	+										

f_1 و f_1 متزايدة تماثل على المجال $[0; +\infty[$

و جدول تغيرات الدالة يكون :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$+\infty$	0	1

0.5

(1) أ- برهان أن المنحنى (C_1) يقبل نقطة انعطاف A_0 و حساب احداثياتها :
نحسب f_1'' : الدالة f_1' قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي : $f_1'(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$ أي

$$f_1'(x) = 2e^{-2x}(2 - e^x)$$

نضع $f_1'(x) = 0$ أي $2e^{-2x}(2 - e^x) = 0$ ومنه يكون إذا $2 - e^x = 0$ وبالتالي $x = \ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f_1''(x)$	$+$	0	$-$

ويمكن تلخيص إشارة $f_1''(x)$ في الجدول التالي :

أي المشتقة الثانية للدالة f_1 تنعدم عند الفاصلة $\ln 2$ وتغير إشارتها

0.5

وبالتالي المنحنى (C_1) الممثل للدالة f_1 يقبل النقطة A_0 : $A_0(\ln 2; f_1(\ln 2))$ ومنه $A_0\left(\ln 2; \frac{1}{4}\right)$

ب - معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة هي : $(T) : y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$

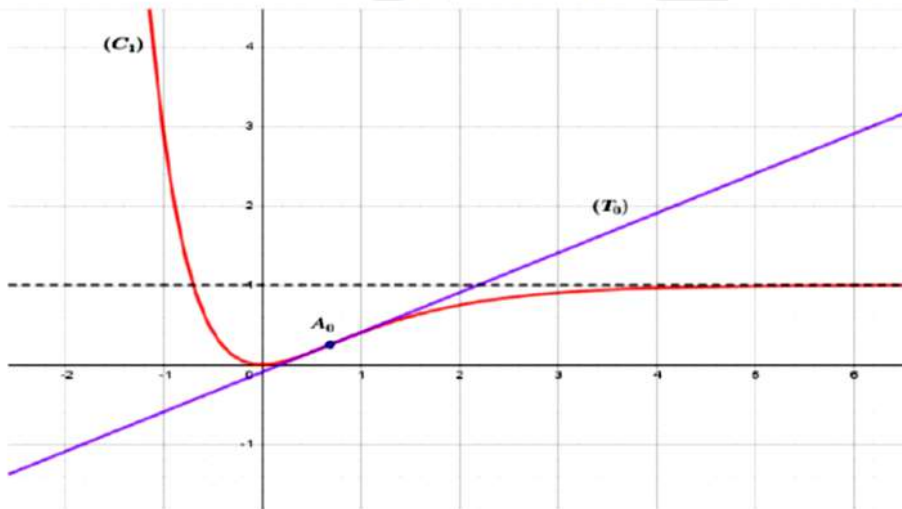
$$(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} \text{ و منه } (T) : y = \frac{1}{2}(x - \ln 2) + \frac{1}{4}$$

1.25

0.05

0.5

ج - الإنشاء



0.25

(II) (1) أ - برهان أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة و تعين احداثياتها :

نحل المعادلة $f_m(x) = f_{m'}(x)$ مع $(m \neq m')$ أي

$$e^{-x} = 1 \text{ اذن } (m' - m)e^{-x} = m' - m \text{ أي } e^{-2x} - (1 + m)e^{-x} + m = e^{-2x} - (1 + m')e^{-x} + m'$$

0.75

0.5

أي $x = 0$ و بما أن من أجل كل عدد حقيقي m : $f_m(0) = 0$ اذن جميع المنحنيات تمر من النقطة الثابتة

هي المبدأ $O(0,0)$ (كما يمكن استعمال طريقة الكثير الحدود المعلوم)

ب- المناقشة حسب قيم m وجود نقط تقاطع المنحنى (C_m) مع حامل محور الفواصل :

نحل المعادلة $f_m(x) = 0$ أي $e^{-2x} - (1 + m)e^{-x} + m = 0$ بوضع $e^{-x} = t$ تصبح المعادلة :

$$t^2 - (1+m)t + m = 0$$

نحسب المميز Δ نجد : $\Delta = (1+m)^2 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$ أي $\sqrt{\Delta} = |m-1|$

لما $m > 1$: $t = \frac{1+m-(m-1)}{2} = 1$ أو $t = \frac{1+m+(m-1)}{2} = m$ وبالتالي $x = 0$ أو $x = -\ln m$

لما $m < 1$: $t = \frac{1+m-(1-m)}{2} = m$ أو $t = \frac{1+m+(1-m)}{2} = 1$

- لما $0 < m < 1$ نجد : $x = 0$ أو $x = -\ln m$

- لما $m \leq 0$ نجد : $t_1 < 0$ مرفوض ولما $t = 1$ نجد $x = 0$

- لما $m = 1$ نجد : $t = 1$ أي نجد $x = 0$

إذن - لما $m = 1$ أو $m \leq 0$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة هي المبدأ $O(0,0)$

- لما $m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما المبدأ $O(0,0)$

والنقطة $B(-\ln m, 0)$

0.5

(2) دراسة تغيرات الدالة f_m وتعيين معادلة للمستقيمات المقاربة :

أ- النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m] = m$

0.25

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}(1 - (1+m)e^x + me^{2x}) = +\infty$

بمأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = m$ فإن المنحنيات (C_m) تقبل نستقيما مفاربا معادلته $y = m$ بجوار $+\infty$

: : الدالة f_m قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} وعبارة دالتها المشتقة هي :

0.75

$f'_m(x) = e^{-2x} [(1+m)e^x - 2]$ أي $f'_m(x) = -2e^{-2x} + (1+m)e^{-x}$

إشارة $f'_m(x)$ من إشارة $(1+m)e^x - 2$ أي نناقش حسب قيم m إشارة $f'_m(x)$

(أ) لما $m = -1$ أي $m+1 = 0$ تكون $f'_m(x) < 0$ وبالتالي الدالة f_{-1} متناقصة تماما على \mathbb{R}

(ب) لما $m < -1$ أي $m+1 < 0$ تكون $f'_m(x) < 0$ وبالتالي الدالة f_m متناقصة تماما على \mathbb{R}

(ج) لما $m > -1$ أي $m+1 > 0$ نقول $(1+m)e^x - 2 = 0$ نجد $e^x = \frac{2}{m+1}$ ومنه $x = \ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ وفي

هذه الحالة نقول الدالة f_m متناقصة تماما على المجال $]-\infty, \ln\left(\frac{2}{m+1}\right)[$ و متزايدة تماما على المجال

$$\left[\ln\left(\frac{2}{m+1}\right); +\infty \right[$$

(ج) جدول التغيرات :

لما $m \leq -1$

لما $m > -1$

0.5

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{2}{1+m}\right)$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
$f_m(x)$	$+\infty$	$f\left(\ln\left(\frac{2}{1+m}\right)\right)$	m

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	-
$f_m(x)$	$+\infty$	m

0.5	0.5	<p style="text-align: center;">(3) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_{m_1}) و (C_{m_2})</p> <p>لتدرس اشارة الفرق : $f_{m_2}(x) - f_{m_1}(x) = e^{-2x} - (1+m_2)e^{-x} + m_2 - e^{-2x} + (1+m_1)e^{-x} - m_1$</p> <p>أي $f_{m_2}(x) - f_{m_1}(x) = (m_2 - m_1)(1 - e^{-x})$ وبالتالي $f_{m_2}(x) - f_{m_1}(x) = -(m_2 - m_1)e^{-x} + m_2 - m_1$</p> <p>بما أن $m_2 > m_1$ أي $m_2 - m_1 > 0$ فان اشارة الفرق تتبع اشارة $1 - e^{-x}$ وبالتالي الوضعية تكون</p> <p>1- لما $x \in]-\infty; 0[$ المنحنى (C_{m_2}) يقع تحت المنحنى (C_{m_1})</p> <p>2- لما $x = 0$ المنحنى (C_{m_2}) يقطع المنحنى (C_{m_1}) في النقطة $O(0,0)$</p> <p>3- لما $x \in]0; +\infty[$ المنحنى (C_{m_2}) يقع فوق المنحنى (C_{m_1})</p>
0.25	0.25	<p style="text-align: center;">(4) الانشاء: يمكن الاعتماد على الدراسة السابقة في انشاء المنحنين (C_3) و (C_{-2})</p>
0.25	0.5	<p style="text-align: center;">(5) كتابة كل x_m من و y_m بدلالة m</p> <p>للدالة f_m قيمة حدية محلية معناه $f_m(x) = 0$ وحسب الأسئلة السابقة وجدنا أن لهذه المعادلة حولا لما $m > -1$</p> <p>لدينا $f_m(x) = 0$ أي أن $x_m = \ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$</p> <p>ومنه $y_m = f(x_m) = f\left(\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)\right) = e^{-2\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)} - (1+m)e^{-\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)} + m = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - \frac{(m+1)^2}{2} + m$</p> <p>إذا $y_m = \frac{(m+1)^2 - 2(m+1)^2 + 4m}{4} = \frac{-(m+1)^2 + 4m}{4} = \frac{-m^2 - 2m + 1 + 4m}{4} = \frac{-(m^2 - 2m + 1)}{4}$</p> <p>ومنه $y_m = \frac{-(m-1)^2}{4}$</p> <p>إيجاد معادلة مستقلة m عن للمنحنى (p) لما يسمح m لمجال $]-1; +\infty[$</p> <p>نعلم أن $x_m = \ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ فإن $e^{x_m} = \frac{2}{m+1}$ وبالتالي $m+1 = \frac{2}{e^{x_m}}$ أي $m = 2e^{-x_m} - 1$</p> <p>وبتعويض m في y_m نجد $y_m = \frac{-(2e^{x_m} - 1 - 1)^2}{4} = \frac{-(2e^{x_m} - 2)^2}{4} = \frac{-4(e^{x_m} - 1)^2}{4}$</p>
0.5	0.25	<p style="text-align: center;">(5) كتابة كل x_m من و y_m بدلالة m</p> <p>للدالة f_m قيمة حدية محلية معناه $f_m(x) = 0$ وحسب الأسئلة السابقة وجدنا أن لهذه المعادلة حولا لما $m > -1$</p> <p>لدينا $f_m(x) = 0$ أي أن $x_m = \ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$</p> <p>ومنه $y_m = f(x_m) = f\left(\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)\right) = e^{-2\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)} - (1+m)e^{-\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)} + m = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - \frac{(m+1)^2}{2} + m$</p> <p>إذا $y_m = \frac{(m+1)^2 - 2(m+1)^2 + 4m}{4} = \frac{-(m+1)^2 + 4m}{4} = \frac{-m^2 - 2m + 1 + 4m}{4} = \frac{-(m^2 - 2m + 1)}{4}$</p> <p>ومنه $y_m = \frac{-(m-1)^2}{4}$</p> <p>إيجاد معادلة مستقلة m عن للمنحنى (p) لما يسمح m لمجال $]-1; +\infty[$</p> <p>نعلم أن $x_m = \ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ فإن $e^{x_m} = \frac{2}{m+1}$ وبالتالي $m+1 = \frac{2}{e^{x_m}}$ أي $m = 2e^{-x_m} - 1$</p> <p>وبتعويض m في y_m نجد $y_m = \frac{-(2e^{x_m} - 1 - 1)^2}{4} = \frac{-(2e^{x_m} - 2)^2}{4} = \frac{-4(e^{x_m} - 1)^2}{4}$</p>

و بالتالي نحصل على معادلة للمنحنى (p) هي $y = -(e^x - 1)$ لما يسمح m لمجال $]-1; +\infty[$

النقطة		عناصر الإجابة																																	
الموضوع الثاني																																			
التمرين الأول: (04 نقاط)																																			
0.5	0.5	<p>نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية: $(E) \quad 7x - 5y = 11 \dots\dots$</p> <p>(1) أ) الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) معناها $7x = 5y + 11$ ومنه $7x \equiv 1[5]$ ومنه $2x \equiv 1[5]$ ومنه $6x \equiv 3[5]$ إذن $x \equiv 3[5]$</p>																																	
0.5	0.5	<p>ب) استنتاج حلول المعادلة (E): لدينا $x \equiv 3[5]$ معناها $x = 5k + 3$ حيث $k \in \mathbb{Z}$</p> <p>بالتعويض في (E) نجد: $y = 7k + 2$ إذن $(x; y) = (5k + 3; 7k + 2) \quad k \in \mathbb{Z}$</p>																																	
1.5	0.5	<p>ج) تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x; y) = 11$</p> <p>من المعادلة (E) نستنتج أن $PGCD(x; y)$ يقسم 11 إذن $PGCD(x; y) = 11$ معناها: $\begin{cases} x \equiv 0[11] \\ y \equiv 0[11] \end{cases}$</p>																																	
0.5	0.5	<p>ومنه $\begin{cases} 7k + 2 \equiv 0[11] \\ 5k + 3 \equiv 0[11] \end{cases}$ ومنه $2k \equiv -10[11]$ ومنه: $k \equiv 6[11]$ معناها: $k = 11k' + 6$</p> <p>بالتعويض نجد: $(x; y) = (55k' + 33; 77k' + 44) \quad k' \in \mathbb{Z}$.</p>																																	
0.5	0.5	<p>أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="11">بواقي القسمة الاقليدية لـ: 7^n على 11</th> </tr> <tr> <th>n</th> <th>10k</th> <th>10k+1</th> <th>10k+2</th> <th>10k+3</th> <th>10k+4</th> <th>10k+5</th> <th>10k+6</th> <th>10k+7</th> <th>10k+8</th> <th>10k+9</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الباقى</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>10</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>	بواقي القسمة الاقليدية لـ: 7^n على 11											n	10k	10k+1	10k+2	10k+3	10k+4	10k+5	10k+6	10k+7	10k+8	10k+9	الباقى	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
بواقي القسمة الاقليدية لـ: 7^n على 11																																			
n	10k	10k+1	10k+2	10k+3	10k+4	10k+5	10k+6	10k+7	10k+8	10k+9																									
الباقى	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8																									
1.25	0.5	<p>بواقي القسمة الاقليدية لـ: 5^n على 11</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>5k</th> <th>5k+1</th> <th>5k+2</th> <th>5k+3</th> <th>5k+4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>الباقى</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>	n	5k	5k+1	5k+2	5k+3	5k+4	الباقى	1	5	3	4	9																					
n	5k	5k+1	5k+2	5k+3	5k+4																														
الباقى	1	5	3	4	9																														
0.25	0.25	<p>ب) $5^n + 7^{2023} \equiv 0[11]$ قابلا للقسمة على 11 معناها: $2023 = 202 \times 10 + 3$ لدينا: $5^n + 7^{2023} \equiv 0[11]$</p> <p>إذن: $5^n + 2 \equiv 0[11]$ ومنه: $5^n \equiv 9[11]$ إذن: $n = 10k + 8 \quad k \in \mathbb{N}$</p>																																	
1.25	0.25	<p>(2) a و b عددان طبيعيين غير معدومين كلاهما أصغر من 8، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}^{10}$</p> <p>أ) التحقق: لدينا أن $10 \equiv -1[11]$ ومنه $10^3 \equiv (-1)^3[11]$ إذن: $10^3 \equiv -1[11]$</p>																																	

- 0.5 (ب) العدد N باقي قسمته على 11 هو 4 معناه: $b \equiv a + 5 [11]$ إذن: $(a; b) = (1; 6)$ أي $N = 1016$
- 0.5 (ج) العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 11: $N = \overline{844}^{11}$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

- 0.5 (1) حساب احتمال الحدثين A و B
- 0.5
$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$
- $$p(A) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

- 0.25 (2) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X : لدينا $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$
- | | | | |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| x | 1 | 2 | 3 |
| $p(X=x)$ | $\frac{11}{120}$ | $\frac{79}{120}$ | $\frac{30}{120}$ |
- 0.75 • $p(X=1) = p(A) = \frac{11}{120}$
- $p(X=3) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$
- $p(X=2) = \frac{79}{120}$
- 0.5 • حساب الأمل الرياضي:
- $$E(X) = \frac{11}{120} \times (1) + \frac{79}{120} \times (2) + \frac{30}{120} \times (3) = \frac{259}{120} = 2,16$$
- 0.5 • حساب التباين:
- $$V(X) = \sum_{i=1}^4 p_i(x_i)^2 - (E(X))^2 = \left(\frac{11}{120} \times (1)^2 + \frac{79}{120} \times (2)^2 + \frac{30}{120} \times (3)^2\right) - (2,16)^2 = 4,97 - 4,66$$
- $\approx 0,31$

- 0.25
-
- 0.75 • تبيين أن $p(B) = \frac{5}{12}$
- $$p(B) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$
- حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس
- V علما أنها بيضاء
- V هي الحدث سحب كرة من الكيس
- $$P_B(V) = \frac{p(B \cap V)}{P(B)} = \frac{1/3}{5/12} = \frac{4}{5}$$

التمرين الثالث: (6 نقاط)

- 0.5 I. لدينا f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا: $f'(x) = \frac{2ax}{2\sqrt{1+ax^2}} = \frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}$
- ولدينا من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $ax \geq 0$ و $\sqrt{1+ax^2} > 0$ ومنه $f'(x)$ موجبة على
- المجال $[0; +\infty[$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$
- 0.25

0.25

أ. لدينا: $u_0 = 0$ ومنه $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ اذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ونبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

لدينا: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right) \leq f(u_n) \leq f(0)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

ولدينا $f(0) = 1$ و $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right) = \sqrt{1+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ و $1 > 0$

0.75

ومنه $0 \leq f(u_n) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ وبالتالي $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

0.25

ب. لدينا (من أجل $n \neq 0$): $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+\alpha u_n^2} - u_n = u_n \left(\sqrt{\frac{1}{u_n^2} + \alpha} - 1 \right)$

ولدينا: $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\frac{1}{u_n^2} \geq 1-\alpha$ وبالتالي: $\sqrt{\frac{1}{u_n^2} + \alpha} - 1 \geq 0$ ولدينا $u_n \geq 0$

0.5

ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ اذن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، نستنتج أنها متقاربة

0.25

لدينا مما سبق $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\lim u_n = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

التمرين الرابع: (6 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + 2 - \ln x$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجال فإن الدالة متزايدة تماما على المجال
- بما أن الدالة سالبة على المجال فإن الدالة متناقصة تماما على المجال
- ومنه جدول التغيرات:

(2) الحساب: $g(1) = 0$ انطلاقا من جدول التغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بالعلاقة التالية: $f(x) = \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right)$

(c_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ لدينا:

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{2} \left(x + e + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = e$$

التفسير البياني: النقطة $\Omega(0; \frac{e}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (c_f)

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

وبما أن النقطة $\Omega(0; \frac{e}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (c_f) فإن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\frac{2}{x}x - \ln(x^2)}{x^2} \right) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

ت) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجالين فإن الدالة متزايدة تماما على المجالين
- ومنه جدول التغيرات:

3) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (c_f) : لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(|x|)}{x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (c_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ) . $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} \right) = -\frac{\ln(x^2)}{x}$

4) أ) لإثبات أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (c_f) يوازيان (Δ) يكفي حل المعادلة $f'(x) = -\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{e} \text{ أو } x = \frac{1}{e} \text{ ومنه } \ln x^2 = -2 \text{ ومنه } \frac{x^2 + 2 - \ln x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$(T'): y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e \text{ و } (T): y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e$$

ب) بين أن (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث

$$-0,5 < \beta < -0,4 \text{ و } 2 < \alpha < 2,1$$

أرسم كل من (Δ) ، (T) ، (T') والمنحنى (c_f)

الامتحان التجريبي لباكوريا 2022 في مادة الرياضيات

المدة : أربع ساعات و نصف

الشعبة : رياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول (05ن)

(1) أ) بيّن أن 193 عدد أولي .

ب) حلّ 206 إلى جداء عوامل أولية .

(2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $4x - 193y = 78$.

أ) جد الثنائية الطبيعية $(a; b)$ التي تحقق : $\begin{cases} PPCM(a; b) = 618 \\ PGCD(a; b) = 3 \end{cases}$ و $4a - 193b = 78$

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

(3) M و N عدنان طبيعيان يكتبان على الترتيب 12β و $5\beta 1\alpha$ في نظام التعداد ذو الأساس 7 و $M \equiv N[193]$

حيث α و β رقمان طبيعيان كل منهما أصغر من 7.

أ) تحقّق أن $44\alpha + 48\beta \equiv 78[193]$.

ب) بيّن أن $11\alpha + 12\beta = 116$.

ج) عيّن α و β ثم أكتب M و N في النظام العشري.

التمرين الثاني (04ن)

يمتلك لاعب نردين A و B متماثلان من حيث الشكل إلا أن النرد A مغشوش و فيه كل وجهين متقابلين منه يحملان نفس الرقم i حيث $i \in \{1; 2; 3\}$ (كل رقم من الأرقام الثلاثة مسجل على وجهين متقابلين)، أما النرد B ليس مغشوشا وفيه ثلاثة أوجه تحمل الرقم 1 و ثلاثة أوجه تحمل الرقم 2 . يرمي اللاعب أحد النردين و نرّمز بـ P_i لاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i في الحالتين (رمي النرد A أو رمي النرد B)

(1) يرمي اللاعب النرد A ، أحسب p_1 ، p_2 ، p_3 علما أنها تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$.

(2) أحسب p_1 ، p_2 في حالة رمي النرد B

(3) نرّمي النردين في آن واحد ، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ كقيم له مجموع رقمي الوجهين العلويين . عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{U_n+1}}$ و $U_0 = 2$

$$(1) \text{ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن: } U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n+1}}$$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$

(ج) بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

$$(2) \text{ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad 9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n),$$

$$\text{ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad 3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n),$$

$$\text{ج) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad 3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

(د) استنتج نهاية (U_n) . لَمَّا $n \rightarrow \infty$

التمرين الرابع (07ن)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير g على $]0; +\infty[$.

(2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$(1) \text{ بيّن أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

(2) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

(3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

$$(4) \text{ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]0; +\infty[\text{ : } f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

(ت) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(5) أنشئ المنحنى (C_f) .

$$(6) \text{ أ) باستعمال التكامل بالتجزئة جد العدد الحقيقي: } \int_{e^{-2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

(ب) أحسب مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = e^{-2}$ و $x = 1$.

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = xe^{\frac{x}{2}} - e^x + 1$

(1) بيّن انه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(e^x)$

(2) استنتج جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4.5نقط)

a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 . نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $[0; +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt{1+ax^2}$$

1. تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

$$2. (u_n) \text{ متتالية معرفة } \mathbb{N} \text{ على بـ : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(I) نفرض أن $0 < a < 1$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب) بين أن (u_n) متزايدة .

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . ثم عين نهايتها.

(II) نضع $a > 1$:

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ :

$$v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$.

ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (S_n) كالآتي :

$$S_0 = 0 \text{ و من أجل كل } n \geq 1 \text{ ، } S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$.

د) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{S_n}$. ثم أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثاني: (4.5نقط)

1. a و b عدنان طبيعيين مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a = \overline{201}$ و $b = \overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2. x ، y عدنان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x ; y)$ التالية :

$$ax - by = 3$$

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0 [3]$.

ب) إستنتج حلا خاصا $(x_0 ; y_0)$ حيث $0 \leq x_0 < 5$. ثم حل المعادلة (E) .

3. نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x ; y)$ حل للمعادلة (E) .

أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) بين ان $p \gcd(x, y) = p \gcd(y, 3)$.

ج) عين الثنائيات $(x ; y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\frac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

- (4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على \mathbb{N} : $u_0 = 2$ ، $v_0 = 5$
 $v_{n+1} = v_n + 9$ و $u_{n+1} = u_n + 19$
- عين كل الثنائيات $(p; q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق ، $u_p = v_q$ و $|q - p| \leq 20$.

التمرين الثالث: (4نقط)

- كيس فيه أربع كرات حمراء وكرتين سوداوين لا نفرق بينها عند اللمس.
العملية الأولى نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد .
نرمز ب ، إلى الحوادث ، A_0 "لأنحصل على أي كرة سوداء"
 A_1 "الحصول على كرة سوداء واحدة فقط"
 A_2 "الحصول على كرتين سوداوين"
أحسب كل من $p(A_0)$ ، $p(A_1)$ ، و $p(A_2)$.
2. بعد عملية السحب الأول ، يبقى في الكيس أربع كرات . نقوم بالسحب الثاني إذ نسحب كرتين في آن واحد أيضا.
نرمز إلى الحوادث : B_0 "لأنحصل على أي كرة سوداء في السحب الثاني"
 B_1 "الحصول على كرة سوداء واحدة فقط في السحب الثاني"
 B_2 "الحصول على كرتين سوداوين في السحب الثاني"
أ) أحسب كل من $p_{A_0}(B_0)$ ، $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$. ثم بين أن $p(B_0) = \frac{2}{5}$.
ب) أحسب كل $p(B_1)$ و $p(B_2)$.
ج) بإفتراض أننا على كرة سوداء في السحب الثاني . ما احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة في السحب الأول؟
3. C نعتبر الحادثة "الحصول على كرتين سوداوين ، بعد السحب الأول والإضرار إلى السحب الثاني" .
أحسب $p(C)$.

التمرين الرابع: (7نقط)

1. (I) لتكن الدالة u المعرفة على \mathbb{R} بـ : $u(x) = xe^x$
أدرس إتجاه تغير الدالة u ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x \geq -\frac{1}{e}$.
2. g دالة معرفة على $]-\infty; 0]$ بـ : $g(x) = 1 - (x^2 + x + 1)e^x$
أ- باستعمال إتجاه تغير الدالة g بين أن من أجل كل x من $]-\infty; 0]$ ، $g(x) \geq 0$.
(لا يطلب حساب نهاية g عند $-\infty$)

$$(II) \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يأتي:}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{xe^x+1} & x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 & x > 0 \end{cases}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1. أ) أدرس إستمرارية f عند 0 ؟

ب) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 . فسر النتيجة بيانيا .

2. أ) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
 ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ يقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.
 ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 0]$.
 3 أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty; 0]$ ، ثم على المجال $]0; +\infty[$.
 ب) يمكن ملاحظة أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]-\infty; 0]$.
 ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .
 4. I نقطة من المنحنى (C) فاصلتها -1 .
 أ) بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة I هي : $y = \frac{e}{e-1}(x+1)$.
 ب) أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) . (إستعن بالإجابة المنجزة في 1.)
 5. أنشئ (T) ، (Δ) و (C) .
 6 . n عدد طبيعي غير معدوم .
 نسمي $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمتين التي معادلاتها $y = 0$ و $x = 1$ و $x = n + 1$.
 أ) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
 ب) $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ و المجموع $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.
 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n = A(n)$.
 ب) أحسب بـ cm^2 المساحة $A(n)$ بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

الإجابة النموذجية لموضوع بكالوريا تجريبي 2022 في مادة الرياضيات / الشعبة : رياضيات

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
المجموع	مجزأة	
<u>التمرين الأول: (5 نقاط)</u>		
0.5	0.25	1) أ) 193 عددا أوليا لأن 193 لا يقبل القسمة على 2، 3، 5، 7، 11،
	0.25	13. $(\sqrt{193} \approx 13.89)$ ب) $206 = 2 \times 103$
2.25	0.25	2) أ)
	0.25	معناه $PGCD(a; b) = 3$ ، $a = 3a'$ ، $b = 3b'$ و $PGCD(a'; b') = 1$.
	0.25	$PPCM(a; b) = 618$: $618 \times 3 = 3a' \times 3b'$
	0.5	و منه $a' \times b' = 206$
	0.5	إذن $(a'; b') \in \{(1; 206), (206; 1), (2; 103), (103; 2)\}$
	0.25	بالتالي $(a; b) \in \{(3; 618), (618; 3), (6; 309), (309; 6)\}$
	0.25	و $4 \times 309 - 193 \times 6 = 78$
	0.5	إذن $(a; b) = (309; 6)$
	0.25	ب) حل المعادلة () : $(x; y) = (193k + 309; 4k + 6)$ حيث
	0.25	$k \in \mathbb{Z}$
2.25	0.25	1) $M = \overline{\alpha 12\beta} = 343\alpha + \beta + 63$
	0.25	$N = \overline{5\beta 1\alpha} = \alpha + 49\beta + 1722$
	0.25	أ) $N - M \equiv 0[193]$
	0.25	
	0.25	ب) $44\alpha + 48\beta = 193l + 78$ حيث $l \in \mathbb{Z}$
	0.25	مع $11\alpha + 12\beta = 193k + 309$ مع $0 \leq 11\alpha + 12\beta \leq 138$
	0.25	إذن $11\alpha + 12\beta = 116$.
	0.25	ج) $\alpha = 4$ و $\beta = 6$
	0.25	$M = 1441$ و $N = 2020$
	0.25	
<u>التمرين الثاني: (4 نقاط)</u>		

1.25	0.25*2	(1) p_1, p_2, p_3 تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$ مع و منه
	0.25*3	
0.75	0.25*3	(2) $p_2 = p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
	0.5	(3) قيم X هي: $\{2; 3; 4; 5\}$ قانون الاحتمال لـ X
	1	
2	0.5	

	2	3	4	5

التمرين الثالث: (4 نقاط)

2	0.25	(1) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n + 1}}$ ،
	0.25	(ب) $1 < U_0 < 3$
	0.5	نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < U_n < 3$ نجد
	0.25	و منه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < U_n < 3$
	0.5	(ج) $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(2 - \sqrt{U_n + 1})}{\sqrt{U_n + 1}}$ حيث من أجل كل عدد طبيعي $n :$
	0.25	$1 < U_n < 3$ نجد أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما
	0.75	- المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 3 نستنتج أنها متقاربة .
	0.75	(2) (أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$ ،
0.75	(ب) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$ ،	
	لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{3+U_{n+1}}(3 - U_n)$ ،	

0.75

1

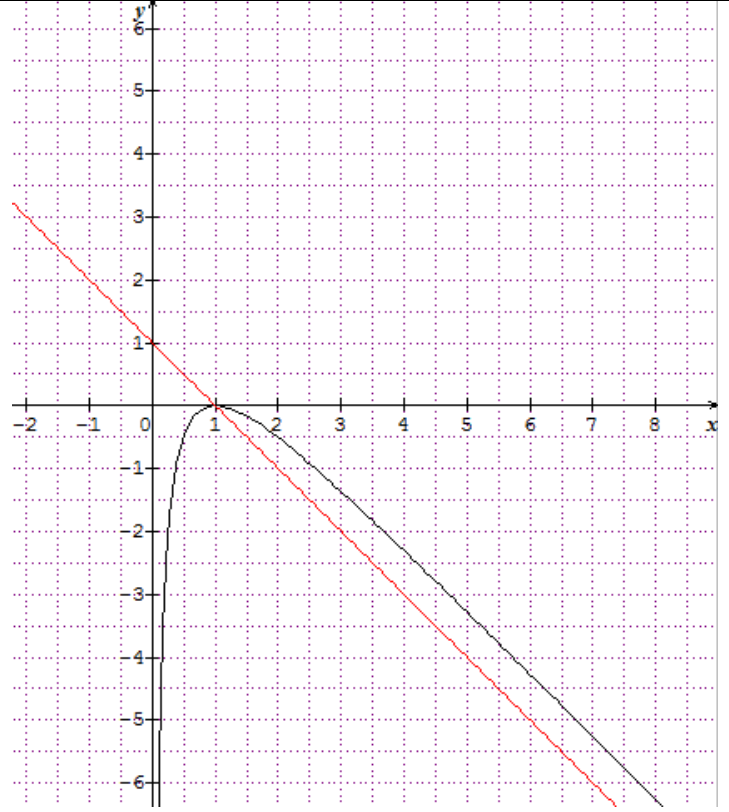
0.25

0.25

0.25

0.5

0.5



(5)

(أ) باستعمال التكامل بالتجزئة $\int_{e^{-2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}\ln x]_{e^{-2}}^1 - \int_{e^{-2}}^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 8e^{-1} - 4$

$$[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}]_{e^{-2}}^1 = 8e^{-1} - 4$$

(ب) مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما

$x = e^{-2}$ و $x = 1$ هي

$$\int_{e^{-2}}^1 [(-x + 1) - f(x)] dx = \int_{e^{-2}}^1 -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = (-8e^{-1} + 4)u.a$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$

(1) إثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(e^x)$

(2) استنتاج جدول تغيرات الدالة h

من أجل كل عدد حقيقي x : $h'(x) = e^x f'(e^x)$.

h متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
		<p>التمرين الأول</p> <p>.....0.5 : $f'(x) \geq 0$: $x \in [0; +\infty[$ ، من أجل كل $f'(x) = \frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}$ /1</p> <p>. تقبل طرق أخرى $[0; +\infty[$ متزايدة تماما على</p>
04.5		<p>$0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ ، n (أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي (I) /2</p> <p>.....0.5 (ب) متزايدة .</p> <p>.....0.5 : $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ فهي متقاربة . نهايتها $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ (ج) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ</p> <p>(II $a > 1$)</p> <p>.....0.5 1. (v_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول $v_0 = 1$</p> <p>.....0.5 2. $v_n = v_0 \cdot a^n = a^n$ ومنه $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$</p> <p>.....0.5 $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ ، $n \geq 1$ و من أجل كل $S_0 = 0$ (ج)</p> <p>.....0.5 $S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ ، $n \geq 1$ و من أجل كل $S_0 = 0$</p> <p>.....0.5 $S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ ، n ومنه من أجل كل عدد طبيعي</p> <p>.....0.5 $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$</p> <p>.....0.5 $S_n = u_1^2 - u_0^2 + u_2^2 - u_1^2 + u_3^2 - u_2^2 + \dots + u_n^2 - u_{n-1}^2$ (د)</p> <p>.....0.5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ و $u_n = \sqrt{S_n}$ وبالتالي $u_n^2 = S_n$ ومنه</p>
4.5		<p>التمرين الثاني:</p> <p>.....0.5 1. $a = 19$ و $b = 9$</p> <p>.....0.5 2. $19x - 9y = 3$ (أ) فإن $[3] \equiv 0$.</p> <p>.....0.25 $(x_0; y_0) = (3; 6)$ (ب) الحل الخاص</p> <p>.....0.5 عدد صحيح. مع k $(x; y) = (9k + 3; 19k + 6)$ حلول المعادلة</p> <p>.....0.5 3. (أ) $d 3$ ومنه $d \in \{1, 3\}$</p> <p>.....0.75 $p \gcd(y, 3) = d'$ و $p \gcd(x, y) = d$ (ب) نضع</p> <p>..... نجد $d = d'$.</p>

..... 0.5 $\gcd(x, y) = 3$ كسر قابلا للاختزال يكافئ x (ج) $\frac{y}{x}$
عدد صحيح p مع $(x; y) = (27p + 3; 57p + 6)$
4 $u_p = 2 + 19p$ و $v_q = 5 + 9q$
 $(p; q) = (9k + 3; 19k + 6)$ ومنه $19p - 9q = 3$ يكافئ $u_p = v_q$
ومنه $(p; q) \in \{(3, 6); (12, 25)\}$

01.

التمرين الثالث:

$$p(A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}, \quad p(A_1) = \frac{8}{15}, \quad p(A_2) = \frac{1}{15} \quad 0.75 \dots\dots$$

04

$$p_{A_0}(B_0) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, \quad p_{A_1}(B_0) = \frac{1}{2}, \quad p_{A_2}(B_0) = 1 \quad 0.75 \dots\dots$$

$$p(B_0) = \frac{2}{5} \quad 0.5 \dots\dots$$

$$p(B_1) = \frac{8}{15} \quad \text{و} \quad p(B_2) = \frac{1}{15} \quad 0.5 + 0.5 \dots\dots$$

$$p_{B_1}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap B_1)}{p(B_1)} = \frac{p(A_1)p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)} \quad \text{نجد} \quad p_{B_1}(A_1) = \frac{1}{2} \quad 0.5 \dots\dots$$

$$p(C) = p(A_0 \cap B_2) + p(A_1 \cap B_1) \quad \text{نجد} \quad p(C) = \frac{1}{3} \quad 0.5 \dots\dots$$

العلامة

مجزأة مجموع

عناصر الإجابة

التمرين الرابع:

$$I \left[-\infty; -\frac{1}{2} \right] \quad \text{و} \quad \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right] \quad 0.25 \dots\dots$$

$$xe^x \geq -\frac{1}{e} \quad 0.25 \dots\dots$$

$$g'(x) = -(x^2 + 3x + 2)e^x \quad 0.25 \dots\dots$$

$$g(x) \geq 0 \quad 0.25 \dots\dots$$

07

$$x \text{ ومنه من أجل كل } x \text{ من }]-\infty; 0] \quad 0.25 \dots\dots$$

.....0.5 مستمرة عند $f(1/1)$ (II)

من اليسار 0 قابلة للإشتقاق عند f (ب)

وعددها المشتق $f'_g(0)$ 0.25.....

معدوم

0.25..... $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ من اليمين لأن 0 غير قابلة للإشتقاق عند f

يقبل نصف مماس من اليمين يوازي حامل محور الترتيب ونصف مماس من اليسار يوازي حامل محور

0.25.....

الفواصل

(II) (أ.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 2 x0.25

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ 0.25.....

0.5..... $]-1; 0[$ على (Δ) ويقع أعلى $]-\infty; -1[$ على (Δ) يقع أسفل (C)

$A(-1, 0)$ ويقطعه في النقطة

(II) (أ.3) $]-\infty; 0[$ على $f'(x) = \frac{g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ ، متزايدة تماما على f 0.25

على $]: 0; +\infty[$: $f'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ 0.25

0.5..... (ب) جدول التغيرات

(II) (أ.4) $(T): y = \frac{e}{e-1}(x+1)$ 0.25.....

0.5..... (T) بالنسبة إلى المماس (C) (ب) وضعية المنحنى

0.75..... (II) (أ.5) إنشاء (T) ، (Δ) و (C)

$$S_n = \int_1^2 f(x) + \int_2^3 f(x) + \dots + \int_n^{n+1} f(x)$$

(II) (أ.6) $S_n = A(n)$ 0.25.....

(ب) $A(n) = \left[4n + 2(n+1)^2 \left[\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right] + \ln(4e) \right] cm^2$ 5.0.....

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = +\infty$ 0.25.....



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مقترحات بكالوريا 2021

مديرية التربية لولاية الجزائر شرق

دورة: ماي 2021

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:التمرين الأول: (05 نقاط)

- I . المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $Z_p = 10$ و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي Ω مركز الدائرة (Γ) . نعتبر النقط C, B, A التي لاحتاقتها على الترتيب $Z_C = 8 - 4i$ و $Z_B = 1 + 3i$ ، $Z_A = 5 + 5i$
- (1) بين أن النقط C, B, A تنتمي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).
- (2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $Z_D = 2 + 2i$. بين ان النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .
- II . من اجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{20}{z}$ علما أن \bar{z} يرمز إلى مرافق z .
- (1) بين أن النقط O, M و M' على استقامة واحدة.
- (2) لبتكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z .
- (أ) تحقق أن: $z + \bar{z} = 4$.
- (ب) عبر عن $z' + \bar{z}'$ بدلالة z و \bar{z} ، ثم استنتج أن : $5(z' + \bar{z}') = z' \bar{z}'$.
- (ج) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M' في الشكل .
- التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016} \equiv 1[7]$
- (2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$
- (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1$ و استنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.
- (ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.
- (ج) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ و استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.
- (د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .



(3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم , نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(-4, 5)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـ : $\left\{ \begin{array}{l} z_0 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{array} \right.$

(1) بيّن أن : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

(2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث $u_n \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

• بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أكتب u_n بدلالة n و θ .

(3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = z_n - \bar{z}_n$

(أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟

(ب) بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin \theta$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) دالة معرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) (وحدة الطول 1 cm).

(1) (أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

(ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(2) اثبت أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$

(ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

(ج) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d) .

(4) ارسم (d) , (T) و (C_f) .

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

(6) (أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تتعدم عند $x = -1$.

(ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$.

الموضوع الثاني:التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .
 ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2019^{6n+4}$ على 7 .
- (2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $(E) : 343x - 648y = 76$
 أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .
 ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .
- (3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) .
 أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$.
- (4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1 \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
 جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (1) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي:
 أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
 ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.
 أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .
 ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحة حيث: $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يسمح \mathbb{R} .
 (3) أ) أكتب على الشكل الأسّي العدد: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.
 ب) استنتج أن صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .
 ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .
 د) عين اللاحة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة \mathbb{N}^* بـ :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

- (1) أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ثم عين أساس المتتالية q .
- (2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$
- (4) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .
ب) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 .

ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n' = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n]$

- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0 [5]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$
- (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $1cm$
- (1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .
ب) أحسب $f_n'(x)$ و ادرس إشارتها .
ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .
- (2) بيّن أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .
- (3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .
ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .
- II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$
- (1) أكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$
- (2) أ) بيّن أن المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة .
ب) إستنتج أن المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و $0 \leq x \leq 1$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$

ب) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

(4) أ) إعتادا على السؤال (I/II) بيّن أن : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$

ب) إستنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

ج) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

الموض وع الأول

التنقيط	الأعداد المركبة	تصحيح التمرين الأول (05 نقاط)
0.75		(I) بما أن $\Omega A = 5i = 5$ و $\Omega B = -4 + 3i = 5$ و $\Omega C = 3 - 4i = 5$ إذن النقط A, B, C تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات القطر $[OP]$.
0.25		* إنشاء الشكل : تمثيل النقط : Ω, A, B, C و الدائرة (Γ)
0.75		(2-) لدينا من جهة $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{BC} = -7\overrightarrow{DB}$ و منه $D \in (BC)$ و من جهة ثانية : $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ أي $(OD) \perp (BC)$ نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)
0.25		(II) 1- نفرض أن $M(x, y)$ نعلم أن $\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = \arg(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ علما أن $Z' = \frac{20}{Z}$
0.75		و بالتالي : $\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = \arg\left(\frac{20}{Z\bar{Z}}\right)$ حيث : $Z\bar{Z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}} \in \mathbb{R}_*^+$ إذن $\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : M', M, O على استقامة واحدة
0.25		(2-) أ) بما أن $M \in (\Delta)$ فإن $Z = 2 + iy$ و منه $\bar{Z} = 2 - iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$
0.5		ب) لدينا : $Z' + \bar{Z}' = \frac{20}{Z} + \frac{20}{\bar{Z}} = \frac{20Z + 20\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{20(Z + \bar{Z})}{Z\bar{Z}} = \frac{80}{Z\bar{Z}}$
0.5		* حسب الجواب السابق : $5(Z' + \bar{Z}') = 5\left(\frac{80}{Z\bar{Z}}\right) = \frac{400}{Z\bar{Z}} = \frac{20}{Z} \times \frac{20}{\bar{Z}}$ إذن $5(Z' + \bar{Z}') = Z' \times \bar{Z}'$
01		ج) من جهة حسب الجواب (I - II) النقط M, O, M' في استقامة و منه $M' \in (OM)$ من جهة ثانية : $\Omega M' = Z' - 5 $ علما أن $Z \times \bar{Z} = Z ^2$ و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z' - 5)(\overline{Z' - 5})$ أي $\Omega M'^2 = Z'\bar{Z}' - 5(Z' + \bar{Z}') + 25$ و بما أن $Z' + \bar{Z}' = 4$ و $Z' \times \bar{Z}' = 5(Z' + \bar{Z}')$ نحصل على : $\Omega M'^2 = 25$ أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$ و بالتالي M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .

0.25	$5^6 = 15625$ $5^6 \equiv 1 [7]$ ندرس بواقفي قسمة 5^n على 7
0.25	$5^0 \equiv 1[7]$, $5^1 \equiv 5[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$ $5^3 \equiv 6[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$ $5^6 \equiv 1[7]$ دورية و دورها $k = 6n$
0.25	$5^6 \equiv 1[7]$ $5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$ $2016 = 6 \times 336 = 6n$
0.25	$S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$ -2 (أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1} - 1$ لذلك نحسب $S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \dots 5^n$ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$
0.25	$S_n = 1 \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right)$
0.25	و منه $4S_n = 5^{n+1} - 1$
0.25	$4S_n = 5^{n+1} - 1$ لدينا نكتب على الشكل $1 = 5 \times 5^n - 4S_n$
0.25	يوجد $(-4, 5)$ بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ و منه $S_n \equiv 5^n$, أوليان فيما بينهما
0.25	ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a [7]$ فإن $S_n \equiv 2a [7]$ لدينا $4S_n \equiv a [7]$ نضرب في 2
0.25	$8S_n \equiv 2a [7]$ $8 \equiv 1 [7]$ $S_n \equiv 2a [7]$ و منه
0.25	العكس : بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a [7]$ فإن $4S_n \equiv a [7]$ لدينا $S_n \equiv 2a [7]$ نضرب في العدد 4 $4S_n \equiv 8a [7]$
0.25	$8a \equiv a [7]$ $4S_n \equiv a [7]$

0.25	<p>(ج) بين أن : $4 S_{2015} \equiv 0 [7]$ باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1 [7]$ ومنه $4 S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1 [7]$ $5^{2016} - 1 \equiv 0 [7]$ $4 S_{2015} \equiv 0 [7]$</p> <p>استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 لدينا حسب ما سبق:</p>
0.25	<p>فان $4 S_{2015} \equiv 0 [7]$ $S_{2015} \equiv 2 \times 0 [7]$ ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0</p>
0.5	<p>(د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n معناه: $S_n \equiv 0 [7]$</p> <p>$5^{n+1} - 1 \equiv 0 [7]$ $5^{n+1} \equiv 1 [7]$ $5^{n+1} \equiv 5^0 [7]$ $n + 1 = 0, n = -1$, مرفوضة وهو المطلوب , $n + 1 = 6, n = 5$</p>
01	<p>$S_n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ -3 حلول المعادلة (E) هي : $(x, y) = (KS_n + 5, -K \times 5^n - 4), K \in \mathbb{Z}$</p>
التنقيط	<p>الأعداد المركبة + المتتاليات (04 نقاط) تصحيح التمرين الثالث</p>
01	<p>$e^{i\theta} + 1 = e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2})} [e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})}] = 2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i(\frac{\theta}{2})}$ -1</p> <p>-2 نضع $z_n = ae^{ib}$ حيث a عدد حقيقي و $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ومنه $u_n = \arg(z_n) = b$ ومن جهة اخرى لدينا</p>
0.75	<p>$u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n + z_n) = \arg(a(e^{ib} + 1)) = \arg(2a \cos(\frac{b}{2}) e^{i\frac{b}{2}}) = \frac{b}{2} = \frac{u_n}{2}$ اساسها $\frac{1}{2}$</p>
0.25	<p>$u_n = \theta \times (\frac{1}{2})^n$ -</p>
0.5	<p>-3 $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}} = z_n + z_n - (\overline{z_n} + z_n) = z_n - \overline{z_n} = v_n$</p>

0.5

- نستنتج ان v_n متتالية ثابتة وان $v_n = v_0 = z_0 - \bar{z}_0 = 2i \sin(\theta)$ (ب) لدينا مما سبق $v_n = z_n - \bar{z}_n = 2i \sin(\theta)$ لكن $v_n = |z_n| e^{i\theta \times (\frac{1}{2})^n}$ وبالتالي $z_n = |z_n| e^{i\theta \times (\frac{1}{2})^n}$ $|z_n| (\sin(\frac{\theta}{2^n})) = \sin(\theta)$ اي $z_n - \bar{z}_n = |z_n| (2i \times \sin(\theta \times (\frac{1}{2})^n)) = 2i \times \sin(\theta)$

01

حل التمرين الرابع (07 نقاط)

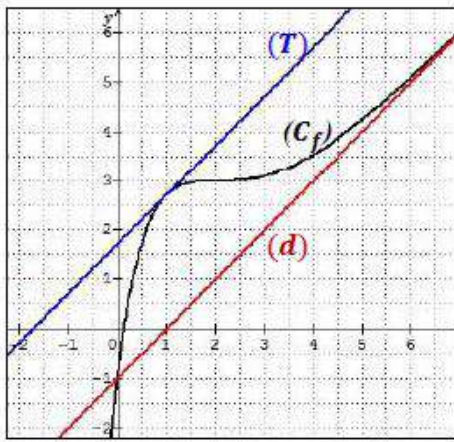
0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2, 3)$ (ج) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d) هي:

$$y = x - 1 + e$$

(5) التمثيل البياني

0.5



0.25

0.25

(5) المناقشة البيانية: $f(x) = x + m$ $m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا $m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم $-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما $m = e - 1$ حلا واحدا موجبا $m = e - 1$ ليس لها حلول

(6) باستخدام المكاملة بالتجزئة نضع:

$$V'(x) = e^{2-x} \text{ و } U(x) = x$$

$$H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$$

(ب) حساب A:

$$A = \int_0^2 (f(x) - y) dx$$

$$A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 x e^{2-x} dx$$

$$A = [H(x)]_0^2$$

$$A = H(2) - H(0)$$

$$A = (e^2 - 3) \text{ cm}^2$$

0.5

0.25

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x) = e^{x-2} - 1$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		↘ 0 ↗	

0.25

(2) اشارة: $g(x) \geq 0$

II

(1) النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

(ج) وضعية C_f بالنسبة الى (d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		-	+
الوضعية		أسفل	أعلى
		/ \	
		يقطع	

0.5

(2) حساب المشتقة: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة

0.25

تماما على R

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.5

(3) ا) معناه نحل المعادلة: $f(x) = 0$

باستعمال ميرهنة القيم المتوسطة.

0.5

(ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x) = 0$

الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة	محاور														
كاملة	مجزأة		الموضوع														
04 ن	0.5 ن	<p>(1) أ) بواقي قسمة 3^n على 7 .</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$n =$</td> <td style="padding: 5px;">$6k$</td> <td style="padding: 5px;">$6k+1$</td> <td style="padding: 5px;">$6k+2$</td> <td style="padding: 5px;">$6k+3$</td> <td style="padding: 5px;">$6k+4$</td> <td style="padding: 5px;">$6k+5$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$3^n \equiv$</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> </tr> </table> <p>ب) $2019 \equiv 3[7]$ ومنه $2019^{6n+4} \equiv 4[7]$</p> <p>$2017 \equiv 1[7]$ ومنه $2017^{4n+2} \equiv 1[7]$</p> <p>إذن $2 \times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2} \equiv 2[7]$</p>	$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	التمرين الأول
$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$											
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5											
	0.5 ن	<p>(2) أ) $PGCD(343; 648) = 1$ و 1 يقسم 76 ومنه المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2.</p> <p>ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E).</p> <p>$(x; y) = (648k + 4; 343k + 2)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>(3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).</p>															
	0.25 ن	<p>أ) d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $343x - 648y$ أي d يقسم 76 ومنه $d \in \{1; 2; 4; 19; 38; 76\}$.</p> <p>ب) $d = 76$ معناه $\begin{cases} 648k + 4 \equiv 0[76] \\ 343k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 40k + 4 \equiv 0[76] \\ 39k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$</p>															
	0.75 ن	<p>و منه $k \equiv 74[76]$ أي $k \equiv 76\alpha + 74$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$.</p> <p>ومنه $(x; y) = (49248\alpha + 47956; 26068\alpha + 25384)$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$.</p>															
	0.5 ن	<p>(4) $\begin{cases} \lambda = 344\beta + 7\alpha + 49 \\ \lambda = 655\alpha + \beta + 125 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \lambda = \beta \times 7^3 + 7^2 + \alpha \times 7 + \beta \\ \lambda = \alpha \times 5^4 + 5^3 + \alpha \times 5^2 + \alpha \times 5 + \beta \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$</p>															
	0.75 ن	<p>أي $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ ومنه $\begin{cases} 343\beta - 648\alpha = 76 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$</p>															
	0.25 ن	<p>كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6: $\lambda = 1439 = \overline{01355}_6$.</p>															
05 ن	0.25 ن	<p>(1) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$</p>	التمرين الثاني														
	0.5 ن	<p>أ) $P(-2) = 0$</p>															

$$. P(z) = (z+2)(z^2 - \sqrt{3}z + 3)$$

$$. P(z) = 0 \text{ تكافئ } (z+2=0) \text{ أو } (z^2 - \sqrt{3}z + 3=0)$$

$$. z+2=0 \text{ يكافئ } z=-2$$

$$z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0$$

$$. z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ و } z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \Delta = -9 = (3i)^2$$

0.5 ن

$$S = \left\{ -2; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right\} \text{ مجموعة الحلول:}$$

$$. z_C = -2 \text{ و } z_B = \overline{z_A}, z_A = 1 + \sqrt{3}i \text{ (2)}$$

0.75 ن

(أ) كتابة كل من الأعداد z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي:

$$. z_C = 2e^{\pi i} \text{ و } z_B = 2e^{-\frac{\pi}{3}}, z_A = 2e^{\frac{\pi}{3}}$$

0.25 ن

الاستنتاج: لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ أي $OA = OB = OC = 2$ ومنه النقط A, B

و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

0.5 ن

$$\text{(ب) معناه } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R} \text{ معناه } e^{2in\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{R} \text{ ومنه } 2n\frac{\pi}{3} = k\pi \text{ ومنه } 2n = 3k \text{ ونجد}$$

$$. k' \in \mathbb{N} \text{ حيث } n = 3k'$$

$$\text{(ج) معناه } \bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ ومنه } z = ke^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ومنه } \arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

0.5 ن

$$\text{و } (\bar{u}; \overline{OM}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ومنه } (\Delta) \text{ هو نصف المستقيم } [OE] \text{ باستثناء النقطة } O$$

$$. z_E = -1 + i\sqrt{3} \text{ حيث}$$

$$\text{(3) كتابة على الشكل الأسّي العدد: } L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$$

0.5 ن

$$L = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

0.25 ن

(ب) لدينا $z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C)$ ومنه A صورة B بالدوران الذي

مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$

0.5 ن

$$\text{(ج) طبيعة المثلث } ABC \text{ : لدينا } \begin{cases} CB = CA \\ (\overline{CB}; \overline{CA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ ومنه متقايس الأضلاع}$$

0.5 ن

(د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overline{AD} = \overline{BC}$ أي $z_D - z_A = z_C - z_B$

$$\text{ومنه } z_D = z_C - z_B + z_A \text{ أي } z_D = -2 + 2i\sqrt{3}$$

04.5 نقطة	التمرين الثالث :										
	<p>لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة \mathbb{N}^* بـ :</p> $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$										
	<p>(1) حساب u_2، u_1 و u_3 :</p> <p>لدينا : $u_1 \times u_3 = u_2^2$ لان u_2 هو الوسط الهندسي للحددين u_1 و u_3. ومنه : $u_2^2 = 256$ يكافئ $u_2 = 16$ أو $u_2 = -16$ وبالتالي $u_2 = 16$ (لان حدود المتتالية موجبة)</p>										
3×0.25	<p>وبالتالي لدينا :</p> $\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_1 + 32 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$ <p>إذن u_1 و u_3 هما حلتي للمعادلة $x^2 - 68x + 256 = 0$ حساب المميز $\Delta = (-68)^2 - 4 \times 256 = 3600$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1 = \frac{68 - 60}{2} = 4$ و $x_2 = \frac{68 + 60}{2} = 64$ بما ان المتتالية متزايدة فان $u_1 = 4$ و $u_3 = 64$</p>										
0.25	<p>حساب الأساس q :</p> $q = \frac{16}{4} = 4$										
0.25	<p>(2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :</p> <p>لدينا : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$ أي $u_n = 4^n$</p>										
	<p>(3) حساب كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ بدلالة n :</p> <p>لدينا : $S_n = u_1 \times \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = 4 \times \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) = -\frac{4}{3}(1 - 4^n) = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$</p>										
0.5	$S_n = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$										
0.5	<p>حساب الجداء :</p> $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = 4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n = 4^{1+2+\dots+n}$ <p>أي $P_n = 4^{\frac{n(n+1)}{2}}$</p>										
2×0.5	<p>(4) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n :</p> <p>لدينا :</p> $7^4 \equiv 1[5] \quad 7^3 \equiv 3[5] \quad 7^2 \equiv 4[5] \quad 7^1 \equiv 2[5] \quad 7^0 \equiv 1[5]$ <p>إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P = 4$ من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :</p> <table border="1" data-bbox="320 1944 1414 2069"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>$4k$</th> <th>$4k + 1$</th> <th>$4k + 2$</th> <th>$4k + 3$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>باقي قسمة العدد 7^n على 5</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	n	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3
n	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$							
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3							

0.5	<p>(ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 : لدينا : $2016 \equiv 1[5]$ ومنه $2016^{1436} \equiv 1^{1436}[5]$ أي $2016^{1436} \equiv 1[5]$ و $49^{2n+1} \equiv (7^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $49^{2n+1} \equiv 7^{4n+2}[5]$ أي $49^{2n+1} \equiv 4[5]$ وكذلك لدينا : $5n - 3 \equiv -3[5]$ ومنه $5n - 3 \equiv 2[5]$ وبالتالي : $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3 \equiv 1 + 4 + 2[5]$ أي $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3 \equiv 2[5]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 هو 2</p>
0.5	<p>(ج) حساب S_n' بدلالة n : $S_n' = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n] = \frac{1}{\ln 2} \ln(4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n)$ أي $S_n' = \frac{1}{\ln 2} \times \ln P_n = \frac{1}{\ln 2} \times \ln 4^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\ln 2} \times \ln(4)^{\frac{1}{2} \times (n^2+n)}$ ومنه : $S_n' = \frac{1}{\ln 2} \times (n^2 + n) \times \ln 2 = n^2 + n$ أي $S_n' = n^2 + n$</p>
0.25	<p>تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$ يعني $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$ ومنه $n + 5n^2 + 1 \equiv 0[5]$ أي $n \equiv -1[5]$ ومنه $n \equiv 4[5]$ وبالتالي $n \equiv 5\alpha + 4, (\alpha \in \mathbb{N})$</p>

التنقيط	الدوال	تصحيح التمرين الرابع (07 نقاط)									
2x0.25		-1 (1-1) حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = +\infty$									
0.5		(ب) حساب المشتقة $f'_n(x) = \frac{-e^{-x}(1+x)^n - e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$									
0.5		لدينا المقدار $1+x+n > 0$ لان $x > -1$ ومنه المشتقة سالبة تماما (ج)									
0.5		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'_n(x)$</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$f_n(x)$</td> <td></td> <td>\searrow</td> </tr> </table>	x	-1	$+\infty$	$f'_n(x)$		-	$f_n(x)$		\searrow
x	-1	$+\infty$									
$f'_n(x)$		-									
$f_n(x)$		\searrow									
0.5		-2 بما ان جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة نضع $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ وبالتالي $A(0,1)$ هي النقطة هي $x_0 = 0$ ومنه $x \neq -1$ لكن $\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)} = \frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2} \Leftrightarrow (1+x_0)(x_0) = 0$									

01

(ا) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (c_1) و (c_2) :

$$f_1(x) - f_2(x) =$$

$$\frac{e^{-x}}{(1+x)} = \frac{e^{-x}}{(1+x)^2} \Leftrightarrow e^{-x} \left[\frac{x}{(1+x)^2} \right]$$

ومنه من اجل $x < 0$ فوق (c_2) فوق (c_1) ومن اجل $x = 0$ منطبقان (c_1) و (c_2) ومن اجل $x > 0$ فوق (c_1) فوق (c_2)

(ب)

0.5



II-

-1

لدينا مما سبق

$$f'_n(x) = \frac{-e^{-x}(1+x)^n - e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

0.5

$$f'_n(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+x)^n} - \frac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}} = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x))$$

$$f'_n(x) = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x))$$

-2

0.25

(ا) لدينا $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 [f_{n+1}(x) - f_n(x)] dx < 0$ لان $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ من اجل $x > 0$

0.25

وبالتالي تكامل دالة سالبة هو عدد سالب ومنه I_n متناقصة(ب) إستنتاج ان I_n متقاربة

-3

0.25

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n} \quad (ا)$$

(ب) مما سبق

0.25

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1+x)^n} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{1-n} [(1+x)^{1-n}]_0^1 \leq I_n \leq \frac{1}{1-n} [(1+x)^{1-n}]_0^1$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n-1} [1 - \frac{1}{2^{n-1}}] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} [1 - \frac{1}{2^{n-1}}]$$

0.5

(ج) باستعمال الحصر نجد النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

-4

(د)

0.5

$$f'_n(x) = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x)) \Leftrightarrow \int_0^1 f'_n(x) dx = - \int_0^1 [f_n(x) + n f_{n+1}(x)] dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{2^n} - 1 = -(I_n + n I_{n+1}) \Leftrightarrow I_n + n I_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$$

0.25

(هـ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = 1$

0.25

(ج) حساب مساحة الحيز

امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: رياضيات

المدة : 04 ساعات و نصف

اختبار مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

- نعتبر v_1 و q عدنان طبيعيين ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1 .
I عين q و v_1 علما أن q و v_1 أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.
II نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

- 1 أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441 .
2 نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.
- أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

- 3 نعتبر α و β عدنان طبيعيين حيث: $v_\alpha < v_\beta$.
أ) حل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

- ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α, β) بحيث يكون:
$$\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$$

- ج) نسجل قيم الحدود الستة الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

- ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- 1 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019 \cdot 2020}$ على 7 .
2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $3[7] \equiv 4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1)$.
3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.
ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 .
4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$.

أ) عين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x, y) .

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E) .

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لـ d حيث: $d = PGCD(x, y)$.

ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقطتين M و M' التين لاحقاها z و z'

على الترتيب. نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ حيث x, y, x', y' أعداد حقيقية.

نذكر أن \bar{z} هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طولية العدد المركب z .

(1) بين أن الشعاعين \overline{OM} و $\overline{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Re}(z'\bar{z}) = 0$.

(2) بين أن النقط O, M و M' في استقامة إذا وفقط إذا كان $\operatorname{IM}(z'\bar{z}) = 0$.

(3) لتكن N النقطة ذات اللاحة $z^2 - 1$. عين مجموعة النقط M ذات اللاحة z التي يكون من أجلها الشعاعين \overline{OM} و \overline{ON} متعامدين.

(4) لتكن P النقطة ذات اللاحة $\frac{1}{z^2} - 1$ حيث $z \neq 0$.

(أ) بين أن $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(z^2 - 1) = -z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$.

(ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحة z التي تكون من أجلها النقط O, N و P في استقامة.

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

(I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R}^* تكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(3) (أ) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا.

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

(4) (أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوزيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

(ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f) .

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1} \right] + 2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h) . (الإثبات غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $F(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(\ln x^2)^2 + 2\ln|x| \right]$ هي دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}^* .

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تتعدم من أجل $x = 1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$. أحسب التكامل: $I = \int_1^\lambda f(x) dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

انتهى الموضوع الأول

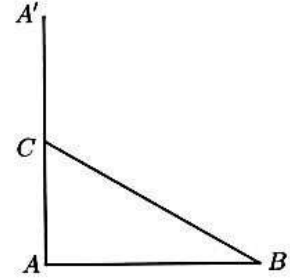
الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .
- نسحب من الكيس كرتان على التوالي دون إرجاع .
- (1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب .
- (2) أحسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون .
- (3) أحسب احتمال سحب كرتان تحملان رقمان زوجيان .
- (4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .
- (أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
- (ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



- A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C . ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B .
- (1) عين نسبة وزاوية التشابه S .
- (2) أنشئ D صورة A بواسطة S .
- (3) ليكن Ω مركز التشابه المباشر S .
- (أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان.
- (ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان.
- (ج) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω .
- II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث لاحقة B هي 1.
- (1) عين لاحقة كل من C و A' .
- (2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' = (1+i\sqrt{3})z + \frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω .
- (3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

متتاليتا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على \mathbb{N} كما يلي $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

(1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n = 2^{n+1} + 1$.

(أ) احسب $\text{pgcd}(x_2; x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8; x_9)$

(ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n .

(3) (أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n - y_n = 5$.

(ب) أكتب y_n بدلالة n .

(ج) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

(4) نضع $d_n = \text{pgcd}(x_n; y_n)$.

(أ) ما هي القيم الممكنة لـ d_n .

(ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = e^x(x-1)+1$:

(1) أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

(2) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

II. لتكن الدالة العددية I المعرفة على \mathbb{R} كما يلي $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$

(1) أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x) = e^x - (1+x)$

(2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0; x]$ أن: $1 \leq e^t \leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$.

(3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x; 0]$ أن: $e^x \leq e^t \leq 1$ ، ثم استنتج أن: $\frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

(4) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

III. لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

(1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

(2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.

(3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

(4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) أرسم (T) و (C_f) .

التصحيح النموذجي للبيكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

العلامة		محاور الموضوع
كاملة	مجزأة	
04.5 ن		<p>I) تعيين العددين v_1 و q :</p> <p>لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_2 = v_1 \cdot q$ و $v_4 = v_1 \cdot q^3$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1 \cdot q^3 - v_1 \cdot q$ أي:</p> $2v_1^2 = v_1 \cdot q(q^2 - 1)$ <p>ومنه: $2v_1 = q(q^2 - 1)$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2</p> <p>(حسب مبرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1, 2\}$.</p> <p>- في حالة $q = 1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض).</p> <p>- في حالة $q = 2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$.</p> <p>إذن نتحصل على: $q = 2$ و $v_1 = 3$.</p> <p>II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.</p> <p>1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) :</p> <p>نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $v_n = 3 \times 2^{n-1}$.</p> <p>(* تعيين كل الحدود المحصورة بين 1441 و 2020 :</p> <p>لدينا: $1441 \leq 3 \times 2^{n-1} \leq 2020$ أي: $481 \leq 2^{n-1} \leq 673$ أي نجد: $\ln 481 \leq \ln 2^{n-1} \leq \ln 673$</p> <p>أي: $\ln 481 \leq (n-1) \ln 2 \leq \ln 673$ ومنه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \leq n-1 \leq \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8,9 \leq n-1 \leq 9,39$</p> <p>ومنه: $9,9 \leq n \leq 10,39$ ، إذن: $n = 10$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو: $v_{10} = 1536$</p> <p>2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$</p> <p>المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا.</p> <p>أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9 \times \frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $S_n = 3(4^n - 1)$</p> <p>(* لنحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} [3(4^n - 1)] = +\infty$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$</p>
	0.75 ن	
	0.25 ن	
	0.75 ن	
	01 ن	

ن 0.25

(* لنحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

ن 0.25

(3) لدينا: α و β عدنان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

ن 0.25

(أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنحصل على: $2304 = 2^8 \times 3^2$.
(ب) تعيين كل الثنائيات (α, β) :

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3 \times 2^{\alpha-1})(3 \times 2^{\beta-1}) = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$ ومنه:

$$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$$

أي: $\begin{cases} \alpha + \beta = 10 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha' + 2\beta' = 10$ أي نجد:

$$\alpha' + \beta' = 5$$

ن 0.5

لكن لدينا: $\alpha < \beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha' < \beta'$.

أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha', \beta') = (1, 4)$ و $(\alpha', \beta') = (2, 3)$.

إذن الثنائيات (α, β) المطلوبة هي: $(\alpha, \beta) = (2, 8)$ و $(\alpha, \beta) = (4, 6)$.

(4) الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3، 6، 12، 24، 48، 96.

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3 .

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب

البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0.

ن 0.5

(1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

نجد: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و

$$5^6 \equiv 1[7]$$

و نلخصها في الجدول التالي:

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

ن 0.5

ن 0.25

(ب) نعم أن: $1440 \equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}} [7]$.

(* لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6: $2019 \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} \equiv 3^{2020} [6]$

لكن نعم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3^n \equiv 3[6]$ و منه: $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي:

$$2019^{2020} = 6k + 3$$

إذن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3} [7]$ أي: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 6[7]$.

ن 0.25

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6.

(2) لدينا: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حداً ومنه:

$$5^{n-1} \equiv 4[7] \text{ أي: } 5^{n-1} - 1 \equiv 3[7] \text{ أي: } 4 \left(1 \times \frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right) \equiv 3[7]$$

ومنه يكون: $n-1 = 6k+2$ إذن: $n = 6k+3$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

$$(3) \text{ أ) لنبين أن: } 2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$$

(* لنحسب $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$:

$$2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2 \times \frac{(n+1)!}{(n+1-2)! \times 2!} + \frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$

$$= \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$\text{و منه: } 2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = (n+1)n + (n+3)(n+2) = n^2 + n + n^2 + 2n + 3n + 6$$

إذن: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$ هو المطلوب.

(ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 \equiv 0[7]$.

لدينا: $2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$ أي: $2(n^2 + 3n + 3) \equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$$n^2 + 3n + 3 \equiv 0[7] \text{ أي: } n^2 + 3n \equiv -3[7] \text{ و منه: } n^2 + 3n \equiv 4[7]$$

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7):

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n \equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^2 + 3n \equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

وبالتالي يكون: $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv 3[7]$ أي: $n = 7k+1$ أو $n = 7k+3$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

$$(4) \text{ لدينا: } C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$$

أ) لنعين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$:

$$\text{نعلم أن: } C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \times 2!} = 45 \text{ و } A_{12}^2 = \frac{12!}{10!} = 132 \text{ و منه } PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2) = 3$$

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x - 132y = 15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلاً في \mathbb{Z}^2 لأن: $PGCD(45, 132) = 3$ و 3 يقسم 15.

(ب) لدينا: $45x - 132y = 15$ أي تصبح: $15x - 44y = 5$ أي: $44y = 15x - 5$ أي:

$$44y = 5(3x - 1)$$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y = 5k$ أي: $y \equiv 0[5]$ هو المطلوب.

(* لنحل المعادلة (E):

نبحث أولاً عن الحل الخاص أي: $y = 5$ و منه: $44 \times 5 = 5(3x - 1)$ أي: $44 = 3x - 1$ إذن:

0.5 ن

0.5 ن

0.75 ن

0.25 ن

0.25 ن

$x=15$. ومنه: $(x_0, y_0) = (5, 15)$.

لدينا: $\begin{cases} 15x - 44y = 5 \\ 15(15) - 44(5) = 5 \end{cases}$ بالطرح نجد: $15(x-15) = 44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44

وحسب مبرهنة غوص نستنتج أن: $\begin{cases} x-15 = 44k \\ y-5 = 15k \end{cases}$ إذن: $x = 44k + 15$ و $y = 15k + 5$.

ومنه: $(x, y) = (44k + 15, 15k + 5)$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

ن 0.25

(5) أ) لدينا الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E) أي يكون: $15x - 44y = 5$ و بما أن:

ن 0.25

$PGCD(x, y) = d$ فإن: d يقسم $(15x - 44y)$ و d يقسم 5 ، إذن قيم d هي: 1 ، 5 .

ب) لندرس حالة $d = 5$ أي: $x \equiv 0[5]$ أي: $44k + 15 \equiv 0[5]$ أي: $4k \equiv 0[5]$ ومنه:

$$k \equiv 0[5]$$

أي يكون: $k = 5\alpha$ مع $(\alpha \in \mathbb{Z})$.

ن 0.25

إذن: $d = 5$ لما $k = 5\alpha$ و بالتالي يكون: $d = 1$ لما $k \neq 5\alpha$

ومنه: $(x, y) = (44k + 15, 15k + 5)$ مع $(k \neq 5\alpha)$.

ن 04

التمرين
الثالث

(1) لدينا: $\overline{OM}(x; y)$ و $\overline{OM}'(x'; y')$ متعامدين معناه $xx' + yy' = 0$.

ن 0.75

$$z' \bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$$

ومنه: $xx' + yy' = 0$ تكافئ $\text{Re}(z' \bar{z}) = 0$.

ن 0.75

(2) النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overline{OM}(x; y)$ و $\overline{OM}'(x'; y')$ مرتبطان

خطيا أي $xy' + yx' = 0$ وهذا يكافئ $IM(z' \bar{z}) = 0$.

(3) لدينا: $(z^2 - 1)\bar{z} = |z|z - \bar{z} = (x^2 + y^2)(x + iy) - (x - iy)$

$$= x(x^2 + y^2 - 1) + iy(x^2 + y^2 + 1)$$

\overline{OM} و \overline{ON} متعامدين يكافئ $\text{Re}((z^2 - 1)\bar{z}) = 0$ أي $x(x^2 + y^2 - 1) = 0$ ومنه $x = 0$ أو

ن 01

$$x^2 + y^2 = 1$$

مجموعة النقط M هي اتحاد محور الترتيب مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

ن 0.75

(4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $1 - \frac{1}{z^2}$ حيث $z \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(z^2 - 1) = \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(-z^2) \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = -z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2 \quad (أ)$$

(ب) O ، N و P في استقامية تكافئ $IM\left(\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(z^2 - 1)\right) = 0$ أي

ن 0.75

$IM\left(-z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2\right) = 0$ أي $IM(-z^2) = 0$ ومنه $2xy = 0$ أي $x = 0$ أو $y = 0$.

التمرين
الرابع

ومجموعة النقط M هي اتحاد محور الفواصل مع محور الترتيب باستثناء المبدأ O .

ن 07.5

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$.

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

(* الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}^* و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$.
نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x(2x^2 - 2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	0	-	0	+
$2x^2-2$	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+

0.5 ن

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$

0.25 ن

0.75 ن

(* النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

0.25 ن

(2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$.

(1) أ) حساب النهايات:

(* $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{2}{x^2} + 1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2} \right) = -\infty$

فبوضع: $x^2 = t$

هذه الأخيرة تصبح: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

0.5 ن

(* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانياً:

(* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = +\infty$

0.5 ن

(* $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = -\infty$

0.25 ن

(* التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته: $x = 0$.

(2) أ) بيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}^* ودالتها المشتقة هي:

0.25 ن

إذن: $f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 1 + \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2}$ و هو المطلوب.

(ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f : نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f

0.25 ن

متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ و عليه جدول تغيراتها يكون:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

0.25 ن

(ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f) :

0.25 ن

أي نحسب: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} \right] = 0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب

مائل للمنحني (C_f) .

(* دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $[f(x) - x] = \frac{2 + \ln(x^2)}{x}$

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\epsilon^{-1}$	0	ϵ^{-1}	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	0	$+$
$2 + \ln(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	$-$	0
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

0.25 ن

(3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $x \in \mathbb{R}^*$ يكون: $f(x) + f(-x) = 0$.

$$f(x) + f(-x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{-x} - x - \frac{\ln(x^2)}{-x} = 0$$

إذن و بما أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ فإن الدالة f فردية و

0.25 ن

منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر.

(ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

0.25 ن

$0.3 < \alpha < 0.4$ و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين -0.4 و -0.3

أي يكون: $-0.4 < \beta < -0.3$.

(4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x) = 1$ ،

لنحل في \mathbb{R}^* هذه الأخيرة.

$$\text{لدينا: } \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} = 1 \text{ أي: } \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} - 1 = 0 \text{ أي تصبح: } \frac{-\ln(x^2)}{x} = 0$$

$$\begin{cases} -\ln(x^2) = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

0.25 ن

هذا يكافئ: $x^2 = 1$ أي: $x = 1$ أو $x = -1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيين

للمستقيم (Δ) .

0.25 ن

(* كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0 = 1$: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه:

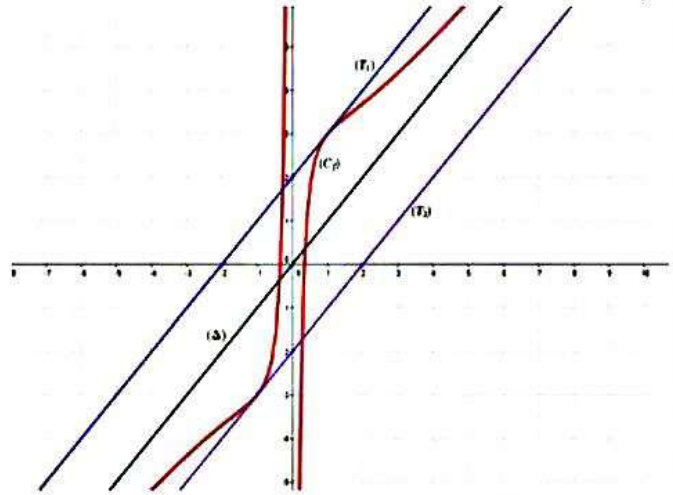
$$(T_1): y = x + 2$$

0.25 ن

(* كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0 = -1$: $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ومنه:

$$\cdot (T_2): y = x - 2$$

ب) الإنشاء:



0.75 ن

5) لدينا: $h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1} \right] + 2$ أي يكون: $h(x) = f(x+1) + 2$.

0.25 ن

إذن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على \mathbb{R}^* :

لدينا: $F'(x) = x + \frac{2}{4} \times \frac{2}{x} \times \ln x^2 + \frac{2}{|x|} = x + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{|x|}$

(* إذا كان $x > 0$ فإن: $F'(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x < 0$ فإن:

0.25 ن

$$F'(x) = -\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$$

0.25 ن

ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تتعدم من أجل $x=1$ هي:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}[\ln(x^2)]^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}$$

0.25 ن

ج) حساب التكامل $I = \int_1^\lambda f(x) dx$ مع $\lambda > 1$:

0.25 ن

لدينا: $I = \int_1^\lambda f(x) dx = [F(x)]_1^\lambda = F(\lambda) - F(1)$ و منه: $I = F(\lambda)$ لأن: $F(1) = 0$.

(* التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلتهم: $x=1$ و $x=\lambda$.

التصحیح النموذجي للبيكالوريا التجريبي مادة الرياضيات
الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع								
كاملة	مجزأة										
04 ن	0.5 ن	(1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^2 = 90$. (2) لتكن A حادثة سحب كرتان من نفس اللون:	التمرين الأول								
	0.75 ن	$P(A) = \frac{A_4^2 + A_6^2}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$									
	0.75 ن	(3) لتكن B حادثة سحب كرتان تحملان رقمان زوجيان : $P(B) = \frac{A_4^2}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$									
	0.75 ن	(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة . (أ) قيم X الممكنة : $X(\omega) = \{0; 1; 2\}$. قانون احتمال X : $P(X=0) = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. $P(X=1) = \frac{A_4^1 \times A_6^1 \times C_2^1}{A_{10}^2} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$ $P(X=2) = \frac{A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$									
	0.75 ن	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$P(X=x_i)$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{8}{15}$</td> <td>$\frac{2}{15}$</td> </tr> </table>	x_i	0	1	2	$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	
x_i	0	1	2								
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$								

(ب) الأمل الرياضياتي:

$$.E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = 0,8$$

04 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} CB = k A'C \\ (\overline{A'C}; \overline{CB}) = \theta + 2k\pi \end{array} \right. \text{يعني} \left\{ \begin{array}{l} S(A') = C \\ S(C) = B \end{array} \right. \text{لدينا (1)}$$

01.5 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{CB}{A'C} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 \\ \theta = (\overline{CA'}; \overline{CB}) + \pi = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \text{ومنه}$$

0.25 ن

(2) بما أن C مصف $[AA']$ فإن B منتصف $[CD]$.

$$C\Omega^2 + CB^2 = C\Omega^2 + (\overline{C\Omega} + \overline{\Omega B})^2 \quad (أ)$$

$$= 2C\Omega^2 + \Omega B^2 - 4 \times \Omega C \times \Omega C \times \frac{1}{2} = \Omega B^2$$

0.25 ن

و منه $(C\Omega)$ يعامد (CB)

$$A'\Omega^2 + A'C^2 = A'\Omega^2 + (\overline{A'\Omega} + \overline{\Omega C})^2 \quad (ب)$$

$$= 2A'\Omega^2 + \Omega C^2 - 4 \times \Omega A' \times \Omega A' \times \frac{1}{2} = \Omega C^2$$

0.25 ن

و منه $(A'\Omega)$ يعامد $(A'C)$

(ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد (BC) في C مع المستقيم

الذي يعامد $(A'C)$ في A' .

0.25 ن

$$CA = AB \times \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ إذن } \tan \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{CA}{AB} \quad (1. II)$$

0.5 ن

$$\text{ومنه } A' \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \text{ و } C \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

(2) بما أن $k=2$ و $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل

$$z' = (1+i\sqrt{3})z + b$$

0.75 ن

$$\text{و بما أن } S(A') = C \text{ فإن } \frac{i\sqrt{3}}{3} = (1+i\sqrt{3}) \frac{2i\sqrt{3}}{3} + b \text{ إذن } b = \frac{6-i\sqrt{3}}{3}$$

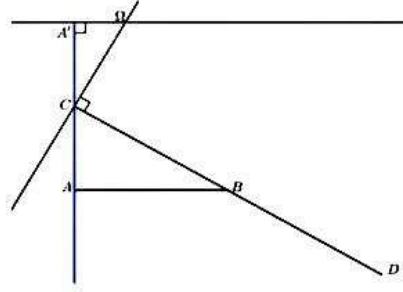
$$\text{و منه } z_{\Omega} = \frac{6-i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + i \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg(z - z_{A'}) = -\frac{\pi}{2} \text{ يعني } \arg \left(z - 2i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

0.25 ن

يعني $(\overline{u}, \overline{A'M}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم

التمرين
الثاني



التمرين
الثالث

05 ن

$$x_0 = 3 = 2^1 + 1 \quad (1)$$

نفرض أن $x_n = 2^{n+1} + 1$ إذن $n \geq 0$

$$x^{n+1} = 2x_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$$

و منه من أجل كل طبيعي $x_n = 2^{n+1} + 1$

$$\text{pgcd}(x_2; x_3) = \text{pgcd}(7; 17) = 1 \quad (2)$$

$$\text{pgcd}(x_8; x_9) = \text{pgcd}(513; 1025) = 1$$

(ب) $2x_n - x_{n+1} = 2^{n+2} + 2 - 2^{n+2} - 1 = 1$ و منه حسب بيزو فإن x_n و x_{n+1} أوليان

فيما بينهما

$$(3) \quad 2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5 \quad \text{نفرض أن } 2x_n - y_n = 5$$

$$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - 2y_n - 3 = 2(2x_n - y_n) - 5 = 2 \times 5 - 5 = 5$$

و منه من أجل كل طبيعي $2x_n - y_n = 5$

$$(ب) \quad y_n = 2x_n - 5 \quad \text{يعني } y_n = 2^{n+2} - 3$$

01 ن

0.25 ن

01 ن

0.25 ن

$$2^{4p} \equiv 1[5]$$

$$2 \equiv 2[5]$$

$$2^{4p+1} \equiv 2[5]$$

$$2^{4p+2} \equiv 4[5]$$

$$2^{4p+3} \equiv 3[5]$$

$$2^2 \equiv 4[5]$$

$$2^3 \equiv 3[5]$$

$$2^4 \equiv 1[5]$$

(ج) لدينا و منه من أجل كل p من \square

0.5 $a_n = 1$ أو $a_n = 5$ فإن $2x_n - y_n = 5$ (أ) بما أن

$$0.5 \quad \text{يعني } \begin{cases} x_n \equiv 0[5] \\ y_n \equiv 0[5] \end{cases} \quad \text{يكافئ } a_n = 5 \quad (ب)$$

$$0.25 \quad \text{يعني } \begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3[5] \end{cases} \quad \text{يعني } n = 4p + 1$$

أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان x_n و y_n وأخيرا يكون

$$n = 4p \quad \text{أو } n = 4p + 2 \quad \text{أو } n = 4p + 3$$

07 ن 0.25

I . 1) من أجل كل x من $\square g'(x) = xe^x$

0.25 ن

g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
xe^x	$-$	0	$+$

0.25 ن

(2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0) = 0$ نستنتج أن g موجبة على \square

II . 1) حساب $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$

01 ن

نضع $\left. \begin{array}{l} u(t) = x-t \\ v'(t) = e^t \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(t) = -dt \\ v(t) = e^t \end{array} \right\}$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد

$$I(x) = [(x-t)e^t]_0^x + \int_0^x e^t dt = [(x-t)e^t + e^t]_0^x = e^x - x - 1 = e^x - (x+1)$$

(2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0; x]$ معناه $0 \leq t \leq x$ أي

$1 \leq e^t \leq e^x$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t) \leq e^t(x-t) \leq e^x(x-t)$ و أخيرا

بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_0^x (x-t) dt \leq \int_0^x e^t(x-t) dt \leq \int_0^x e^x(x-t) dt$

0.5 ن

$$\text{يعني } \left[e^x \left(xt - \frac{t^2}{2} \right) \right]_0^x \leq I(x) \leq \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \text{ يعني } \frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

(3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x; 0]$ معناه $x \leq t \leq 0$ أي

$e^x \leq e^t \leq 1$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t) \leq e^t(x-t) \leq e^x(x-t)$

لأن $(x-t)$ سالب و أخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى

$$\int_x^0 (x-t) dt \leq \int_x^0 e^t(x-t) dt \leq \int_x^0 e^x(x-t) dt$$

0.5 ن

$$\left[\left(xt - \frac{t^2}{2} \right) \right]_x^0 \leq -I(x) \leq \left[e^x \left(xt - \frac{t^2}{2} \right) \right]_x^0$$

$$\text{يعني } -\frac{x^2}{2} \leq -I(x) \leq -\frac{x^2 e^x}{2} \text{ و منه } \frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

(4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ أي

$$\frac{x^2}{2} \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2} \text{ و منه}$$

من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \dots (1)$$

من أجل كل x سالب $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ أي $\frac{x^2 e^x}{2} \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2}{2}$ و منه

من أجل كل x سالب

تماما $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

III . 1 حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} (1 - e^{-x}) = +\infty$$

0.5 ن

0.25 ن

0.25 ن

0.75 ن

(2) من السؤال II. 4 نجد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

و منه f' قابلة للاشتقاق 0 عند $f'(0) = \frac{1}{2}$.

من أجل كل x من 0^+ فإن $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f' > 0$ على

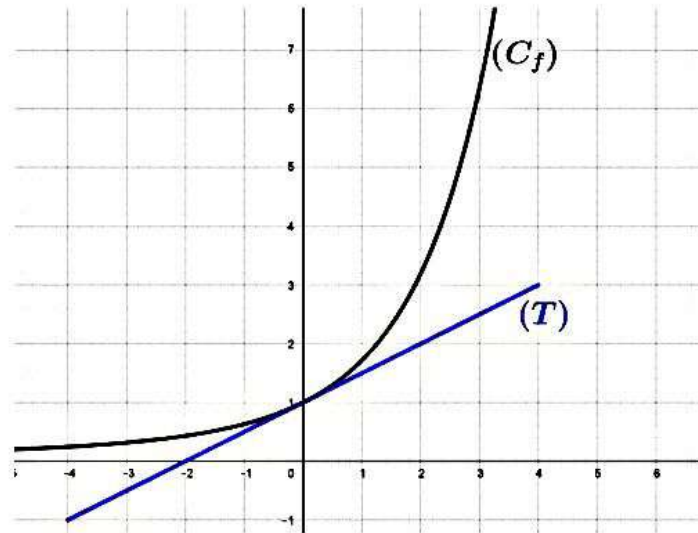
0^+ . إذن f' متزايدة تماما على 0^+ .

01 ن

0.5 ن

$$(T): y = \frac{1}{2}x + 1$$

01 ن





الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

تحضير امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الموقع الالكتروني للامتحانات والمسابقات

دورة: 2020

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

نعتبر صندوقا به ثلاث كريات سوداء وكرية واحدة بيضاء لا نفرق بينها باللمس، ونعتبر قريصة متجانسة تماما من وجهين، وجه أسود والآخر أبيض. نقوم بالتجربة التالية:

نرمي القريصة، فإذا سقطت على الوجه الأبيض نضيف كرية بيضاء إلى الصندوق، وإذا سقطت على الوجه الأسود نضيف كرية سوداء إلى الصندوق، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.

(1) لتكن الأحداث E_0 ، E_1 و B التالية:

E_0 : «لا تظهر كرية بيضاء من بين الكريات الثلاث المسحوبة»

E_1 : «تظهر كرية بيضاء واحدة فقط من بين الكريات الثلاث المسحوبة»

B : «تسقط القريصة على الوجه الأبيض»

أ- أحسب $P(E_0 \cap B)$ و $P(E_0 \cap \bar{B})$ ثم استنتج $P(E_0)$.

ب- ما هو احتمال أن تسقط القريصة على الوجه الأسود علما أنه لا تظهر كرية بيضاء من بين الكريات الثلاث المسحوبة؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء من بين الكريات الثلاث المسحوبة.

أ- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(3) نعيد التجربة السابقة أربع مرات متتالية وبنفس القواعد السابقة في كل مرة.

أحسب احتمال الحصول مرة واحدة على الأقل على كرية بيضاء واحدة فقط.

التمرين الثاني: (04,5 نقاط)

(1) n عدد صحيح.

- بين أن العددين $14n + 3$ و $5n + 1$ أوليان فيما بينهما.

(2) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $87x + 31y = 2 \dots (E)$.

أ- تحقق دون حساب القاسم المشترك الأكبر، أن العددين 87 و 31 أوليان فيما بينهما.



ب- عين الثنائية $(u; v)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث: $87u + 31v = 1$ ، ثم استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E).
ج- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E).

3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $87x - 31y - 2 = 0$.
- عين جميع النقط M من (Δ) والتي فواصلها محصورة بين 0 و 100.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب
حيث: $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $Z_A = 1 + i$.
ولتكن (C) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

1) أكتب Z_B و Z_A على الشكل الأسّي.
2) لتكن M نقطة من (C) لاحقتها $z = e^{i\alpha}$ حيث $\alpha \in [0; 2\pi]$.
وليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من (C) العبارة $f(M)$ حيث: $f(M) = MA \times MB$.
أ- بين من أجل كل عدد حقيقي α أن: $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.
ب- بين أن: $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) e^{i\alpha} \right|$.
ج- استنتج أن: $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha\right)^2}$.
3) بين وجود نقطة وحيدة M من الدائرة (C) يطلب تعيين إحداثيها بحيث يكون $f(M)$ أعظما محمدا قيمتها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - 1) & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) أ- بين أن الدالة f مستمرة عند 0.

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

2) أ- أحسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65 < \alpha < 0,7$.

4) أ- أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.



- ب- أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فصلتها 0.
- ج- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .
- (5) أنشئ (T) و (C_f) .
- (6) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
- أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $|u_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- ج- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على كرتين بيضاء و $(n-2)$ كرية حمراء متماثلة و غير قابلة للتمييز حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 4$.
نسحب عشوائيا كرية من الصندوق بدون إرجاع لنسجل لونها و نكرر نفس التجربة مرات متتالية (أي يبقى السحب المتتالي بدون إرجاع) إلى أن نحصل لأول مرة على كرية بيضاء فنوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة .

(1) أ - حدد قيم المتغير العشوائي X .

ب - أحسب $P(X = K)$ حيث $K = \{1; 2; 3\}$.

(2) أ - بين أن $P(X = K) = \frac{2(n-K)}{n(n-1)}$ مهما يكن K من مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب - برهن أنه من أجل $m \in \mathbb{N}$ فإن $\sum_{i=0}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

ج - استنتج أن $E(X) = \frac{n+1}{3}$.

(3) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق عند الحصول على أول كرية بيضاء .

- أحسب $E(Y)$ و أوجد علاقة بين $E(X)$ و $E(Y)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الهدف من هذا التمرين برهان أنه يوجد عدد طبيعي n حيث الكتابة العشرية لمكعب هذا العدد تنتهي بـ 2009 أي أن :

$$n^3 \equiv 2009 [10000]$$

الجزء الأول :

(1) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 .

(2) استنتج أن : $2009^{8001} \equiv 2009 [16]$.

الجزء الثاني :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية بـ : $U_0 = 2009^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1$$

(1) أ- بين أن U_0 يقبل القسمة على 5 .

ب- بين باستعمال دستور ثنائي الحد أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$U_{n+1} = U_n [U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)]$$

ج - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن الحد U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} .

(2) أ- تحقق أن $U_3 = 2009^{250} - 1$ ثم استنتج أن $2009^{250} \equiv 1 [625]$.

ب- برهن أن $2009^{8001} \equiv 2009 [625]$.

الجزء الثالث :

(1) باستعمال مبرهنة غوص و النتائج المحصلة عليها في الأسئلة السابقة بين أن : $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 [10000]$.



(2) استنتج عددا طبيعيا حيث الكتابة العشرية لمكعبه تنتهي بـ 2009 .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) ليكن n عددا طبيعيا و نعتبر في \mathbb{C} مجموعة الأعداد المركبة العبارة التالية ذات المتغير الحقيقي θ حيث :

$$E = 1 + C_n^1 \cos(\theta) + C_n^2 \cos(2\theta) + C_n^3 \cos(3\theta) + \dots + C_n^{n-1} \cos((n-1)\theta) + \cos(n\theta)$$

أ - بين أن : $E = \operatorname{Re} \left[(1 + e^{i\theta})^n \right]$

ب - بين أن : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ (علما أن $e^{i\theta} \times e^{i(-\theta)} = 1$)

ج - استنتج أن : $E = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

(2) ليكن Z عددا مركبا . أوجد Z بحيث تكون النقط ذات الواحق التالية : Z ، iZ و i على استقامة واحدة.

(3) نريد حل جملة المعادلات الثلاثة التالية في \mathbb{C} :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \\ |Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1 \\ Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 1 \end{cases}$$

أ - بين أنه يمكن أن نضع $Z_1 = e^{i\theta_1}$ ، $Z_2 = e^{i\theta_2}$ و $Z_3 = e^{i\theta_3}$ حيث θ_1 ، θ_2 و θ_3 هي عمدات الأعداد

المركبة الثلاثة على الترتيب Z_1 ، Z_2 و Z_3 .

ب - بين أن : $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$

ج - بين أن θ_1 و θ_2 تحقق جملة المعادلتين التالية :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

د - استنتج أن : $\cos \theta_1 \times \cos \theta_2 = 0$

هـ - بين أن الأعداد المركبة Z_1 ، Z_2 و Z_3 هي 1 ، i و $-i$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول : نعتبر الدالتين f_0 و f_1 المعرفتين على \mathbb{R} كما يلي : $f_0(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ و $f_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ و ليكن (C_0) و (C_1)

تمثيلهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2 cm) .

(1) أدرس تغيرات كلا من الدالتين f_0 و f_1 .

(2) أ) بين أنه من أجل $x, -x \in \mathbb{R}$ فإن $f_0(-x) = f_1(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أن القيمة $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$ ثابتة من أجل $x \in \mathbb{R}$ يطلب تعيينها و فسر النتيجة بيانيا .

ج) ماذا تستنتج من السؤالين السابقين بخصوص (C_0) و (C_1) ؟

(3) أنشئ المنحنيين (C_0) و (C_1) .



الجزء الثاني : α عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.

نعتبر الدالة العددية f_α المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f_\alpha(x) = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{1 + e^x}$ و (C_α) تمثيلها البياني .

(1) أدرس حسب قيم الوسيط α تغيرات الدالة f_α .

(2) أ) بين أن كل المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة Ω يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) بين أن النقطة Ω هي مركز تناظر و نقطة انعطاف للمنحنى (C_α) .

(3) β عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.

أ) بين أنه إذا كان $f_\alpha(-x) = f_\beta(x)$ فإن $\alpha + \beta = 1$ و فسر النتيجة هندسيا .

ب) أثبت أنه إذا كان $\alpha + \beta = 1$ فإن المنحنيين (C_α) و (C_β) متناظران بالنسبة إلى مستقيم آخر مواز لمحور الفواصل يطلب

تعيينه .

ج) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x و $\alpha + \beta = 1$ فإن $f_\alpha(x) = \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta}$ و فسر النتيجة بيانيا مبينا

العلاقة بين المنحنيين .

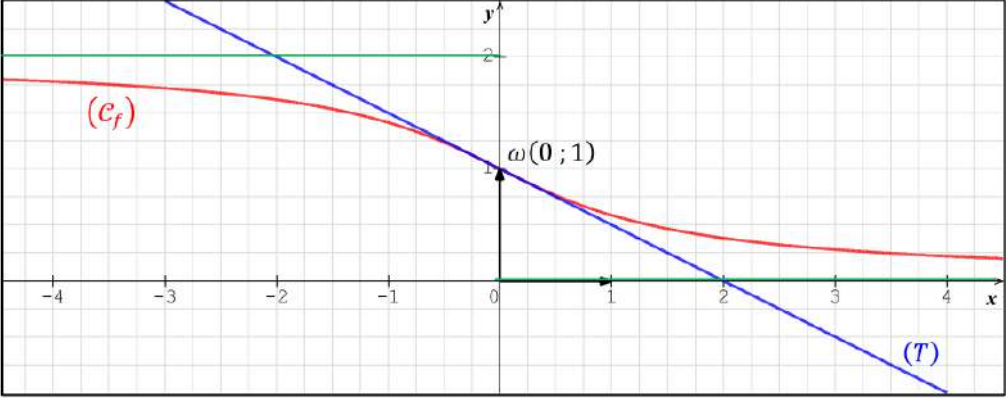


العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04,5 نقاط)		
2,0	0,50	(1) أ- حساب $P(E_0 \cap B)$ و $P(E_0 \cap \bar{B})$ ثم استنتج $P(E_0)$: $P(E_0 \cap B) = P(B) \times P_B(E_0) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{20}$
	0,50	$P(E_0 \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(E_0) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{1}{5}$
	0,50	$P(E_0) = P(E_0 \cap B) + P(E_0 \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$
	0,50	(1) ب- حساب $P_{E_0}(\bar{B})$: $P_{E_0}(\bar{B}) = \frac{P(E_0 \cap \bar{B})}{P(E_0)} = \frac{4}{5}$
1,75	0,25	(2) أ- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X : $P(X = 0) = P(E_0) = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$
	0,50	$P(X = 1) = P(E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^3} + \frac{1}{2} \times \frac{C_1^1 \times C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$
	0,50	$P(X = 2) = P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{20}$
	0,50	(2) ب- حساب الأمل الرياضي $E(X)$: $E(X) = \frac{9}{10}$
0,75	0,75	(3) حساب احتمال الحصول مرة على الأقل على كرتة بيضاء واحدة فقط: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{E}_1)^4 = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{609}{625}$

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	جزأة	
التمرين الثاني: (04,5 نقاط)		
0,75	0,50 0,25	(1) <u>نبين أن العددين $14n + 3$ و $5n + 1$ أوليان فيما بينهما:</u> مبرهنة بيزو: $(14n + 3)(5) + (5n + 1)(-14) = 1$ ومنه: $PGCD(14n + 3 ; 5n + 1) = 1$ ملاحظة: يمكن الاستعانة بسلسلة القسمة المتتالية لخوارزمية إقليدس.
2,0	0,50 0,25 0,25 2×0,50	(2) <u>أ- التحقق دون حساب القاسم المشترك الأكبر، أن العددين 87 و 31 أوليان فيما بينهما:</u> من السؤال (1) نكتب: $(14 \times 6 + 3)(5) + (5 \times 6 + 1)(-14) = 1$ أي: $87(5) + 31(-14) = 1$ ومنه: $PGCD(87 ; 31) = 1$ (حسب مبرهنة بيزو) (2) <u>ب- تعيين الثنائية $(u ; v)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بحيث $87u + 31v = 1$:</u> لدينا من (2) <u>أ-:</u> $87(5) + 31(-14) = 1$ ومنه: $(u ; v) = (5 ; -14)$ <u>استنتاج حلا خاصا $(x_0 ; y_0)$ للمعادلة (E):</u> $(x_0 ; y_0) = (10 , -28)$ (2) <u>ج- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E):</u> حسب مبرهنة غوص: $(x ; y) = (-31k + 10 ; 87k - 28)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
1,75	0,25 3×0,25 3×0,25	(3) <u>تعيين جميع النقط M من (Δ) والتي فواصلها محصورة بين 0 و 100:</u> لدينا: $87x + 31(-y) - 2 = 0$ معناه: الثنائية $(x ; -y)$ حل للمعادلة (E) ومنه: $(x ; -y) = (-31k + 10 ; -87k + 28)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ولدينا: $0 \leq x \leq 100$ أي: $k \in \{-2 ; -1 ; 0\}$ ومنه: النقط هي $(72 ; 202)$ ، $(41 ; 115)$ و $(10 ; 28)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1,0	2×0,50	(1) <u>كتابة z_B و z_A على الشكل الأسّي:</u> $z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و $z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
1,5	0,50	(2) <u>أ- تبيان من أجل كل عدد حقيقي α أن:</u> $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$
	0,50 0,50	(2) <u>ب- تبيان أن:</u> $f(M) = \left e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) e^{i\alpha} \right $ (2) <u>ج- استنتاج أن:</u> $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha\right)^2}$
1,5	3×0,50	(3) <u>تبيان وجود نقطة وحيدة M من الدائرة (C) بحيث يكون $f(M)$ أعظما:</u> $f(M) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ و $M(0 ; -1)$ نجد: $\sin \alpha = -1$ يعني: $f(M)$ أعظمي يعني: $\sin \alpha = -1$

العلامة		عناصر الإجابة									
مجموع	مجزأة										
التمرين الرابع: (07 نقاط)											
0,5	0,25 0,25	(1) - تبيان أن الدالة f مستمرة عند $0: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ ومنه: f مستمرة عند 0 . (1) - دراسة قابلية اشتقاق f عند $0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} = f'(0)$ ومنه: f قابلة للاشتقاق عند 0 .									
2,0	0,5 0,5 2x0,25	(2) - <u>أ- حساب الدالة المشتقة:</u> f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة: $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$ (2) - تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $ f'(x) \leq \frac{1}{2}$. من أجل كل x من $\mathbb{R}: x^2 \geq 0$ ومنه: $\sqrt{1+x^2} \geq 1$ و $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$. أي: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} \leq \frac{1}{2}$ أي: $\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2}) \geq 2$. أي: $ f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ومنه: $\left \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} \right \leq \frac{1}{2}$. (2) - <u>ج- جدول تغيرات الدالة f:</u> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}: f'(x) < 0$ ومنه: f متناقصة تماما على \mathbb{R} .									
	0,50	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>2</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$	-		$f(x)$	2	0
x	$-\infty$	$+\infty$									
$f'(x)$	-										
$f(x)$	2	0									
0,5	0,25 0,25	(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65 < \alpha < 0,7$: نضع: $h(x) = f(x) - x$. دالتها المشتقة $h'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}: h'(x) = f'(x) - 1$. لدينا من (2) - : $ f'(x) \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}$ ومنه: $h'(x) < 0$. أي: $-\frac{3}{2} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}$ ومنه: h متناقصة تماما على \mathbb{R} . مبرهنة القيم المتوسطة: الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على \mathbb{R} فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0,65; 0,7[$ و $h(0,65) \times h(0,7) = 0,053 \times (-0,015) < 0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ ($f(x) = x$) تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65 < \alpha < 0,7$ مع: $f(\alpha) = \alpha$.									

<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>1,75</p> <p>0,25</p> <p>3×0,25</p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>3×0,25</p>	<p>(4) أ- حساب $f(-x) + f(x)$:</p> <p>من أجل x من \mathbb{R} و $(-x)$ من \mathbb{R}: $f(-x) + f(x) = 2$.</p> <p>التفسير الهندسي: النقطة $\omega(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f.</p> <p>(4) ب- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فصلتها 0:</p> $(T) : y = -\frac{1}{2}x + 1$ <p>(4) ج- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T):</p> $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^3}{2(\sqrt{1+x^2} + 1)^2}$ <p>الوضعية:</p> <ul style="list-style-type: none"> $x < 0$: (C_f) يقع تحت (T) (أسفل). $x = 0$: (C_f) يقطع (T) (يحتق) في النقطة $\omega(0; 1)$. $x > 0$: (C_f) يقع فوق (T) (أعلى).
<p>0,75</p>	<p>0,75</p>	<p>(5) إنشاء (C_f) و (T):</p> 
<p>1,0</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>	<p>(6) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha$.</p> <p>$f$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) \leq \frac{1}{2}$. وعليه:</p> $ f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $ $ u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha ; f(\alpha) = \alpha$ <p>(6) ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $u_n - \alpha \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$.</p> $ u_1 - \alpha \leq \frac{1}{2} u_0 - \alpha $ $ u_2 - \alpha \leq \frac{1}{2} u_1 - \alpha $ <p>...</p> $ u_n - \alpha \leq \frac{1}{2} u_{n-1} - \alpha $ <hr/> $ u_n - \alpha \leq \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$

0,5	2×0,25	(6) ج- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها: متتالية متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ (باستعمال النهايات بالمقارنة).
-----	--------	--

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
المجموع	المجزأة	
التمرين الأول : (4 نقاط)		
01	0.5	(1) أ) تحديد قيم المتغير العشوائي $X : X = \{1; 2; 3; \dots; n-2; n-1\}$
	0.5	ب) حساب $P(X = K)$ بحيث $K = \{1; 2; 3\}$ $P(X = 1) = \frac{A_2^1}{A_n^1} = \frac{2}{n}$ $P(X = 2) = \frac{A_{n-2}^1 A_2^1}{A_n^2} = \frac{(n-2)2}{n(n-1)}$ $P(X = 3) = \frac{A_{n-2}^2 A_2^1}{A_n^3} = \frac{2(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$
	0.5	(2) أ) تبين أن $P(X = K) = \frac{2(n-K)}{n(n-1)}$ مهما يكن K من مجموعة قيم المتغير العشوائي X <p>K هو ترتيب الكرة البيضاء في السحب أي أنه مهما يكن K من مجموعة قيم المتغير العشوائي X فإننا نكون قد سحبنا $K-1$ كرة حمراء قبل الكرة البيضاء الأولى في السحب المتتالي بدون إرجاع أي أننا نكون قد سحبنا من الصندوق K كرة .</p>
0.5	$P(X = K) = \frac{A_{n-2}^{K-1} A_2^1}{A_n^K}$ $P(X = K) = \frac{(n-2)!}{(n-K-1)!} \times \frac{2!}{1!} = \frac{2(n-2)!(n-K)!}{n!(n-K-1)!} = \frac{2(n-2)!(n-K)(n-K-1)!}{n(n-1)(n-2)!(n-K-1)!}$ $P(X = K) = \frac{2(n-K)}{n(n-1)}$	
		ب) البرهان أنه من أجل $m \in \mathbb{N}$ فإن $\sum_{i=0}^{i=m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ (البرهان بالتراجع) <p>نتحقق من صحة المساواة من أجل $i = 0$ $0^2 = 0$</p> $\frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0$

و منه المساواة محققة من أجل $i = 0$.

نفرض صحة $P(i = m)$ ثم نبهن صحة $P(i = m + 1)$:

$$\sum_{i=0}^{i=m+1} i^2 = \sum_{i=0}^{i=m} i^2 + (m+1)^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$0.5 \quad \sum_{i=0}^{i=m+1} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = (m+1) \left(\frac{m(2m+1)+6(m+1)}{6} \right) = (m+1) \left(\frac{2m^2+7m+6}{6} \right)$$

$$\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6} \quad \text{و لدينا :}$$

$$\sum_{i=0}^{i=m+1} i^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \quad \text{بمساواة الطرفين السابقين نجد أن}$$

و منه $P(i = m + 1)$ صحيحة .

حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل $m \in \mathbb{N}$ فإن $\sum_{i=0}^{i=m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

1.75

(ج) استنتاج أن $E(X) = \frac{n+1}{3}$:

$$E(X) = \sum_{K=1}^{K=n-1} K \times P(X = K) \quad \text{لدينا :}$$

$$0.25 \quad E(X) = \sum_{K=1}^{K=n-1} K \frac{2(n-K)}{n(n-1)} = \sum_{K=1}^{K=n-1} \frac{2(nK - K^2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left[n \sum_{K=1}^{K=n-1} K - \sum_{K=1}^{K=n-1} K^2 \right]$$

$$E(X) = \frac{2}{n(n-1)} \left[n \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{3n-2n+1}{3} \quad \text{حسب السؤال السابق}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{3} \quad \text{و منه}$$

(3) حساب $E(Y)$ للمتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق عند الحصول على أول كرية بيضاء :

0.25

- قيم المتغير العشوائي $Y : Y = \{0; 1; 2; \dots; n-2\}$

- إيجاد عبارة $P(Y = m)$ بحيث m يأخذ قيمة من مجموعة قيم المتغير العشوائي :

1.25

$$P(Y = 0) = \frac{A_{n-2}^{n-2} A_2^1}{A_n^{n-1}} = \frac{\frac{(n-2)!}{0!} 2}{n!} = \frac{(n-2)! 2}{n!} = \frac{2(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{2}{n(n-1)} = P(X = n-1)$$

0.25

$$P(Y = 1) = \frac{A_{n-2}^{n-3} A_2^1}{A_n^{n-2}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-n+3)!} 2}{n!} = \frac{2 \frac{(n-2)!}{1!}}{n!} = \frac{4}{n(n-1)} = P(X = n-2)$$

$$P(Y = 2) = \frac{A_{n-2}^{n-4} A_2^1}{A_n^{n-3}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-n+4)!} 2}{n!} = \frac{2 \frac{(n-2)!}{2!}}{n!} = \frac{6}{n(n-1)} = P(X = n-3)$$

$$P(Y = 3) = \frac{A_{n-2}^{n-5} A_2^1}{A_n^{n-4}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-n+5)!} 2}{n!} = \frac{2 \frac{(n-2)!}{3!}}{n!} = \frac{8}{n(n-1)} = P(X = n-4)$$

.

.

.

$$P(Y = n-3) = \frac{A_{n-2}^1 A_2^1}{A_n^2} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-1)!} 2}{n!} = \frac{2 \frac{(n-2)!}{(n-3)!}}{n(n-1)} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)} = P(X = 2)$$

$$P(Y = n-2) = \frac{A_{n-2}^0 A_2^1}{A_n^1} = \frac{2}{n!} = \frac{2}{n!} = \frac{2}{n} = P(X = 1)$$

و منه نجد :

0.25

$$P(Y = m) = P(X = n-1-m) = \frac{2(m+1)}{n(n-1)} ; m \in \{0; 1; 2; 3; \dots; n-2\}$$

- حساب $E(Y)$:

$$E(Y) = \sum_{m=0}^{m=n-2} m \times P(Y = m)$$

$$E(Y) = \sum_{m=1}^{m=n-2} m \frac{2(m+1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left[\sum_{m=0}^{m=n-2} m^2 + \sum_{m=0}^{m=n-2} m \right] = \frac{2}{n(n-1)} \left[\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \right]$$

0.25

$$E(Y) = \frac{(n-2)(2n-3)}{3n} + \frac{n-2}{n} = \frac{2n^2 - 4n - 3n + 6 + 3n - 6}{3n} = \frac{2n^2 - 4n}{3n} = \frac{2}{3}n - \frac{4}{3}$$

- إيجاد علاقة بين $E(X)$ و $E(Y)$:

$$E(Y) = \frac{2}{3}n - \frac{4}{3} \text{ لدينا و } E(X) = \frac{n+1}{3} \Rightarrow n = 3E(X) - 1 \text{ وبالتالي :}$$

0.25

$$E(Y) = \frac{2}{3}(3E(X) - 1) - \frac{4}{3} = E(X) - \frac{2}{3}$$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

الجزء الأول :

0.5	0.25	(1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 : لدينا $2009 \equiv 9[16]$ ومنه $2009^2 \equiv 81[16]$ و $81 \equiv 1[16]$ إذن $2009^2 \equiv 1[16]$ أي أن باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1 .
	0.25	(2) استنتاج أن $2009^{8001} \equiv 2009[16]$: لدينا $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009$ و $2009^{8001} = (2009^2)^{4000} = 1^{4000} \equiv 1[16]$ وبما أن $2009^{8000} \equiv (2009^2)^{4000} \equiv 1^{4000} \equiv 1[16]$ فإن $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

الجزء الثاني :

0.25	0.25	(1) أ- تبين U_0 يقبل القسمة على 5 : لدينا $2009 \equiv 4[5]$ ومنه $2009^2 \equiv 16 \equiv 1[5]$ وبالتالي $2009^2 - 1 \equiv 0[5]$ أي أن U_0 يقبل القسمة على 5 .
	0.5	ب) تبين باستعمال دستور ثنائي الحد أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن لدينا باستعمال دستور ثنائي الحد : $U_{n+1} = U_n [U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)]$ $U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1 = \sum_{K=0}^{K=5} C_5^K (U_n)^{5-K} (1)^K - 1 = \sum_{K=0}^{K=5} C_5^K (U_n)^{5-K} - 1$ $U_{n+1} = U_n^5 + 5U_n^4 + 10U_n^3 + 10U_n^2 + 5U_n + 1 - 1 = U_n (U_n^4 + 5U_n^3 + 10U_n^2 + 10U_n + 5)$ $U_{n+1} = U_n [U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)]$
2.25	0.25	ج) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن الحد U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} : $(P(K = n) : U_n = 5^{n+1} m ; m \in \mathbb{N})$
	0.25	*لدينا من السؤال (أ) U_0 يقبل القسمة على 5 أي أن $P(K = 0)$ محققة . نفرض صحة الخاصية $P(K = n)$ و نبرهن صحتها من أجل $K = n + 1$: لدينا $U_n = 5^{n+1} m ; m \in \mathbb{N}$
0.25	0.25	$U_{n+1} = 5^{n+1} m [5^{4n+4} m^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)] = 5^{n+1} m [5(5^{4n+3} m^4 + (U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1))] = 5^{n+2} m'$ حيث $m' = m [5(5^{4n+3} m^4 + (U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1))] \in \mathbb{N}$ و منه الخاصية محققة من أجل $K = n + 1$ ، حسب البرهان بالتراجع فإن الحد U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n .

0.5	<p>(2) أ- التحقق أن $U_3 = 2009^{250} - 1$ و استنتاج أن $2009^{250} \equiv 1[625]$:</p> <p>* لدينا $U_0 = 2009^2 - 1$ ومنه $U_0 + 1 = 2009^2$ وبالتالي $U_1 + 1 = (U_0 + 1)^5 = 2009^{10}$ ،</p> <p>$U_2 + 1 = (U_1 + 1)^5 = 2009^{50}$ و $U_3 + 1 = (U_2 + 1)^5 = 2009^{250}$ إذن $U_3 = 2009^{250} - 1$.</p> <p>* لدينا U_n يقبل القسمة على 5^{n+1} ومنه U_3 يقبل القسمة على $5^4 = 625$ و من هذا نستنتج أن $U_3 \equiv 0[625]$ و بالتالي $2009^{250} \equiv 1[625]$.</p>
0.25	<p>ب- البرهان أن $2009^{8001} \equiv 2009[625]$:</p> <p>لدينا $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009 = (2009^{250})^{32} \times 2009 \equiv 1^{32} \times 2009 \equiv 2009[625]$ و بالتالي $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.</p>

الجزء الثالث :

0.25	<p>(1) باستعمال مبرهنة غوص و النتائج المحصلة عليها في الأسئلة السابقة نبين أن $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$:</p> <p>لدينا سابقا $2009^{8001} \equiv 2009[16]$ و $2009^{8001} \equiv 2009[625]$ أي أن العدد $E = 2009^{8001} - 2009$ مضاعف لكل من العددين 16 و 625 وحسب خاصية الأعداد الأولية (إذا كان عدد مضاعف لعددين أوليين في آن واحد فهو مضاعف لجداثهما)</p>
0.25	<p>و بما أن العددين 16 و 625 أوليان فيما بينهما لأن حسب نظرية بيزو (*) $1 \dots = 16 \times (-39) + 625 \times (1)$ يوجد عددين صحيحين U و V يحققان العلاقة (*) و منه العدد E يقبل القسمة على جداثهما $16 \times 625 = 10000$ أي أن $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$.</p>
0.25	
0.5	<p>(2) استنتاج عدد طبيعي حيث الكتابة العشرية لمكعبه تنتهي بـ 2009 :</p> <p>لدينا $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$ أي أن $2009^{8001} \equiv 2009[10000]$ بحيث $8001 = 3 \times 2667$ ومنه نجد $2009^{2667} \equiv 2009[10000]$ أي أن الكتابة العشرية لمكعب العدد 2009^{2667} تنتهي بـ 2009 .</p>

التمرين الثالث : (5 نقاط)

0.5	<p>(1) تبين أن $E = \text{Re} \left[(1 + e^{i\theta})^n \right]$ لدينا حسب منشور ثنائي الحد</p> $(1 + e^{i\theta})^n = \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K (1)^{n-K} (e^{i\theta})^K ; \forall m \in \mathbb{N} : 1^m = 1$ $(1 + e^{i\theta})^n = \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K e^{iK\theta} = C_n^0 e^{i0\theta} + C_n^1 e^{i\theta} + C_n^2 e^{i2\theta} + \dots + C_n^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + C_n^n e^{in\theta}$ <p>و حسب دستور موافير $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow e^{iK\theta} = \cos K\theta + i \sin K\theta ; \forall K \in \mathbb{Z}$</p> $(1 + e^{i\theta})^n = C_n^0 + C_n^1 (\cos \theta + i \sin \theta) + C_n^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots + C_n^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ $(1 + e^{i\theta})^n = [C_n^0 + C_n^1 \cos \theta + C_n^2 \cos 2\theta + \dots + C_n^n \cos n\theta] + i [C_n^1 \sin \theta + C_n^2 \sin 2\theta + \dots + C_n^n \sin n\theta]$
-----	--

$$(1+e^{i\theta})^n = E + i \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K \sin K\theta = \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K \cos K\theta + i \sum_{K=0}^{K=n} C_n^K \sin K\theta$$

$$. E = \operatorname{Re} \left[(1+e^{i\theta})^n \right] \text{ و منه}$$

$$\text{ب - بين أن : } 1+e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1+e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\frac{2\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$$

$$e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} - i \sin\frac{\theta}{2} = 2 \cos\frac{\theta}{2}$$

و لدينا

$$1+e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ و منه}$$

$$\text{ج - استنتاج أن : } E = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \text{ : انطلاقا من سبق فإن}$$

$$E = \operatorname{Re} \left[(1+e^{i\theta})^n \right] = \operatorname{Re} \left[\left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^n \right] = \operatorname{Re} \left(2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}} \right)$$

$$. E = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \text{ و حسب دستور موافير فإن}$$

(إيجاد العدد المركب Z حتى تكون النقط ذات اللواحق التالية على الترتيب Z, iZ و i على استقامة واحدة :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \bar{Z} \\ \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \arg(Z) = K\pi; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

* تذكير :

نضع $M(Z)$ ، $M'(iZ)$ و $M'(i)$ ، M' و A على استقامة واحدة معناه :

$$\frac{Z-iZ}{Z-i} = \frac{Z(1-i)}{Z-i} \times \frac{\bar{Z}+i}{\bar{Z}+i} = \frac{|Z|^2(1+i)+Z(1+i)}{|Z-i|^2}; Z \neq i$$

$$\frac{Z-iZ}{Z-i} = \frac{(x^2+y^2)(1-i)+(x+iy)(1+i)}{x^2+y^2+1-2y} = \frac{x^2+y^2-i(x^2+y^2)+x-y+i(x+y)}{x^2+y^2+1-2y}$$

$$\frac{Z-iZ}{Z-i} = \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+y^2+1-2y} + i \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+y^2+1-2y}$$

$$\frac{Z-iZ}{Z-i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-y=0 \\ Z \neq i \Leftrightarrow (x;y) \neq (0;1) \end{cases} \Rightarrow x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+y^2-2\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 > 0$$

أي أن $M(Z)$ تنتمي إلى الدائرة إحداثيات مركزها هي $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ والنقطة ذات الإحداثيات $(0;1)$

لأنه في حالة أخذنا $Z = i$ نجد اللواحق $-1, i, i$ و هي على استقامة واحدة لانطباق نقطتين فوق بعضها

$$. (\overline{MM'} = \overline{0MA})$$

نضع $M(Z)$ ، $M'(iZ)$ و $M \cdot A(i)$ ، M' و A على استقامة واحدة معناه : $\overline{AM} // \overline{AM}'$ أي أنهما مرتبطان خطيا ، لدينا :

$$\begin{cases} Z = x + iy \rightarrow M(x; y) \\ iZ = i(x + iy) = -y + ix \rightarrow M'(-y; x) \\ i = 0 + 1i \rightarrow A(0; 1) \end{cases}$$

$$\overline{AM} \left(\begin{matrix} x \\ y-1 \end{matrix} \right); \overline{AM}' \left(\begin{matrix} -y \\ x-1 \end{matrix} \right)$$

$$\overline{U} \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) // \overline{U}' \left(\begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix} \right) \Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \quad \text{*تذكير:}$$

$$\overline{AM} // \overline{AM}' \Leftrightarrow x(x-1) - (y-1)(-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + y^2 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 > 0$$

أي أن $M(Z)$ تنتمي إلى الدائرة إحداثيات مركزها هي $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

0.5

(3) أ - تبين أنه يمكن أن نضع $Z_1 = e^{i\theta_1}$ ، $Z_2 = e^{i\theta_2}$ و $Z_3 = e^{i\theta_3}$ حيث θ_1 ، θ_2 و θ_3 هي أعداد المركبة الثلاثة على الترتيب Z_1 ، Z_2 و Z_3 :

أي عدد مركب غير معدوم يقبل شكلا أسيا $(Z = |Z|e^{i\arg(Z)})$ و حسب المعادلة الثانية يمكن وضع الأعداد المركبة من الشكل التالي : $Z_1 = e^{i\theta_1}$ ، $Z_2 = e^{i\theta_2}$ و $Z_3 = e^{i\theta_3}$ حيث أنه من أجل هذه الأعداد المركبة فإن المعادلتين الأولى والثالثة تقبل حلولا غير منتهية $\in \mathbb{R}^3$. $(\theta_1; \theta_2; \theta_3)$.

0.25

(ب) تبين أن $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ لدينا $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 1$ بحيث $Z_k = e^{i\theta_k}$ و $k = \{1; 2; 3\}$ تحقق المعادلة التالية :

$$Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 1 \Rightarrow e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} \times e^{i\theta_3} = e^{i0} \Rightarrow e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} = e^{i0}$$

و منه $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$.

ج - بين أن θ_1 و θ_2 تحقق جملة المعادلتين : انطلاقا من السؤال السابق فإن $\theta_3 = -(\theta_1 + \theta_2) \dots (*)$

بتعويض العلاقة (*) في المعادلة الأولى نجد :

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \Rightarrow \cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin[-(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$0.5 \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \Rightarrow \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2) + i [\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1 + \theta_2)] = 1$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2) = 1 \\ \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) = 1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) = \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

و هو المطلوب .

د- استنتاج أن $\cos \theta_1 \times \cos \theta_2 = 0$ لدينا

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) = 1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) = \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)]^2 = [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]^2 \\ [\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)]^2 = \sin^2(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = 1 + \cos^2(\theta_1 + \theta_2) - 2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_2) + 2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = \sin^2(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد :

$$2 + 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + 2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = 2 - 2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \Rightarrow \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = -\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = -\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \Rightarrow 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = 0$$

و منه $\cos \theta_1 \times \cos \theta_2 = 0$

2.5

0.5

هـ- تبين أن الأعداد المركبة Z_1 ، Z_2 و Z_3 هي 1 ، i و $-i$:

$$0.25 \quad \begin{cases} \cos(\theta_1) = 0 \Rightarrow \theta_1 \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \cos(\theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases} \text{ و إما } \begin{cases} \cos(\theta_1) = 0 \Rightarrow \theta_1 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \cos(\theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

لدينا مما سبق $\cos \theta_1 \times \cos \theta_2 = 0$ معناه إما

بحيث أن الثنائية $(\theta_1; \theta_2)$ تقبل التبدل لوجود التناظر فندرس احتماليين فقط و في الحالة الأولى (كلاهما معدوم) أخذنا العمديتين

مختلفتين تماما حتى نتحقق جملة المعادلتين السابقة و يتحقق الشرط $\theta_3 = -(\theta_1 + \theta_2)$ و منه نجد أن $\theta_3 = \{0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\}$ ،

نكتفي بدراسة حالة واحدة لأن الثلاثية $(\theta_1; \theta_2; \theta_3)$ قابلة للتبدل فالجاء و الجمع تبديليان :

*نكتفي بدراسة الحالة :

0.25

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = 0 \Rightarrow \theta_1 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \text{و} \\ \cos(\theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0 \end{cases}$$

و منه جملة المعادلتين ذات المجهولين $(\theta_1; \theta_2)$ محققة .

*استنادا إلى العلاقة $\theta_3 = -(\theta_1 + \theta_2)$ نجد أن $\theta_3 = 0$.

0.25 . $(\theta_1; \theta_2; \theta_3) = \left\{ \left(0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right); \left(0; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; 0; -\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; 0\right); \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 0\right); \left(-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}\right) \right\}$ منه

. $(Z_1; Z_2; Z_3) = \{(1; i; -i); (1; -i; i); (i; 1; -i); (i; -i; 1); (-i; i; 1); (-i; 1; i)\}$ إذن :

*التحقق :

$$\begin{cases} i - i + 1 = 1 \\ |i| = |-i| = |1| = 1 \\ i \times (-i) \times 1 = -i^2 \times 1 = 1 \end{cases}$$

**طريقة أخرى :

0.25 نعتبر كثير الحدود المركب $P(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ + c$ و لنكن Z_1 ، Z_2 و Z_3 حلول المعادلة $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1$ معناه $(Z - Z_1)(Z - Z_2)(Z - Z_3) = 0$.

0.25
$$\begin{cases} a = -(Z_1 + Z_2 + Z_3) = -1 \\ b = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 = 1 \text{ : بالمطابقة نجد :} \\ c = -(Z_1 \times Z_2 \times Z_3) = -1 \end{cases}$$

ومنه $Z^3 - (Z_1 + Z_2 + Z_3)Z^2 + (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3)Z - Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 0$

و لدينا مما سبق $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1$ و $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 1$ إذا نحسب $Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3$:

0.25 لدينا $Z_1Z_2Z_3(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \overline{Z_2Z_3}|Z_1|^2 + \overline{Z_1Z_3}|Z_2|^2 + \overline{Z_1Z_2}|Z_3|^2 = |Z_1|^2 (\overline{Z_1Z_2} + \overline{Z_2Z_3} + \overline{Z_1Z_3}) = 1$

ومنه : $\overline{Z_1Z_2} + \overline{Z_2Z_3} + \overline{Z_1Z_3} = \frac{1}{|Z_1|^2} \Leftrightarrow \overline{\overline{Z_1Z_2} + \overline{Z_2Z_3} + \overline{Z_1Z_3}} = \frac{1}{|Z_1|^2} \Leftrightarrow Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 = \frac{1}{|Z_1|^2}$

و لدينا $Z_1Z_2Z_3 = 1 \Leftrightarrow |Z_1Z_2Z_3| = 1 \Leftrightarrow |Z_1||Z_2||Z_3| = 1 \Leftrightarrow |Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 1$

و منه نجد أن $Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 = 1$.

تصبح المعادلة $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z - 1)(Z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (Z - 1)(Z^2 - i^2) = 0$

$$0.25 \quad (Z-1)(Z-i)(Z+i)=0 \Rightarrow (Z_1; Z_2; Z_3) = (1; i; -i)$$

و الثلاثية $(Z_1; Z_2; Z_3)$ قابلة للتبديل .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

الجزء الأول :

1) دراسة تغيرات كلا من الدالتين f_0 و f_1 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0$$

النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} : FI \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x (1 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$$

دراسة اتجاه التغير للدالتين f_0 و f_1 :

0.25

$$f_0'(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

الدالة f_0 معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و مشتقتها :

الدالة f_0 متناقصة تماما على \mathbb{R} .

الدالة f_1 معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و مشتقتها :

01

0.25

$$f_1'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

الدالة f_1 متزايدة تماما على \mathbb{R} .

جدول التغيرات للدالتين f_0 و f_1 :

0.25	x	$-\infty$	$+\infty$
	$f_0'(x)$	-	
	$f_0(x)$		
	$f_1'(x)$	+	
	$f_1(x)$		

1.5	0.25	<p>(2) تبين أنه من أجل $x, -x \in \mathbb{R}$ فإن $f_0(-x) = f_1(x)$</p> $\forall x, -x \in \mathbb{R} : f_0(-x) = \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{e^x}{1+e^x} = f_1(x)$
	0.25	<p>*تفسير النتيجة بيانياً : المنحنيان (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة إلى محور الترتيب (yy') أي المستقيم ذي المعادلة $x = 0$.</p>
	0.25	<p>(ب) تبين أن القيمة $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ثابتة من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ مع تعيينها :</p> $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{f_0(x)+f_1(x)}{2} = \frac{\frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1}}{2} = \frac{1+e^x}{2(e^x+1)} = \frac{1}{2}$ <p>و منه القيمة $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ثابتة من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.</p>
	0.25	<p>*تفسير النتيجة بيانياً : المنحنيان (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم الأفقي ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}$.</p>
0.5	<p>(ج) انطلاقاً من السؤالين السابقين نستنتج أن المنحنيان (C_0) و (C_1) يقبلان النقطة ذات الإحداثيات $(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر .</p>	

01	1	(3) إنشاء المنحنيين (C_0) و (C_1) : (انظر آخر التصحيح)
----	---	--

		<p><u>الجزء الثاني</u> : α عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.</p> <p>(1) دراسة حسب قيم الوسيط الحقيقي α تغيرات الدالة f_α :</p> $f_\alpha(x) = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{1 + e^x} \quad D_{f_\alpha} = \mathbb{R}$
--	--	---

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{1 + e^x} = 1 - \alpha : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\alpha + \frac{1}{e^x} - \frac{\alpha}{e^x})}{e^x (\frac{1}{e^x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha + \frac{1}{e^x} - \frac{\alpha}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \alpha$$

: النهايات

اتجاه التغير : الدالة f_{α} معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و مشتقتها :

0.25

$$f'_{\alpha}(x) = \frac{\alpha e^x (1 + e^x) - e^x (\alpha e^x + 1 - \alpha)}{(1 + e^x)^2} = \frac{\alpha e^x + \alpha e^{2x} - \alpha e^{2x} - e^x + \alpha e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{2\alpha e^x - e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x (2\alpha - 1)}{(1 + e^x)^2}$$

*إشارة المشتق $f'_{\alpha}(x)$ من إشارة $2\alpha - 1$:

0.25

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2\alpha - 1$		○	
$f'_{\alpha}(x)$	-		+

0.25

لما $\alpha < \frac{1}{2}$ فإن $f'_{\alpha}(x) < 0$ وبالتالي فإن الدالة f_{α} متناقصة تماما على \mathbb{R} .لما $\alpha > \frac{1}{2}$ فإن $f'_{\alpha}(x) > 0$ وبالتالي فإن الدالة f_{α} متزايدة تماما على \mathbb{R} .

0.5

$$y_{\Omega} = \frac{\alpha e^{x_{\Omega}} + 1 - \alpha}{e^{x_{\Omega}} + 1} = \frac{\alpha(e^{x_{\Omega}} - 1) + 1}{e^{x_{\Omega}} + 1}$$

نلاحظ أن y_{Ω} تكون مستقلة عن α من أجل $x_{\Omega} = 0$:

$$y_{\Omega}(x_{\Omega} = 0) = \frac{\alpha(e^0 - 1) + 1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

و منه جميع المنحنيات (C_{α}) تمر من النقطة الثابتة $\Omega(0; \frac{1}{2})$.(ب) تبين أن النقطة Ω هي مركز تناظر و نقطة انعطاف للمنحنى (C_{α}) :*تبين أن النقطة Ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_{α}) :

$$\forall x, 2x_{\Omega} - x \in D_{f_{\alpha}} : f_{\alpha}(2x_{\Omega} - x) + f_{\alpha}(x) = 2y_{\Omega}$$

01

0.25

$$f_{\alpha}(2x_{\Omega} - x) + f_{\alpha}(x) = f_{\alpha}(-x) + f_{\alpha}(x) = \frac{\alpha e^{-x} + 1 - \alpha}{e^{-x} + 1} + \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x + 1} = \frac{\alpha \frac{1}{e^x} + 1 - \alpha}{\frac{1}{e^x} + 1} + \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x + 1}$$

$$f_{\alpha}(2x_{\Omega} - x) + f_{\alpha}(x) = \frac{\alpha + e^x - \alpha e^x}{\frac{1 + e^x}{e^x}} + \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x + 1} = \frac{\alpha + e^x - \alpha e^x + \alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

و منه النقطة $\Omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_{α}) .

*تبيين أن النقطة $\Omega(0; \frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_{α}) : أي أن $f''_{\alpha}(0) = 0$

الدالة f'_{α} معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومشتقتها:

0.25

$$f''_{\alpha}(x) = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - 2e^{2x}(e^x + 1)(2\alpha - 1)}{(e^x + 1)^4} = \frac{(2\alpha - 1)e^x(1 + e^{2x} + 2e^x - 2e^x - 2e^{2x})}{(e^x + 1)^4}$$

$$f''_{\alpha}(x) = \frac{(2\alpha - 1)e^x(1 - e^{2x})}{(e^x + 1)^4}$$

$$f''_{\alpha}(0) = \frac{(2\alpha - 1)e^0(1 - e^{2 \times 0})}{(e^0 + 1)^4} = 0$$

و منه النقطة $\Omega(0; \frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_{α}) .

(3) β عدد حقيقي يختلف عن $\frac{1}{2}$.

(أ) تبيين أنه إذا كان $f_{\alpha}(-x) = f_{\beta}(x)$ فإن $\alpha + \beta = 1$:

0.25

$$\forall x, -x \in \mathbb{R}: f_{\alpha}(-x) = f_{\beta}(x) \Leftrightarrow \frac{\alpha e^{-x} + 1 - \alpha}{e^{-x} + 1} = \frac{\beta e^x + 1 - \beta}{e^x + 1} \Rightarrow \frac{\alpha + e^x - \alpha e^x}{e^x + 1} = \frac{\beta e^x + 1 - \beta}{e^x + 1}$$

$$\forall x, -x \in \mathbb{R}: f_{\alpha}(-x) = f_{\beta}(x) \Rightarrow \alpha + e^x - \alpha e^x = \beta e^x + 1 - \beta \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: (-\alpha - \beta + 1)e^x + \alpha + \beta - 1 = 0$$

$$\forall x, -x \in \mathbb{R}: f_{\alpha}(-x) = f_{\beta}(x) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta + 1 = 0 \\ \text{و} \\ \alpha + \beta - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

0.25

*تفسير النتيجة بيانياً: المنحنيان (C_{α}) و (C_{β}) متناظران بالنسبة إلى محور الترتيب (yy') من أجل $\alpha + \beta = 1$.

(ب) إثبات أنه إذا كان $\alpha + \beta = 1$ فإن المنحنيين (C_{α}) و (C_{β}) متناظران بالنسبة إلى مستقيم آخر مواز لمحور الفواصل

يطلب تعيينه: لدينا $\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \beta = 1 - \alpha: \frac{f_{\alpha}(x) + f_{\beta}(x)}{2} = \frac{f_{\alpha}(x) + f_{1-\alpha}(x)}{2} = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x + 1} + \frac{(1 - \alpha)e^x + 1 - (1 - \alpha)}{e^x + 1}$$

$$0.25 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \beta = 1 - \alpha: \frac{f_\alpha(x) + f_{1-\alpha}(x)}{2} = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha + e^x - \alpha e^x + 1 - 1 + \alpha}{2(e^x + 1)} = \frac{e^x + 1}{2(e^x + 1)} = \frac{1}{2}$$

0.25 و منه المنحنيان (C_α) و (C_β) متناظران بالنسبة إلى المستقيم الأفقي ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}$ من أجل $\alpha + \beta = 1$.

$$: f_\alpha(x) = \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} \text{ فإن } \alpha + \beta = 1 \text{ و } x \text{ حقيقي}$$

1.5

$$\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \left(\frac{1-2\alpha}{1-2\beta} \right) \frac{\beta e^x + 1 - \beta}{e^x + 1} + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{1-2\beta} \left(\frac{\beta e^x + 1 - \beta - 2\alpha\beta e^x - 2\alpha + 2\alpha\beta + \alpha e^x + \alpha - \beta e^x - \beta}{e^x + 1} \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{1-2\beta} \left[\frac{2\alpha\beta(-e^x + 1) - \alpha(-e^x + 1) - 2\beta + 1}{e^x + 1} \right] = \frac{1}{1-2\beta} \frac{-\alpha(-e^x + 1)(-2\beta + 1) - 2\beta + 1}{e^x + 1}$$

$$0.25 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{1-2\beta} \frac{(-2\beta + 1)(\alpha e^x - \alpha + 1)}{e^x + 1} = \frac{\alpha e^x + 1 - \alpha}{e^x + 1} = f_\alpha(x)$$

من أجل الشرط المعطى فإن :

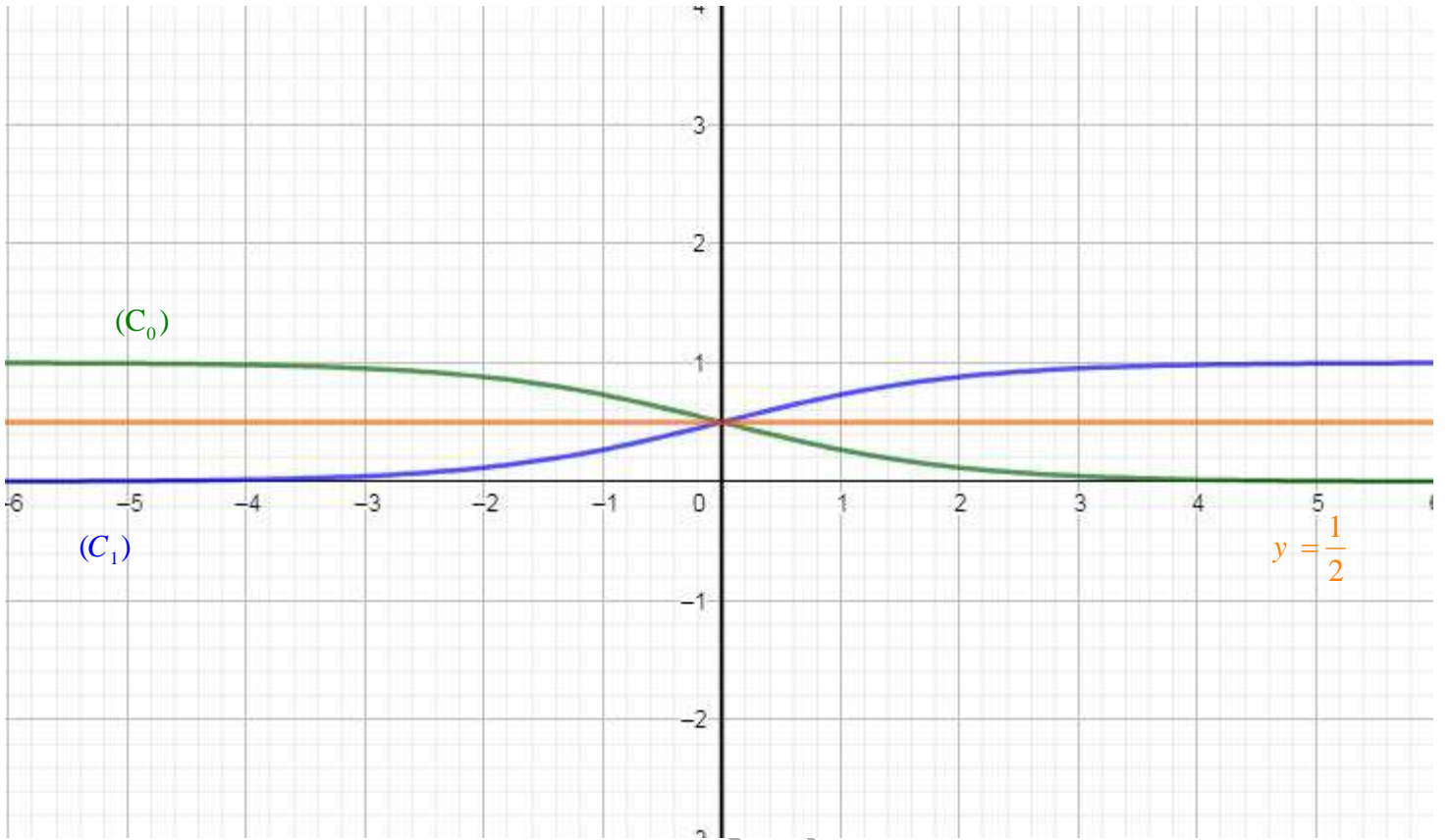
$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} = \frac{1-\alpha-\alpha}{1-\beta-\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} = -1 \\ \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta-\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1: \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} f_\beta(x) + \frac{\alpha-\beta}{1-2\beta} = -f_\beta(x) + 1 = f_\alpha(x)$$

*تفسير النتيجة بيانياً :

0.25 من أجل $\alpha + \beta = 1$ فإن كل نقطة $M(x; y)$ من المنحني (C_α) ترفق بالنقطة $M'(x'; y')$ من المنحني (C_β) أي أن المنحني (C_β) يستنتج من المنحني (C_α) بالتحويل النقطي :

$$T: \begin{cases} T(M) = M' \\ (x; y) \rightarrow (x'; y') = (x; -y + 1) \end{cases}$$



إعداد وكتابة: غريب عصام

رابط الصفحة :

<https://www.facebook.com/114087136978542> - البكالوريا-التجريبية-دورة-2020-مادة-الرياضيات

كؤكب النؤبفة فف مافة الرفاضفااء - بكالورفا 2024 -

مءةاء الأءضر الممءاز لامءءان البكالورفا الأءرفبفة

القسم الأناف : **II**

الأءءباراء :

،، مفا 08 إلفى 10 ،،

{06} مواءفء بءون ءل - للمءاولة و الاسءناس

ملاءة : هءه الباقاة ءاصة بءلامفء شعبة رفاضفااء و فمكن لءلامفء شعبءف علوم آءرفبفة و آقفف الاسءفااء مفا ءسب المءلوب ،،

آءء شعار

،، لأ ملاء لا فسل ،، نءو آءقفق ذلك الأمل ،،

المذصاة العلمفة = عقفبة بن نافء

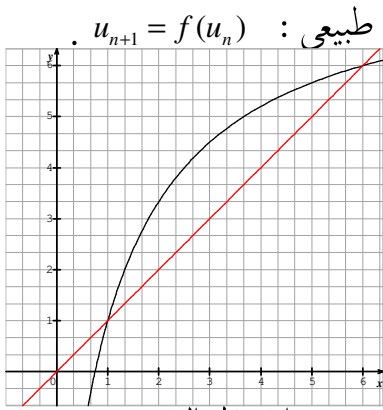
<https://www.facebook.com/okba.bac.2010>

أجب على أحد الموضوعين التاليين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$. (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ في الشكل المقابل ، (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y = x$.



(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) مثل الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل .
(ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغيرها وتقاربها .

(2) (أ) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 2 \leq u_n \leq 6$.
(ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة واستنتج أنها متقاربة .

(3) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq (6 - u_{n+1}) \leq \frac{2}{3}(6 - u_n)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq (6 - u_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (6 - u_0)$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) أكتب v_n بدلالة n ، استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n$.

(د) أحسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{u_{2023} - 1} + \frac{1}{u_{2024} - 1} + \dots + \frac{1}{u_{2023+n} - 1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام 0، 2، 3، 3 وثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام 0، 3، 3 .
و يحتوي صندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 2، 3، 3 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين 0، 3 .
نلقي قطعة نقد مرتين فإذا ظهر الوجه مرتان نسحب من الصندوق U_1 كريتين على التوالي دون إرجاع . وإلا نسحب من الصندوق U_2 كريتين على التوالي مع الإرجاع .

(1) (أ) أحسب احتمال الأحداث التالية :
A "الكريتان المسحوبتان من نفس اللون " .

B "الكريتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم " .
C "ظهر اللون الأحمر مرة على الأقل في الكريتين المسحوبتين " .

(ب) هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علّل .

(ج) علما أن الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، ما احتمال أن تكونا سحبتا من الصندوق U_1 .

(2) - نضع كل كريات الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق U_3 ونسحب منه ثلاث كريات في آن واحد.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب بهذه الكيفية العدد الأكبر من بين الأرقام الظاهرة .

(أ) عين مجموعة قيم X الممكنة ثم بين أن $p(X=3) = \frac{21}{22}$.

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . (ج) أحسب أماله الرياضياتي .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) - نعتبر المعادلة (E) $24x - 76y = 124$ ذات المجهول (x, y) حيث x و y عددان صحيحان .

(أ) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 76 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلول في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة فإن : $y \equiv -1[6]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

(2) λ عدد طبيعي يكتب $2\beta\alpha 34$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 و يكتب $4\beta 3\alpha$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 .

عين العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في النظام العشري .

(3) (أ) حلل العدد 1444 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منهما يقسم 1444 .

(ب) - عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية : $m^2 + 37d^2 = 1444$. حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجموعة $D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 - \frac{2}{x+1} + 2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

(أ) بين أن $g'(x) = \frac{-2}{x(x+1)^2}$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $] -\infty; -1[$ ثم المجال $]0; +\infty[$ و شكّل جدول تغيراتها .

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-1,73 < \alpha < -1,74$ و $0,43 < \beta < 0,44$.

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجموعة D .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ بـ $f(x) = -x - 2 + 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $x \neq 0$
 $f(0) = -2$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$.

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(ب) بين أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$ (ضع $x = \frac{1}{t}$) ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ج) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x$ مقارب لـ (C_f) في جوار $-\infty$ و $+\infty$.

(2) (أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$ من اليمين ثم فسر النتيجة هندسيا .

(ب) بين أنه من أجل $x \in D$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاهات تغير f و شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) مبرزاً المسافات في النقط التي فواصلها $0, \alpha$ و β .

(4) (أ) أكتب معادلة المستقيم (AB) حيث $A(0; 2)$ و $B(-1; 1)$ ثم وارسمه .

(ب) m وسيط حقيقي معطى ، بين أن جميع المستقيمت (Δ_m) ذات المعادلة $y = mx + m + 1$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

(ج) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) - 1 = m(x + 1)$.

(5) نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبار : $H(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x - \ln(x + 1)$.

(أ) بين أن H دالة أصلية للدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبار : $h(x) = 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

(ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e - 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر كثير الحدود $p(z)$ في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} حيث : $p(z) = z^3 - 4\sqrt{3}z^2 + 24z - 24\sqrt{3}$

(1) بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة $p(z) = 0$ فإن \bar{z} حل لها كذلك .

أحسب $p(2\sqrt{3})$ و $p(\sqrt{3} + 3i)$ ثم استنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لاحتقاتها $z_C = 2\sqrt{3}$ و $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_A = \sqrt{3} + 3i$ على الترتيب.

(أ) أكتب كلا من z_C و z_B ، z_A على شكله الأسّي ثم استنتج أن النقط تنتمي إلى دائرة (C) يطلب مركزها ونصف قطرها .

(ب) أرسم مثلثا متقايس الأضلاع طول ضلعه 4، وباستعمال ارتفاع هذا المثلث، أنشئ الدائرة (C) ثم أنشئ النقط A, B, C .

(ج) حدد الطبيعة الهندسية للرباعي $OABC$ وعين لاحقة مركزه I . ثم أحسب مساحته .

(3) حدد القيس الرئيسي لـ $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا موجب تماما .

(4) نعتبر المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z من المستوي بحيث : $z - \sqrt{3} = \lambda e^{\frac{-2\pi}{3}i}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما .

تحقق من أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = -3i$ تنتمي إلى (Δ). ثم عين المجموعة (Δ).

(5) حدد الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة z بحيث : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

التمرين الثاني 04 نقط

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{2} + \frac{1}{2}}$

(1) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 3$

(ب) - قارن بين العددين u_n و u_{n+1} ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(ج) - هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل اجابتك .

(2) - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n^2 - 1$.

(أ) - بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(ب) - أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) - أحسب المجموع S_n بدلالة n : $T_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2v_n$ ثم أحسب $L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$

التمرين الثالث 05 نقط

تحتوي كيس U_1 على أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 0، 1، 1، 6 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 1، 6، 6 وكرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1، 6. (كل الكريات لا تفرق بينها عند اللمس).

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس.

(1) - أحسب احتمال الحوادث التالية :

" A " ظهور لونين فقط في الكرات الثلاثة المسحوبة " . " B " الكريات الثلاثة ألوانها مختلفة مثني مثني " .

C " الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم " . D " مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة فردي " .

E " الحصول على كرة تحمل الرقم 6 على الأقل " . F " الحصول على كرة واحدة سوداء تحمل الرقم 6 " .

(أ) - أحسب $P(B \cap C)$ هل الحادثان B و C مستقلان؟

(3) أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى علما أنها تحمل نفس الرقم .

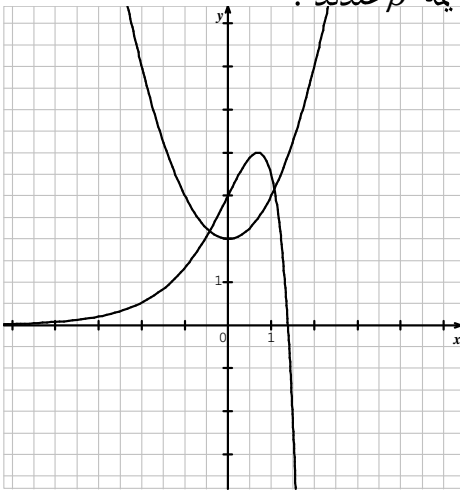
(4) - نضع الكرات الخضراء والحمراء في كيس U_3 .

نسحب كرتين في على التوالي دون إرجاع من الكيس U_3 ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لكرية حمراء العدد الصحيح الموجب تماما α وبكل سحب لكرية خضراء العدد الصحيح السالب تماما β .

(أ) - عين القيم الممكنة ل X . ثم جد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ب) - أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم جد قيم الأعداد الصحيحة α و β بحيث يكون $E(X) = 2$.

(ج) - عين أصغر قيمة للعدد الصحيح α والأكبر تماما من 1 بحيث $\alpha \equiv 1[7]$ ثم استنتج قيمة β عندئذ .



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالتين المعرفتين على \mathbb{R} بـ $x \mapsto x^2 + 2$ و $x \mapsto 4e^x - e^{2x}$.

في مايلي (C) و (P) منحنياهما البيانيان في معلم متعامد متجانس .

نعرف الدالة g على \mathbb{R} بـ $g(x) = x^2 + 2 - 4e^x + e^{2x}$.

(1) برر وجود حلين α و β للمعادلة $g(x) = 0$ في \mathbb{R} ، يحققان:

$$-0,42 < \alpha < -0,43 \quad \text{و} \quad 1,07 < \beta < 1,08$$

(2) حدد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمنحنى (P) ثم استنتج في \mathbb{R} إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{2(x-1)}{e^x - x} - x + 1$. (C_f) منحنياها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

(ب) تحقق من أن $f(x) = 2 \frac{(e^x - 1)}{e^x - x} - x - 1$.

بين أن المستقيم (Δ') الذي معادلته $y = -x - 1$ مقارب لـ (C_f) في جوار $-\infty$ ، ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ') .

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$.

(ب) حدد اتجاهات تغير الدالة f على \mathbb{R} ثم انجز جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) مماسا في النقطة ذات الفاصلة 0 . حدد الوضع النسبي لـ (T) و المنحنى (C_f) .

(5) أرسم بعناية المستقيمتين (Δ) ، (Δ') و (T) و المنحنى (C_f) . ($f(\beta) = 0,01$ و $f(\alpha) = -1,22$) .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كمايلي $h(x) = f(|x|)$ ، بين كيف يمكنك رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h إنطلاقا

من المنحنى (C_f) ثم ارسمه في المعلم السابق .

(7) جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ على \mathbb{R} ثم أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية ميلة

مقاطعة ميلة 1

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي (تجريبي)

دورة : ماي 2023

الشعبة : رياضيات

المدة : 04 ساعات ونصف

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (05 نقاط)

• لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح ، عينه مع التعليل :

(1) المعادلة $x^2 - 4y^2 = 5$ حيث x و y عدنان طبيعيان .

(أ) لا تقبل حلولا (ب) تقبل حلا واحدا فقط (ج) تقبل حلان

(2) الأعداد الطبيعية المحصورة بين 100 و 200 والتي تقبل القسمة على 9 وتكتب في نظام التعداد ذي

الأساس 6 على الشكل $x3y$ عددها :

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 9 .

(3) الحل f للمعادلة التفاضلية $y \ln 2 - y' - \ln 8 = 0$ حيث $f(0) = 19$ هي :

(أ) $f(x) = 2x + 19$ (ب) $f(x) = 2^{x+4} + 3$ (ج) $f(x) = 16e^{x \ln 2} - 3$

(4) معامل الحد الخامس في نشر $(2x-1)^9$ هو :

(أ) 2023 (ب) 4032 (ج) -2023

(5) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z والتي تحقق $Arg(-Z) = Arg(\bar{Z}) + 2\pi k$ هي :

(أ) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 . (ب) نصف مستقيم $[OM]$ ميله $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$. (ج) حامل محور الترتيب ما عدا O

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على \mathbb{N} كما يلي :

$$\begin{cases} u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)} \end{cases}$$

(1) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة على \mathbb{N} .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N} : $u_n < v_n$.

(3) إستنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان .

(4) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$ ، ثم إستنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين الثالث (04 نقاط)

n عدد طبيعي حيث $n > 4$. يحتوي صندوق U على n كرية لا يمكن التمييز بينها باللمس ، منها 3 حمراء

والبقية سوداء ، نسحب في آن واحد كرتين .

(1) أحسب إحتمال الحدثين التاليين :

الحدث A : " سحب كرتين من نفس اللون " .

الحدث B : " سحب كرية حمراء على الأكثر " .

(2) أحسب إحتمال الحدث C : " سحب كرية حمراء على الأكثر " .

(3) نعيد التجربة ونضيف صندوقين بحيث نرسم ب U_k للصندوق k ($1 \leq k \leq 3$) الذي يحتوي على k كرية حمراء و $n - k$ كرية سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ونسحب في آن واحد كرتين .

نسمي RR حادثة الحصول على كرتين حمراويتين و NN حادثة الحصول على كرتين سوداويتين

و RN حادثة الحصول على كرتين مختلفتين في اللون .

- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

(أ) أنجز شجرة الإحتمالات التي تتمذج الوضعية .

(ب) عين مجموعة قيم X .

(ت) أثبت أن : $P(X = 1) = \frac{4(3n - 7)}{3n(n - 1)}$ وأن : $P(X = 2) = \frac{8}{3n(n - 1)}$.

(ث) عين قانون إحتمال المتغير X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

• نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على R كمايلي : $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$.

و (ζ_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المنحنى (ζ_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلاتهما : $y = x - e$ و $y = -x + \ln 2$ عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (ζ_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ') .

(5) أنشئ (Δ) ، (Δ') و (ζ_f) .

(6) (Δ_m) المستقيمت التي معادلاتها $y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي .

(أ) بين أن جميع المستقيمت (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة هي $A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$.

(ب) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (ζ_f) .

(7) نضع : $J = \int_{\ln \sqrt{2+e}}^{\ln \sqrt{3+e}} [f(x) - (x - e)] dx$ و $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

(أ) فسر هندسيا العدد J و أحسب العدد I_1 .

(ب) بين أن : $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

(ج) عين إتجاه تغير المتتالية (I_n) ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

(د) إستنتج أنه من أجل كل $X \in]0; +\infty[$ فإن : $0 \leq J + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2+e}}^{\ln \sqrt{3+e}} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$.

(باستعمال : $\ln(1 + X) \leq X$) .

عين حصرا للعدد $J + I_1$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (4 نقاط)

• أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

(1) العدد المركب $-1+i$ جذر لكثير الحدود P للمتغير z المعروف بـ : $P(z) = z^3 + z^2 - 2$.

(2) المثلث ABC متقايس الأضلاع حيث A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها كما يلي :

$$z_C = -3 + 2i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_B = 3 + 2i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_A = -i\sqrt{3}$$

(3) الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$ هو : $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right) \right)$

(4) العددان المركبان z_1 و z_2 حيث : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_2 = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ هما الجذران التربيعيان للعدد المركب z

$$\text{حيث : } z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الجزء الأول: (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* بـ : $u_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $u_n > 0$

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$

(3) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - e^{2x}) \cdot e^{-2(n+1)x} dx$

(4) إستنتج إشارة $u_{n+1} - u_n$ ، ثم إستنتج تقارب المتتالية (u_n) .

(5) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N}^* بـ : $v_n = 2n \cdot u_n$ ، والمتتالية (w_n)

$$\text{المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ : } w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$$

(1) أكتب كل من u_n و w_n بدلالة n .

(2) بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(4) نضع : $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ و $S'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

- أحسب S_n ثم S'_n بدلالة n .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

(2) ب) إستنتج باقي قسمة العدد A_n على 10 حيث : $A_n = 2023^{16n+6} - 2 \times 39^{2n+3} + 108$

(3) نعتبر العدد الطبيعي B_n حيث : $B_n = (3n+4) \times 39^n + 2027^{2n+1}$ حيث n عدد طبيعي .

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $B_n \equiv (3n+1) \times 3^{2n} [10]$

(ب) إستنتج قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون B_n مضاعف للعدد 10 .

(4) N عدد طبيعي يكتب على الشكل $\overline{\alpha\alpha 0\alpha\alpha 02}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 ، ويكتب على الشكل $\overline{\beta 612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 .

أوجد العددين α و β ، ثم أكتب $(N+5)$ في النظام العشري .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $h(x) = 1 + \ln x \times \ln(\ln x)$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$

(2) أثبت أنه من أجل $x \in]1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + \ln(\ln x)}{x}$

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) إستنتج أن من أجل $x \in]1; +\infty[$: $h(x) > 0$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^{x \ln(\ln x)}$

(ζ_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عين نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها .

(2) (أ) أثبت أن من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{h(x) \times f(x)}{\ln x}$

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (ζ_f) عند النقطة ذات الفاصلة e .

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (ζ_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=1$.

(5) أنشئ (ζ_f) والمماس (T) .

(III) لتكن الدالة K المعرفة على $]1; +\infty[$ كمايلي : $K(x) = \frac{e^{[f(x)]^2}}{[e^{f(x)}]^2}$

(1) أحسب $K'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

(2) شكل جدول تغيرات الدالة K .



امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2023
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدة: 4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر α عددا من \mathbb{C} حيث

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \alpha\bar{\alpha} = 4 \\ \text{Im}(\alpha) > 0 \end{cases}$$

(I) 1. أ. أكتب العدد α على الشكل الجبري.

ب. أكتب العدد α^2 على الشكل الأسّي.

2. بين أن $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$.

3. استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $z_n = \alpha^n$.

1. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد z_{4n} تخيليا صرفا.

2. المتتالية العددية (U_n) معرفة على \mathbb{N} بـ $U_n = \arg(z_n)$.

أ. بين أن المتتالية (U_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. أحسب بدلالة n عبارة P_n حيث $P_n = \arg(\bar{z}_0 \times \bar{z}_1 \times \dots \times \bar{z}_n)$.

3. عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق ما يلي $\arg\left[(iz + \overline{iz_2})^2\right] = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثاني (4 ن)

ليكن k من \mathbb{N} حيث $k > 3$ ، ونعتبر ثلاثة صناديق غير شفافة U_1 ، U_2 و U_3 بها قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللّمس.

• الصندوق U_1 به قريصة خضراء و $(k-1)$ قريصة بيضاء.

• الصندوق U_2 به قريصتين خضراوين و $(k-2)$ قريصة بيضاء.

• الصندوق U_3 به ثلاث قريصات خضراء و $(k-3)$ قريصة بيضاء.

نختار عشوائيا أحد الصناديق ومن ثمّ نسحب قريصتين في آن واحد.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق النتيجة المحصّل عليها عدد القريصات الخضراء المسحوبة.

1. حدّد قيم المتغيّر العشوائي X .
 2. بين أنّ احتمال الحدث $(X = 2)$ يساوي $\frac{8}{3k(k-1)}$.
 3. بين أنّ $P(X = 1) = \frac{4(3k-7)}{3k(k-1)}$.
 4. استنتج قانون احتمال المتغيّر العشوائي X .
 5. علما أنّ القريصتين المسحوبتين خضراوين، أحسب احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_2 .
- التمرين الثالث (5 ن)**

المتتاليتين العدديتين (α_n) و (β_n) كلّ حدودهما موجبة ومعرفتان على \mathbb{N} كما يلي

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \beta_{n+1} = \sqrt{\beta_n^2 + 2^{n+1}\beta_n + 4^n} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + 4n \end{cases}$$

1. أ. بين أنّه من أجل كلّ n من \mathbb{N} ، $\beta_{n+1} = \beta_n + 2^n$.
 - ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ n من \mathbb{N} ، $\beta_n = 2^n$.
 2. نعتبر المتتالية (ω_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $\omega_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$.
 - أ. أكتب بدلالة n عبارة المجموع $\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$.
 - ب. استنتج أنّه من أجل كلّ n من \mathbb{N} ، $\alpha_n = 2n(n-1)$.
 3. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.
 - ب. عين قيم n من \mathbb{N}^* التي يكون من أجلها $[\frac{\alpha_n}{n} + \beta_n \equiv 0 \pmod{5}]$.
 4. من أجل كلّ عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع $X_n = \alpha_2 \times \alpha_3 \dots \times \alpha_n$.
 - أ. أكتب بدلالة n عبارة الجداء X_n .
 - ب. بين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، فإنّ $\beta_n \leq X_n$.
 - ج. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، $X_n \equiv 0 \pmod{\beta_n}$.
- التمرين الرابع (7 ن)**

(I) الدالة العددية φ معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{x}{x - \ln x} ; & x > 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_φ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

1. بين أنّه من أجل كلّ x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\ln x \leq x - 1$.
2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x}$ ومن ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.
3. بين أنّه من أجل كلّ x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$.

4. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ مفسراً النتيجة هندسياً، ومن ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة φ .
5. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_φ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
6. أنشئ كلاً من (T) و (C_φ) .

(II) الدالة العددية F معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $F(x) = \int_1^x \varphi(t) dt$.

1. بين أنّ الدالة F متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.
2. بين أنّه من أجل كلّ x من المجال $]1; +\infty[$ ، $1 + \frac{\ln t}{t} \leq \varphi(t) \leq 1 + \ln t$.
3. بين أنّه من أجل كلّ x من المجال $]1; +\infty[$ ، $x + \frac{(\ln x)^2}{2} - 1 \leq F(x) \leq x \ln x$.
4. أعط تفسيراً هندسياً للعدد $F(e)$ ومن ثمّ استنتج حصراً له.

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرفة كما يلي

$$(E) : 143x - 195y = 52$$

1. أ. أحسب $PGCD(195; 143)$ ومن ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- ب. تحقق أن الثنائية $(-1; -1)$ حل للمعادلة (E) ومن ثم استنتج حلول المعادلة في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. نعتبر λ, x و y أعداداً طبيعية غير معدومة حيث

$$\lambda^4 \equiv 1 [5] \quad \text{و} \quad x \equiv y [4]$$

أ. بين أنه من أجل كل λ من \mathbb{N}^* ، $\lambda^x \equiv \lambda^y [5]$.

ب. استنتج أنه من أجل كل λ من \mathbb{N}^* ، $\lambda^x \equiv \lambda^y [10]$.

3. ليكن α و β عدداً من \mathbb{N}^* حيث الثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (E).
- بين أنه من أجل كل λ من \mathbb{N}^* ، للعددين λ^α و λ^β نفس رقم الآحاد في النظام العشري.

التمرين الثاني (4 ن)

نعتبر β عدداً حقيقياً حيث $0 < \beta < 1$.

المتتاليتين العدديتين (λ_n) و (S_n) معرفتان على \mathbb{N} كما يلي: $\lambda_n = (1 - \beta)^n$ و $S_n = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

1. بين أن كل من (λ_n) و (S_n) متقاربة نحو نهاية يُطلب تعيينها.

2. نعتبر المتتالية (ω_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي

$$\begin{cases} \omega_0 > 0 \\ \omega_{n+1} = \omega_n + \frac{\lambda_n}{\omega_n} \end{cases}$$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\omega_n > 0$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (ω_n) .

ج. بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} ، $\omega_n \leq \frac{1}{\beta\omega_0} + \omega_0$.

د. استنتج أن (ω_n) متقاربة.

التمرين الثالث (4 ن)

كيس به بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللبس، منها k بطاقة حمراء و k بطاقة خضراء ($k > 1$).
نسحب عشوائياً على التوالي و بإرجاع n بطاقة من الكيس ($n > 1$).

نعتبر الأحداث الآتية

• الحدث A : "الحصول على كل البطاقات من نفس اللون".

• الحدث B : "الحصول على بطاقات مختلفة في اللون".

• الحدث C : "الحصول على بطاقة حمراء على الأكثر".

1. بين أن $P(A) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

2. أحسب بدلالة n احتمال كلّ من الحدثين C و $B \cap C$.
3. أ. بين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي حيث $n \geq 4$, $2^{n-1} > n + 1$.
- ب. بين أنّ الحدثين B و C مستقلان إذا وفقط إذا كان $n = 3$.

التمرين الرابع (7 ن)

نعتبر k عدداً من \mathbb{N}^* ، الدالة العددية φ معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي $\varphi_k(x) = \frac{x^k}{e^{kx}}$.

و (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{j}\| = 3cm$.

(I) 1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_k(x)$ ومن ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

2. أدرس حسب قيم k اتجاه تغيير الدالة φ_k ومن ثمّ شكّل جدول تغييراتها.
3. ناقش حسب قيم الوسيط k الأوضاع النسبية للمنحنين (C_k) و (C_{k+1}) .
4. أ. أكتب معادلة لكلّ من نصفي المماسين (T_1) و (T_2) للمنحنين (C_1) و (C_2) على الترتيب عند المبدأ O .
- ب. أنشئ كلّاً من (T_1) ، (C_1) ، (T_2) و (C_2) .
5. نرسم A_k مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (C_1) والمستقيمت ذات المعادلات $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = k$.
- أ. بين أنّ $A_k = 9(-ke^{-k} - e^{-k} + 1) cm^2$.
- ب. أحسب $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$.

(II) من أجل كلّ x من $[0; +\infty[$ ومن أجل كلّ k من \mathbb{N}^* نضع $G_k(x) = \int_0^x \varphi_k(t) dt$.

1. بين أنّه من أجل كلّ t من $[0; +\infty[$ ، $0 \leq \varphi_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$.
2. بين أنّه من أجل كلّ t من $[0; +\infty[$ ومن أجل كلّ k من \mathbb{N}^* ، $0 \leq \varphi_k(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$.
3. استنتج أنّه من أجل كلّ x من $[0; +\infty[$ ومن أجل كلّ k من \mathbb{N}^* ، $0 \leq G_k(x) \leq 2$.

(III) من أجل كلّ μ من $[0; +\infty[$ ومن أجل كلّ k من \mathbb{N}^* نضع $H_k(\mu) = \int_0^\mu t^k e^{-t} dt$.

1. أ. بين أنّه من أجل كلّ k حيث $k \geq 2$ ، $H_k(\mu) = -\mu^k e^{-\mu} + kH_{k-1}(\mu)$.
- ب. استنتج أنّه من أجل كلّ k حيث $k \geq 2$ ، $H_k(\mu) = -k!e^{-\mu} \sum_{p=2}^k \frac{\mu^p}{p!} + k!H_1(\mu)$.

ج. بين أنّ $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} H_k(\mu) = k!$.

2. من أجل كلّ x من $[0; +\infty[$ ومن أجل كلّ k من \mathbb{N}^* ، بين ما يلي

أ. $H'_k(kx) = k^k \varphi_k(x)$.

ب. $G_k(x) = \frac{H_k(kx)}{k^{k+1}}$.

3. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_k(x)$.

شعار العمل في هذا الموسم الدراسي { 2023 - 2024 } :

تَعَبُ الْمُرَاجَعَةِ أَفْضَلُ مِنْ أَلَمِ السَّقُوطِ

صُنْعُ تَاجِ الْأَمْتِيَّازِ الذَّهَبِيِّ نَحْوَ بَكَالُورِيَا 2024

بِالتَّوْفِيقِ وَ النَّجَاحِ لَجُمُوعِ التَّلَامِيذِ الشَّرَفَاءِ



<https://www.facebook.com/okba.bac.2010>