كوْكب النُّخبة العِلمية في مــادة الرِّياضيات - بكالوريا 2025 -

المحطة التحضيرية الألماسية نحو صُنع تاج الامتياز

بكـالوريات تجريبية مُختارة 2024 وَ مواضيع تحضيرية خاصة

الجزء الثاني : 02

،، خاص بشعبة ريــاضيات ،،

باقة الامتيـاز - { 15 } امتحان بكالوريا تجريبي تحضيري -

- { 10 } بكالوريات تجريبية مُنتقاة بعناية ،،
- { 05 } مواضيع تحضيرية للأستاذ علالو محمد ،،

،، جميع المواضيع مرفقة بالتصحيح النموذجي المُفصَّل ،،

مُلاحظة : يمكن لتلاميذ شعبتي علوم تجريبية و تقني رياضي الاستفادة من هذه الباقة نظرا للعامل المشترك في أغلب المحاور بين الشعب الثلاث ،، علما أنه سيتم رفع الجزء 3 الخاص بشعبة تقني رياضي ،،

شِعارنا ... ،، تعَب المُراجعة أفْضل مِنْ ألمِ السُّقوط ،،

المنصة العلمية : عقبة بن نافع https://www.facebook.com/okba.bac.2010

توجيهات المِنصة العلمية للنُّخبة - بكالوريا 2025 -

1* أيُّها التلاميذ الشُّرفاء ،، نضع بين أيديكم هذه الباقة المعلوماتية التطبيقية التحضيرية المُفعمة بالأفكار الطازجة والمفيدة في مادة **الرياضيات شعبة رياضي** ،، التي تتضمن ::

،، { **10** بكالوريات تجريبية مُختارة بعناية للموسم السابق + 05 مواضيع تحضيرية } ،،

،، من أجل التحضير و الاستعداد و ذلك بأخذ الأفكار الطازجة بشكل مباشر ،،

2* أيُّها النُّخبة هذه الباقة تعتبر محطة تحصيلية تحضيرية نحو اختبار الفصل الثالث **2025** ،، أي امتحان البكالوريا التجريبي ،، فـ امتحان البكالوريا ،، إذن المطلوب منكم هو استغلال هذه الفترة للمحاولة في هذه الباقة ،،

3* أيُّها النُّبلاء تجاوزوا الأفكار المُعادة لأنها وُضعت لفئة معينة من أجل التمرّن وكسب سرعة بديهية معتبرة في حين مصادفتها بمراعاة المستوى الفردي لكل تلميذ{ة} ،، طبعا ،،

4* أيُّها الشُّرفاء *النظاميين* : وَلْيكن في العلم أن هذه الباقة التحضيرية لاختبار الفصل الثالث تشمل أغلب المحاور ،، تعتبر محطة تحضيرية مركزة لها يجب استغلال الوقت للمحاولة في هذه الباقة مع تدوين الأفكار الطازجة بعد المحاولة ،، استعدادا للامتحان ،، مع ترك ما لم يتم التطرق له في القسم حتى يصل وقته المحدّد ،، و الله المُستعان .

5* أيُّها الشُّرفاء *الأحرار* : المطلوب منكم المحاولة في كامل مضمون الباقة لتكون بمثابة مرحلة التحضير المركز و مواكبة وتيرة الدروس النظامية للموسم الحالي ،، مع تدوين الأفكار طبعا ،،

6* أيُّها التلاميذ الشُّرفاء ،، بعد تفحص المواضيع و المحاولة في أكبر قدر منها نرجو تدوين الأفكار الطازجة في كراس خاص مع تحديد رقم الموضوع و التمرين ،، من أجل العودة لأخذها قُبيل موعد الامتحان الرسمي للبكالوريا في قادم الزمن .. تسهيلا لكم و استغلالا للوقت ،،

7* ***ملاحظة ختامية*** :: الباقة موجهة لشعبة : ***رياضيات*** ... أي أنه يمكن لشعبة تقني رياضي الاستفادة منها بالدرجة الأولى نظرا للعامل المشترك الأكبر في كل المحاور ... أما بالنسبة لشعبة علوم تجريبية الاستفادة منها في المحاور المشتركة فقط مع مراعاة البرنامج المقرر للشعبة طبعا ،،

تغريدة أمل : أيُّها التلاميذ الشُّرفـــــاءُ ،، إننَا نسعى لتوفير أجود المواد المعلومــاتية الأولية لكم ،، من أجل الإبداع في صُنعِ تاج الامتياز ،،

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

المادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات و نصف .

على المترشح أن يعالج أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول 4 نقاط

I-) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) \ldots\ldots$ $[z^2-4z+13][z^2-2(2-3\sqrt{2})z+49-30\sqrt{2}]=0$

1°) أنشر العبارة : $\left(3\sqrt{2}-3\right)^2$ ، ثم حل المعادلة (E) .

في المستوي المركب (P) النقط: $\omega\,;A\,;B\,;C\,;D$ التي لواحقها على الترتيب : $z_\omega=-1$; $z_A=2-3i$; $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=(2-3\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-3)i\,;z_D=\overline{z_C}$.

2°) أكتب العددين z_A-z_ω و $\frac{z_B-z_\omega}{z_A-z_\omega}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ωAB .

3°) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

4°) أ-) أكتب العددين $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج عمدة كل منهما .

ب-) أكتب المعادلة الديكارتية لـ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z-z_B|=|z-z_C|$ ، ثم جد z_I لاحقة I نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل محور الفواصل .

ج-) أحسب $|z_I-z_A|$ ، ثم استنتج أن النقط $A\,;B\,;C\,;D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

التمرين الثاني:4 نقاط

يحتوي الصندوق A على 4 كرات بيضاء ، و 3 كرات خضراء ، و كرتان حمروان . و يحتوي الصندوق B على 3 كرات بيضاء تحمل العدد $\frac{\pi}{4}$ ، و كرتان خضروان تحملان العدد $\frac{\pi}{2}$ ، وكرة حمراء تحمل العدد π . كل الكرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس .

نرمي مرتين زهرة نرد متجانسة ذات 4 أوجه مرقمة بـ : 2- ، 1- ، 1 ، 2 ، إذا تحصلنا على مجموع العددين معدوم نسحب من الصندوق A 3 كرات في آن واحد ، و إلا نسحب من الصندوق B كرتين على التوالي و بدون ارجاع .

نسمي A الحدث " السحب من الصندوق A و B الحدث " السحب من الصندوق B و C الحدث " الحصول على نفس اللون " و D الحدث " الحصول على لونين مختلفين ". E الحدث " الحصول على 3 ألوان مختلفة مثنى مثنى " .

1°) أحسب : $P(A)\,;P_A(C)\,;P_A(E)\ ;\ P_B(D)$.

2°) أ-) شكل شجرة الاحتمالات الشرطية التي تنمذج هذه التجربة .

ب-) باستعمال دستور الاحتمالات الكلية أحسب $P(C)$ ، ثم أحسب : $P_C(A)$.

3°) عند السحب من الصندوق B نسمي α العدد الذي تحمله الكرة الأولى و β العدد الذي تحمله الكرة الثانية و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية السحب العدد: $cos(\alpha+\beta)$ إذا كان السحب من الصندوق B ، و عدد الألوان إذا كان السحب من الصندوق A .

أ-) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب-) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

4°) نجمع كل الكرات و نضعها في كيس ثم نسحب 4 كرات على التوالي و بالارجاع . أحسب احتمال F الحصول على ألوان العلم الوطني .

التمرين الثالث:05 نقاط

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $14x - 5y = 26$ ...... (E)

1°) أ-) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن y زوجي .

ب-) عين الحل الخاص$(a;a+2)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

2°)أ-) إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) ، عين مجموعة القيم الممكنة لـ :$PGCD(x;y)$.

ب-) عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E)التي تحقق $PGCD(x;y) = 13$

3°) أ-) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب-) استنتج باقي القسمة على 13 للعدد A علما أن :$A = 1445^{2024} + 2974^{1444} + 2024^{1962}$.

ج-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4} \equiv 9^{2n+2}(n-1)[13]$ ، ثم عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4}$ مضاعف 13 .

4°) N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 9 على الشكل $\overline{1\delta\gamma5}$ و في النظام ذي الأساس 8على الشكل $\overline{2\beta\alpha5}$.

أ-) عين قيمة الرقمين α وβ ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي N في النظام العشري . علما أن $\gamma = \beta + 1$ و$\delta = 2\alpha$

5°) M عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس $n-1$ على الشكل $\overline{5m21}$ و في النظام ذي الأساس $n+1$ على الشكل $\overline{2mnn}$. عين قيمة الرقمين n وm ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي M في النظام العشري .

التمرين الرابع :07 نقاط

I-) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :$f(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-2}$ ، نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1°) أ-) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .

ب-) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2°) نقبل أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين a وb حيث $a \in]-0,95;-0,9[$، و$b \in]3,5;3,6[$. استنتج اشارة $f(x)$.

3°) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;2]$ فإن :$0 \le f(x) \le 1 - e^{-2}$

4°) F دالة عددية معرفة على المجال $]a;+\infty[$ كما يلي : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ، نسمي (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ-) ما ذا تمثل الدالة F بالنسبة للدالة f ، ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة F ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ب-) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة $F(x)$ بدلالة x .

ج-) أحسب بدلالة a مساحة الحيز من المستوي $\mathcal{A}(a)$ المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين $x = a$ و $x = 2$ معادلتي لهما ، ثم بين أن : $\mathcal{A}(a) = e^{-2}\left(a - 5 + \frac{1}{a+1}\right)$ و استنتج حصرا لـ :$\mathcal{A}(a)$.

د-) بين أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمحنى (C) و المنصف الأول $(\Delta): y = x$.

5°) أنشئ المحنى (C) و المنصف الأول (Δ).

6°) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = a$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = F(u_n)$

أ-) باستعمال الشكل الذي رسمته .مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) ، ثم خمن اتجاه تغيراتها و تقاربها .

ب-) برهن عن طريق التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :$a \le u_n \le \alpha$.

ج-) برهن صحة التخمين السابق .

د-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :$|u_{n+1} - \alpha| \le (1 - e^{-2})|u_n - \alpha|$.

هـ-) *استنتج أنه* من أجل كل عدد طبيعي n :$|u_n - \alpha| \le (f(0))^n|\alpha - a|$، *ثم أحسب استنتج* $\lim(u_n)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول(04ن): اختار الإجابة الصحيحة مع التعليل من بين ثلاث أجوبة مقترحة:

1 – نريد تشكيل عدد ذو 3 أرقام محصور بين 300 و500 وهذا بسحب ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع في كيس يحتوي على 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6 لا نفرق فيما بينها باللمس بحيث في السحب الأول نشكل رقم الآحاد وفي السحب الثاني نشكل رقم العشرات وفي السحب الثالث نشكل رقم المئات.

احتمال تشكيل هذا العدد يساوي : أ - $\frac{1}{12}$ ، ب - $\frac{1}{6}$ ، ج - $\frac{1}{3}$.

2 – نريد اختيار لجنة في مادة الرياضيات تقوم بتحضير مواضيع الاختبارات التجريبية للفصل الثالث تتكون من 4 أساتذ من بين 15 أستاذ (10 نساء و5رجال).

عدد طرق اختيار لجنة بحيث الأستاذة x تريد أن تكون في لجنة لا يوجد فيها السيدان y و z و لا توجد فيها السيدة t هو : أ –165 ، ب –330 ، ج - 220 .

3 – نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ العدد S حيث : $S=\frac{2-iz}{1-z}$ مع $z\neq 1$ من أجل $z=2$ فإن العدد S^{2024} أ – تخيلي صرف ، ب – حقيقي ، ج – معدوم.

4 –أكبر عدد صحيح سالب x للجملة التالية : $\begin{cases} x\equiv 2[3] \\ x\equiv 1[7] \\ x\equiv 4[5] \end{cases}$ هو :

أ – -57 ، ب - -69 ، ج - -76 .

التمرين الثاني (04ن):

1 - ادرس أوليـــــــــة العدد 421 ثم حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $4m+3n=m\times n-409$ حيث $m>n$.

2 – ABC مثلث قائم في A حيث : $AB=29$ ، $BC=x$ ، $AC=y$ مع x و y عددان طبيعيان غير معدومين

أ – عين قواسم مربع العدد 29

ب - عين المثلث ABC.

ج – بين أن : $PGCD(421;29;420)=1$.

3 – α عدد طبيعي. استنتج قيمة العدد α التي من أجلها يكون العددان α+2024 و α+1183 مربعين تامين.

4 – إليك عمليتين حسابيتين الأولى في نظام التعداد ذي الأساس a و الأخرى في نظام التعداد ذي الأساس b .

$$\overline{1141}^a+\overline{41}^a+\overline{1140}^a=\overline{2352}^a \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\overline{32}^b\times\overline{516}^b\right)=\overline{8316}^b \ldots\ldots\ldots(2)$$

أ/ عين a و b .

ب/ تحقق من صحة العمليتين في النظام العشري مفسرا هندسيا العمليتين بالنسبة للمثلث ABC.

التمرين الثالث (05ن):

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $U_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{4U_n}{U_n+6}$ حيث α عدد طبيعي .

1 – عين قيمة α حتى تكون (U_n) متتالية ثابتة .

2 – نضع فيما يلي : $\alpha=6$.

أ/ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n>0$.

ب/ - ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها ؟

ج/ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_{n+1}\leq\frac{2}{3}U_n$.

د/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ يطلب حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ من جديد .

4 – نعتبر (V_n) متتالية عددية حيث : $V_n = 1 - \frac{a}{U_n}$ حيث : a عدد حقيقي غير معدوم .

أ – عين قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب – أكتب V_n و U_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ مرة أخرى .

ج – أكتب بدلالة n المجاميع التالية : $S_n = \frac{1}{2U_0} + \frac{1}{2U_1} + \cdots + \frac{1}{2U_n}$ و $S'_n = V_0 + 2V_1 + 2^2V_2 + .. + 2^nV_n$.

التمرين الرابع (07ن):

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - \ln(x)$.

1/ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2/ بين أنه من أجل كل $x \in \,]0\,;\,+\infty[$ فإن $g(x) > 0$ ثم شكل جدول إشارة الدالة g .

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - x + 1 + \ln(x))$ ، (C) تمثيلها البياني

في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.وحدة الرسم 1cm .

1 – أ/ احسب ما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر بيانيا النتيجة الثانية ؟

ب/ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$ فسر بيانيا النتيجة ؟

ج/ ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$.

2 – أ/ بين أنه من أجل كل $x \in \,]0\,;\,+\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج/ بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \epsilon]0{,}4\,;\,0{,}5[$.

3 – أ/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) الذي يوازي (Δ) عند النقطة A يطلب تحديد احداثياتها .

ب/ بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف H يطلب تعيين احداثياتها .

ج/ أنشئ المنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المماس (T) بعناية .

4 – m وسيط حقيقي ، (D_m) مستقيم معادلته : $y = x + m$ عين قيم m بحيث المنحنى (C)و المستقيم (D_m) يتقطعان

في نقطة على الأكثر.

5 –احسب A بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات : $x = 1\,;\,x = e\,;\,y = x - 1$.

6 - h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة التالية : $h(x) + f(|x|) = 2$ ....(1) ، (C_h) تمثيلها البياني .

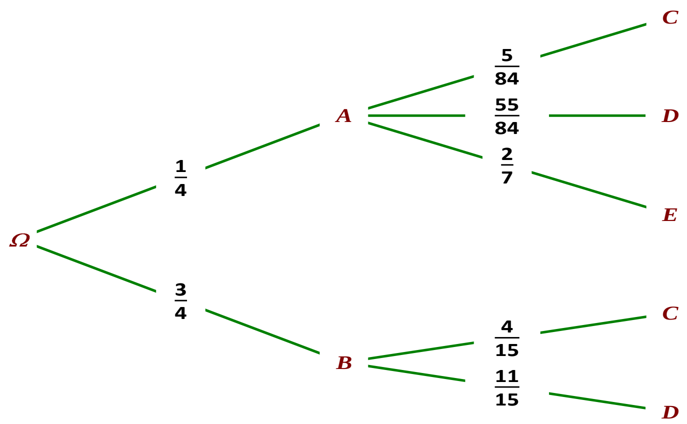
أ/ - فسر بيانيا العلاقة (1) التي تربط بين h و f . (يمكن وضع : $u(x) = f(|x|)$) .

ب/ عين العبارة الدستورية للدالة h .

ج/ أنشئ في معلم جديد المنحنى (C_h) ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

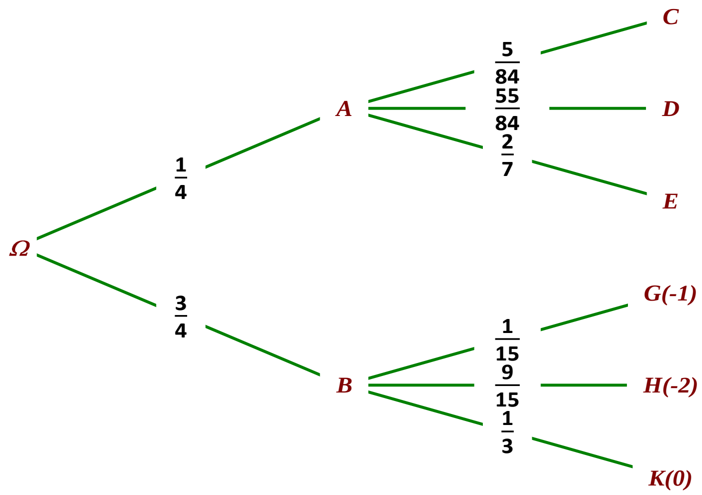
انتهى الموضوع الثاني.

الاجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين	السؤال	الاجابة النموذجية	العلامة
التمرين الأول	1-)	لدينا: $\left(3\sqrt{2}-3\right)^2=27-18\sqrt{2}$. حلول المعادلة هي: $S=\{2-3i\,;2+3i;(2-3\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-3)i;(2-3\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-3)i\}$	0,25 0,75
	2-)	لدينا: $z_A-z_\omega=3-3i=3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و $\frac{z_B-z_\omega}{z_A-z_\omega}=e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، و منه المثلث ωAB قائم في ω و متقايس الضلعين .	0,5 0,5
	3-)	لدينا: $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}=\frac{(3\sqrt{2}-3)}{3}$ ومنه $(AB)\parallel(CD)$ مما يعني أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف .	0,5
	4-) أ-)	لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})i}{6}$ و منه $Arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ لدينا: $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}$ و منه $Arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$	0,25 0,25
	ب-)	لدينا : $\lvert z-z_B\rvert=\lvert z-z_C\rvert$ يعني $\sqrt{2}x+(2-\sqrt{2})y+6-5\sqrt{2}=0$ و هي ومعادلة محور القطعة $[BC]$ ، ومنه $z_I=5-3\sqrt{2}$.	0,5
	ج-)	لدينا $\lvert z_I-z_A\rvert=3\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. و مما سبق نستنتج أن النقط $A\,;B\,;C\,;D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $3\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.	0,25 0 ,25
التمرين الثاني	1-)	لدينا: $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P_A(C)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ و $P_A(E)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{2}{7}$ و $\frac{11}{15}=\frac{2(A_3^1\times A_3^1+A_2^1\times A_2^1)}{A_6^2}=P_B(D)$.	0,75 0,25
	2-) أ-)	شجرة الاحتمالات : 	0,5
	ب-)	لدينا $P(C)=P\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)=(A)\times P_A(C)+P(B)\times P_B(C)=\frac{361}{1680}$ و $P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{25}{361}$.	0,25 0,25
	3-) أ-)	لدينا: $P(X=-1)=\frac{3}{4}\times\frac{A_2^2}{A_6^2}=\frac{1}{20}$ و $P\left(X=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{2(A_3^1)^2}{A_6^2}=\frac{9}{20}$ و $P(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{A_3^2+2A_2^1\times A_1^1}{A_6^2}=\frac{1}{4}$ ، و $P(X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{5}{84}=\frac{5}{336}$ و $P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{55}{84}=\frac{55}{336}$ و $P(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{24}{84}=\frac{24}{336}$	
	ب-)	(see table below)	1,25
	4-)		0,25

المجموع	و3	و2	و1	و0	و$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	و-1	وx_i
و$\frac{1680}{1680}$	و$\frac{24}{336}$	و$\frac{55}{336}$	و$\frac{5}{336}$	و$\frac{1}{4}$	و$\frac{9}{20}$	و$\frac{1}{20}$	P

لدينا: $P(F)=\frac{7^2\times5\times3+5^2\times7\times3+3^2\times7\times5}{15^4}\times\frac{4!}{2!}=\frac{28}{75}$ 0,5



التمرين الثالث

1°) ا- لدينا $14x-26=5y$ ومنه $5y\equiv 0[2]$ أي $y\equiv 0[2]$. 0,25

ب- لدينا $36=9a$ ومنه $a=4$ و بالتالي الثنائية $(4;6)$ حل خاص للمعادلة (E) . 0,25

لدينا $14(x-4)=5(y-6)$ ومنه $S=\{(5k+4;14k+6)/k\in\mathbb{Z}\}$. 0,5

2°) ا- مجموعة القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ هي: $D_{26}=\{1;2;13;26\}$. 0,25

ب- لدينا: $PGCD(x;y)=13$ يعني $\begin{cases}5k+4\equiv 13[26]\\14k+6\equiv 0[26]\end{cases}$ و منه $k=26m+7$ 0,5

و بالتالي: $S=\{(130m+39;364m+104)/k\in\mathbb{Z}\}$. 0,25

3°) ا- لدينا بواقي قسمة 9^n على 13 تشكل متتالية دورية دورها 3 نلخصها في الجدول التالي. 0,5

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$9^n\equiv$	1	9	3	[13]

ب- لدينا: $1445^{2024}=(1445^2)^{1012}$ و $1445^2\equiv 4[13]$ و منه $1445^{2024}\equiv 9[13]$. 0,25

و $2974\equiv 10[13]$ و منه $2974^{1444}\equiv(-3)^{1444}[13]$ و منه $2974^{1444}\equiv 3[13]$

و $2024\equiv 9[13]$ و منه $2024^{1962}\equiv 1[13]$ و عليه $A\equiv 0[13]$ 0,25

ج- لدينا: $9n\times 2024^{2n+1}-1445^{4n+4}\equiv(9^{2n+2})n-(-9)^{2n+2}[13]$

و عليه: $9n\times 2024^{2n+1}-1445^{4n+4}\equiv 9^{2n+2}(n-1)[13]$

د- إذا كان $n=3k$ فإن $3(3k-1)\equiv 0[13]$ أي $k=13m+9$ ومنه $n=39m+27$. 0,25

إذا كان $n=3k+1$ فإن $27k\equiv 0[13]$ أي $k=13m$ ومنه $n=39m+1$. 0,25

إذا كان $n=3k+2$ فإن $3k+1\equiv 0[13]$ أي $k=13m+4$ ومنه $n=39m+14$ 0,25

4°) لدينا: $N=5+9(\beta+1)+81(2\alpha)+729=5+8\alpha+64\beta+1024$ 0,25

و منه $154\alpha-55\beta=286$ و هذا يعني $14\alpha-5\beta=26$ و عليه $\alpha=4$ و $\beta=6$.

ومنه $N=1445$. 0,25

5°) لدينا: $M=1+2(n-1)+m(n-1)^2+5(n-1)^3$

و $M=n+n(n+1)+m(n+1)^2+2(n+1)^3$

و منه $n(3n^2-22n+9-4m)=8$ و منه $n=8$ و $m=6$ و عليه $M=2024$. 0,5

1°) أ- لدينا: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-e^{-2}$ و منه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y=-e^{-2}$ معادلة له . 0,5

ب- لدينا: $f'(x)=-xe^{-x}$ و منه الدالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ جدول التغيرات : 0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1-e(-2)$	↘	$-e(-2)$

0,25

اشارة العبارة $f(x)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2°) 0,25

التمرين الرابع

3°) لدينا الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند 0 و هي $1-e^{-2}$ على المجال $[a;2]$

ولدينا $f(a)=0$ و $f(2)=2e^{-2}$ و منه $0\leq f(x)\leq 1-e^{-2}$ — 0,25

4°) أ- الدالة $F: x\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]a;+\infty[$ و التي تنعدم عند a — 0,25

الدالة F متزايدة تماما على المجال $]a;b]$ و متناقصة تماما على المجال $[b;+\infty[$ — 0,25

x	a		b		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F(b)$	$\searrow$	$-\infty$

0,25

ب- بوضع $u'(t)=e^{-t}$ فإن $u(t)=-e^{-t}$ و $v(t)=(t+1)$ فإن $v'(t)=1$ — 0,25

إذن: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=[-(t+1)e^{-t}]_a^x+\int_a^x e^{-t}dt-e^{-2}\int_a^x dt$ — 0,25

و منه: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=(a+2)e^{-a}-(x+2)e^{-x}-e^{-2}(x-a)$.

ج- لدينا: $\mathcal{A}(a)=(a+2)e^{-a}+(a-6)e^{-2}ua$. لكن: $f(a)=0$ يعني $e^{-a}=\frac{e^{-2}}{a+1}$

و منه: $\mathcal{A}(a)=e^{-2}\left(a-5+\frac{1}{a+1}\right)\mu a$ و عليه $0{,}54\leq\mathcal{A}(a)\leq 1{,}91$ ؟ — 0,5

الدالة $\varphi: x\mapsto F(x)-x$ مستمرة و متناقصة تماما على $[1;2]$ و $\varphi(1)\times\varphi(2)<0$. — 0,25

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$.

د-

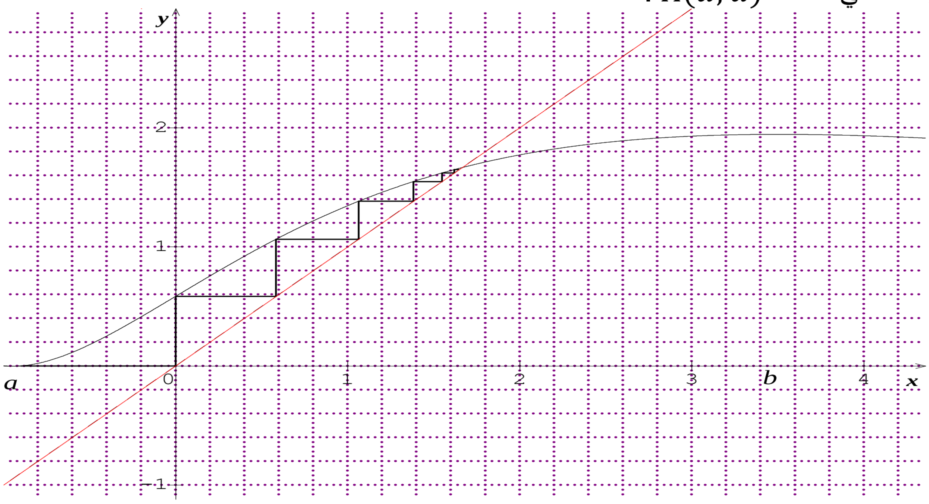
x	a		α		$+\infty$
$F(x)-x$		$+$	0	$-$	

0,25

و عليه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال $]a;\alpha[$ و يقع تحته في المجال $]\alpha;+\infty[$

و يقطعه في النقطة $A(\alpha;\alpha)$.

5°)



0,75

6°) أ- من خلال الشكل نخمن ان المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو α . — 0,25

ب- مرحلة 1 : لدينا من أجل $n=0$ و $u_0=a$ و منه $a\leq u_0\leq\alpha$ ....(1)

مرحلة 2 : نفرض أن : $a\leq u_n\leq\alpha$ و نبرهن أن $a\leq u_{n+1}\leq\alpha$. — 0,5

لدينا $a\leq u_n\leq\alpha$ و الدالة F متزايدة تماما على $[a;]$ ومنه $F(a)\leq F(u_n)\leq F(\alpha)$.

مما يعني أن: $a\leq u_{n+1}\leq\alpha$ ....(2)

من (1) و (2) و حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي : $a\leq u_n\leq\alpha$

ج- لدينا: $u_{n+1}-u_n=F(u_n)-u_n\geq 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ — 0,25

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة فهي متقاربة . — 0,25

د- لدينا: $|u_{n+1}-\alpha|=\left|\int_\alpha^{u_n}f(x)dx\right|$ و $0\leq f(x)\leq 1-e^{-2}$.

و منه $0\leq\left|\int_\alpha^{u_n}f(x)dx\right|\leq\left|(1-e^{-2})\int_\alpha^{u_n}dx\right|$. — 0,5

و عليه: $|u_{n+1}-\alpha|\leq(1-e^{-2})|u_n-\alpha|$.

إذا: $|u_n-\alpha|\leq(1-e^{-2})^n|\alpha-a|$ أي: $|u_n-\alpha|\leq(f(0))^n|\alpha-a|$. — 0,25

و منه : $\lim\ u_n=\alpha$. — 0,25

الإجابة النموذجية	التنقيط

التمرين الأول (4 نقاط):

1 – الإجابة ج 0,25

التعليل : $P(A)=\frac{A_2^1\times A_5^2}{A_6^3}=\frac{1}{3}$ .... 0,5+0,25

2 – الإجابة أ 0,25

التعليل: $C_1^1\times C_{11}^3=165$ .... 0,5+0,25

3 – الإجابة ب 0,25

التعليل: من أجل Z=2 معناه $S=-2+2i$ أي : $S=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin(\frac{3\pi}{4})\right)$ 0,25

حسب موافر : $S^{2024}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2024}(\cos(1518\pi)+isin(1518\pi))$ لكن :

$$\begin{cases}\cos(1518\pi)=\cos(0)=1\\ \sin(1518\pi)=\sin(0)=1\\ S^{2024}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2024}\end{cases}$$

ومنه العدد المطلوب حقيقي.................................... 0,25*2

4 – الإجابة ج 0,25

التعليل: أولا نقوم بحل الجملة : نجد : $x=105k+29$ 0,5

من أجل k=-1 نجد : $x=-76$ 0,25

التمرين الثاني (4 نقاط):

1 – دراسة أولية العدد 421: لدينا $\sqrt{421}=20{,}51$.

لنقسم العدد 421 على a الذي يمثل الاعداد الأولية الأصغر من 20 حيث q يمثل حاصل القسمة و r يمثل باقي القسمة

لنشكل الجدول التالي:

a	2	3	5	7	11	13	17	19
q	210	140	84	60	38	32	24	22
r	1	1	1	1	3	5	13	3

بما أن البواقي كلها غير معدومة إذن العدد 421 أولي 0,25

حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة المعطاة : $\begin{cases}4m+3n=m\times n-409\\ m>n\end{cases}$ تكافئ : $m\times n-4m-3n=409$

تكافئ : $\begin{cases}(m-3)(n-4)=421\\ m-3>n-4\end{cases}$ بما أن 421 أولي إذن :

نجد: m=424 و n=5 وهي حلول المعادلة 0,25*2

2 – أ / تعيين قواسم العدد 841: بما أن $841=29^2$ معناه العدد له 3 قواسم هي : $29^0;29^1;29^2$ وبالتالي :

$D_{841}=\{1;29;841\}$ 0,25

ب / تعيين المثلث ABC : يعني تعيين الضلعين $x;y$.

بما أن المثلث قائم حسب فيثاغورس لدينا : $x^2 = y^2 + 29^2$ معناه $(x+y)(x-y) = 841$ 0,25*2

لكن $x + y > x - y$ هذا يعني : $\begin{cases} x + y = 841 \\ x - y = 1 \end{cases}$ معناه $x = 421$; $y = 420$ 0,25*3

ج / تبيان أن $PGCD(421; 29; 420) = 1$:

بما أن العددان 420 و421 متتابعان معناه أنهما أوليان فيما بينهما كذلك العدد 29 أولي فهو أولي مع كل الاعداد التي

ليست من مضاعفاته و بالتالي $PGCD(421,29,420) = PGCD(1,29) = 1$ 0,25

3 – استنتاج قيمة α : $\alpha = 175217$ 0,5

4 – أ/ تعيين a وb: بالنسبة للعملية الأولى نجد: a=7 بالنسبة للعملية الثانية نجد: b=9 ....0,25*2

ب / تحقق من صحة العمليتين في النظام العشري فهي محققة 0,25

التفسير الهندسي: العملية الأولى تمثل محيط المثلث أما الثانية تمثل مساحة المثلث 0,25

التمرين الثالث (5 نقاط):

1 – تعيين قيمةα الطبيعية : $\alpha = 0$ 0,25

2 – أ / البرهان بالتراجع أن $U_n > 0$ 0,25*2

ب / دراسة اتجاه تغير المتتالية ندرس إشارة الفرق 0,25

استنتاج أن المتتالية متقاربة مما سبق 0,25

ج/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ معناه $U_{n+1} - \frac{2}{3} U_n \leq 0$

يكافئ $-\frac{2}{3}\frac{(U_n)^2}{(U_n+6)} \leq 0$ 0,5

د/ استنتاج أن: $U_n \leq 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$: من العلاقة السابقة من أجل n=0 نجد $U_1 \leq \frac{2}{3} U_0$

من أجل n=1نجد $U_2 \leq \frac{2}{3} U_1$

" " "

من أجل n-1 نجد $U_n \leq \frac{2}{3} U_{n-1}$

بالضرب طرف لطرف مع الاختزال نجد : $U_n \leq 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 0,25

حساب النهاية : $\lim U_n = 0$ لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ أساس متتالية هندسية 0,25

3 – برهان بالتراجع أن $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ 0,25*2

حساب النهاية من جديد : $\lim U_n = 0$ لأن : $\frac{3}{2} > 1$ أساس متتالية هندسية 0,25

4 –أ/ تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية : نجد a=-2 و الأساس $q = \frac{3}{2}$ و $V_0 = \frac{4}{3}$ 0,25*3

ب/ V_n ; U_n بدلالة n : $V_n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ و $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ 0,25*2

حساب النهاية من جديد: $\lim U_n = 0$ لأن $\lim V_n = +\infty$ 0,25

ج/ كتابة المجاميع بدلالة n : $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{4}n - \frac{11}{12}$ 0,25

$S'_n = \frac{2}{3}[3^{n+1} - 1]$ 0,25

التمرين الرابع (7 نقاط):

الجزء الأول:

1 - دراسة تغيرات الدالة g:

أولا النهايات: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ 0,25*2

ثانيا اتجاه التغير : $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ 0,25

$g'(x) = 0$ معناه :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

من أجل كل $x \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ الدالة g متناقصة تماما.

من أجل كل $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$ الدالة g متزايدة تماما 0,25

ثالثا تشكيل جدول التغيرات: 0,25

حيث : $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,84$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

2 – تبيان أنه من أجل كل $x > 0$ فإن $g(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن للدالة g قيمة حدية صغرى 0,84 عند $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي $g(x) > 0$.

و عليه جدول الإشارة يكون كما يلي: 0,25

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	

الجزء الثاني:

1 –أ/ حساب النهايات: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ 0,25*2

تفسير النهاية الثانية : المنحنى (C) يقبل محور التراتيب مقارب له معادلته $x = 0$ 0,25

ب/ تبيان أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0$ حسب التزايد المقارن 0,25

تفسير النتيجة بيانيا : لدينا $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln(x)}{x}$ معناه $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x}$

و بالتالي المنحنى (C) يقبل مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ 0,25

ج/ دراسة الوضع النسبي : إشارة الفرق من إشارة البسط $1+\ln(x)$ معناه $x=e^{-1}$.

جدول الإشارة:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1+ln(x)$	$-$	0	$+$

من أجل كل $x \in]0 \;;\; e^{-1}[$ المنحنى (C) يقع تحت (Δ)

من أجل كل $x > e^{-1}$ المنحنى (C) يقع فوق (Δ) 0,25

2 – أ/ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ 0,25

استنتاج اتجاه التغير : الدالة f متزايدة تماما 0,25

ب/ تشكيل جدول التغيرات: 0,25

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

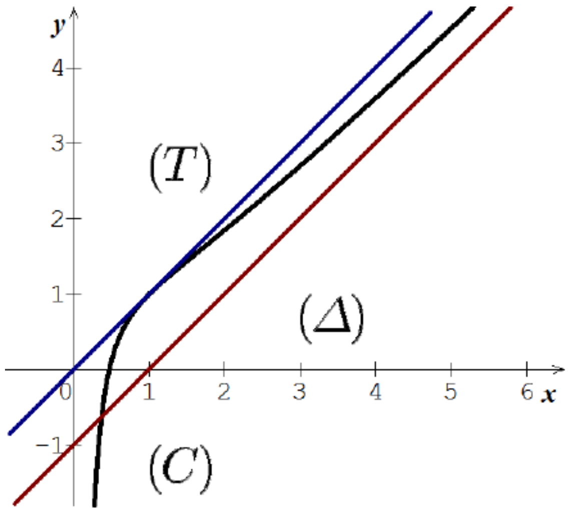
ج/ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α: حسب مبرهنة القيم المتوسطة 0,25

3 –أ/ كتابة معادلة المماس (T): $y=x$ عند النقطة $A(1;1)$ 0,25

ب/ تبيان أن المنحنى يقبل H نقطة انعطاف:

نجد: $f''(x)=\frac{2\ln(x)-1}{x^3}$ و $H(\sqrt{2}\;;1{,}55)$ 0,25

ج/ انشاء المنحنى (C) والمقارب (Δ) و المماس (T): 0,25*3



4 – قيم m بحيث المنحنى و المستقيم يتقطعان في نقطة على الأكثر هي : $m \in]-\infty\,;-1] \cup [0\;;\;+\infty[$ 0,25

5 – حساب المساحة A : نجد $A=\frac{3}{2}cm^2$ 0,25

6 –أ/ تفسير بياني للعلاقة (1): إذا وضعنا $u(x) = f(|x|)$ معناه $h(x) + u(x) = 2 \times 1$

هذا يعني (C_u) ; (C_h) متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$ 0,25

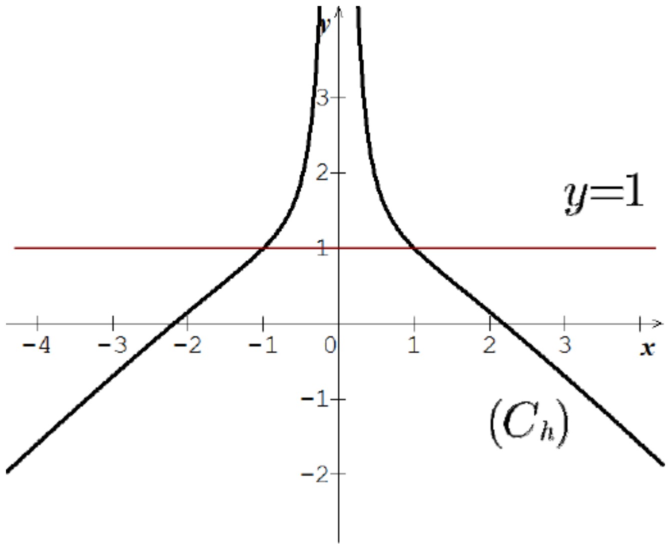
علما أن الدالة $u(x)$ زوجية منحناها البياني يكون كما يلي :

من أجل كل $x > 0$ المنحنيين (C) و (C_u) متطابقان ,

من أجل كل $x < 0$ نكمل رسم (C_u) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

ب/ تعيين العبارة الدستورية للدالة h: $h(x) = 2 - \frac{1}{|x|}\left[x^2 - |x| + 1 + ln|x|\right]$ 0,25

ج/ انشاء (C_h) في معلم جديد: 0,25



تشكيل جدول تغيرات الدالة u: 0,25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	‖	$-$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

انتهى

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية جيجل
المقاطعة الأولى -جيجل

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة: مـــــاي 2024م
الشعبة: ريــاضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 4 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-1+i$ و $Z_D=-Z_A$.

1/ ا/ أكتب كلا من العددين Z_A و Z_C على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لكل من Z_B و Z_D .

ب/ استنتج أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) معينا عناصرها المميزة.

2/ ا/ أكتب العدد $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب/ عين صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3/ بين أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق: $\overline{Z}=Z_Ae^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي يمسح $\mathbb{R}$ هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ نضع في وعاء عشرة كريات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة بالأعداد المركبة: Z_A ، Z_B ، Z_C ، Z_D ، $3i$ ، $-3i$ ، 2 ، -2 ، $\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{5}$.
نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الوعاء.

1/ أُحسب احتمال الحدثين: E «الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا حقيقيا صرفا»
F «الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا مركبا له عمدة θ حيث: $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$»

2/ ا/ أُحسب $P_F(E)$.

ب/ هل الحدثان E و F مستقلان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد: $M_n=4C_{n+1}^2-A_{n+3}^2+2$ مضاعفا للعدد 7 . (لاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n^2+4n+3=(n+2)^2-1$)

2/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

3/ ليكن العدد الطبيعي T_n الذي يُكتب في نظام العد ذو الأساس خمسة بالشكل: $T_n=\underbrace{\overline{111\cdots1}}_{(n+1)\text{ رقمًا}}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4T_n=5^{n+1}-1$ ، ثم استنتج أن: $PGCD(T_n;5^n)=1$.

ب/ ليكن m عددا طبيعيا. بين أن: ($4T_n\equiv m\ [7]$) يكافئ ($T_n\equiv 2m\ [7]$) .

ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $N = T_{2024} + 2T_{1445}$ على 7 .

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^n x + T_n y = 1 \quad \cdots \quad (E_n)$.

- بين أن المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) .

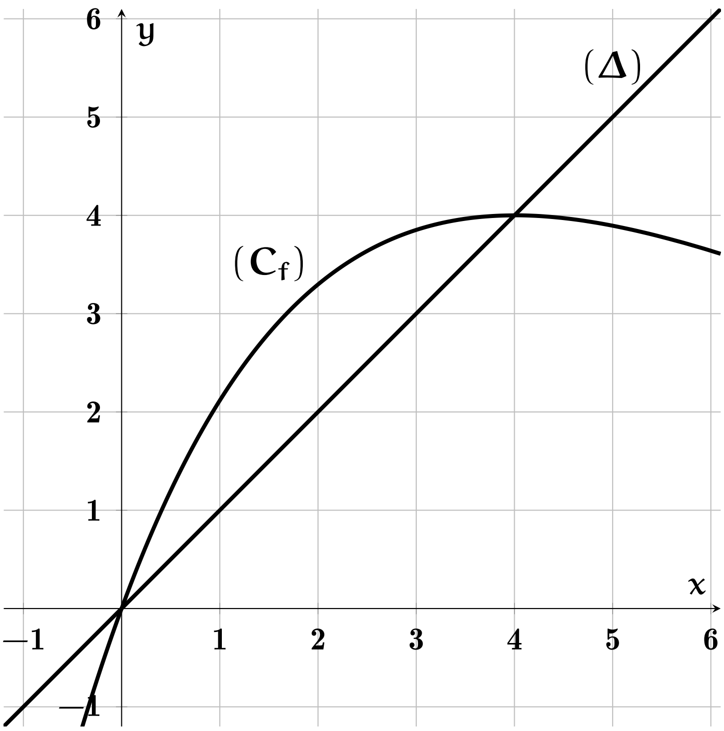
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بــ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$.

في الشكل المقابل المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث:

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x) = xe^{1-\frac{1}{4}x}$ ،

و (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.



1/ ا/ بقراءة بيانية، بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;4]$ فإن: $f(x) \in [0;4]$.

ب/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n).
(دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء)

ج/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

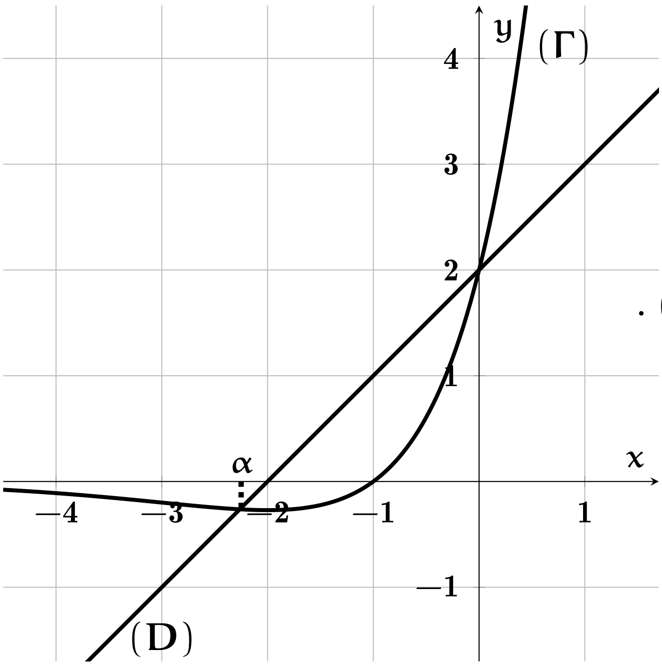
3/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

ا/ أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ب/ بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 4$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I/ في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \longmapsto (2x+2)e^x$

و (D) هو المستقيم ذو معادلة $y = x + 2$.

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1/ بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ إشارة: $g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـالعبارة:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x - 1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وشكّل جدول تغيراتها.

3/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينا فاصلتيهما.

4/ أُكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5/ ا/ أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: $2cm$)

ب/ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة.

6/ ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^{\ln 2} x.e^x(e^x - 2)dx = \frac{1}{4}(5 - 8\ln 2)$.

ب/ استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = 0$ و $x = \ln 2$ و $y = x$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء و كريتين خضراوين؛ بحيث كل الكريات متماثلة، لا يمكن التفريق بينها باللمس.

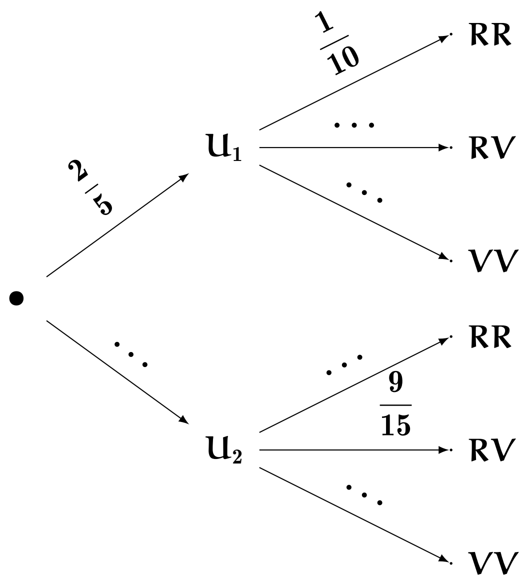
نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها؛

فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_1 ،

وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_2 .

1/ أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة:

(نرمز للكريات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)



2/ أُحسب احتمال الحدثين التاليين:

A «الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون»

B «الحصول على كرية حمراء على الأقل»

3/ بيّن أن: $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 .

ا/ برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ، 2 و 3 .

ب/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ج/ أُحسب الاحتمال: $P\left(C_3^X = 3\right)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، I و C لواحقها على الترتيب: $Z_A = -2$ ، $Z_I = -1$ و $Z_C = i$.

(γ) الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 ، و B نقطة من (γ) حيث: $\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{8}$.

1/ علّم النقط A و I و C ، ثم أنشئ الدائرة (γ) . (الوحدة $2cm$)

2/ استنتج طويلة العدد المركب $Z_B + 1$ وبين أن عمدة له هي: $\frac{\pi}{4}$ ، ثم استنتج الشكل الجبري لـ Z_B .

3/ أثبت أن العدد $\frac{Z_B + 1}{i + 1}$ حقيقي. ماذا تستنتج؟

II/ نرفق بكل نقطة M تختلف عن I ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = \frac{i(Z+2)}{Z+1}$.

1/ ا/ أثبت أن $\left(\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{MA}\right) + \frac{\pi}{2} = arg(Z')$.

ب/ عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيليا صرفا.

2/ ا/ أثبت أن $Z' - i = \dfrac{i}{Z+1}$.

ب/ نضع $Z = -1 + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi;\pi[$.

- استنتج أنه عندما تمسح النقطة M الدائرة (γ) فإن النقطة M' تمسح دائرة (γ') يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ ا/ عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009^2 على 16 .

ب/ استنتج أن: $2009^{8001} \equiv 2009\ [16]$.

2/ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالتالي:
$$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

ا/ بين أن u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ بين باستعمال دستور ثنائي الحد أن: $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

ج/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n مضاعف لــ 5^{n+1} .

3/ ا/ تحقق أن: $u_3 = 2009^{250} - 1$.

ب/ استنتج أن: $2009^{250} \equiv 1\ [625]$ و $2009^{8001} \equiv 2009\ [625]$.

4/ ا/ لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة.
برهن أنه إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان $PGCD(b;c) = 1$ فإن a مضاعف للجداء bc.

ب/ بين أن: $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000 .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ: $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

1/ أُدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

2/ استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $g(x) > 0$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بــ:
$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + x + 1 \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 1$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لــ (C_f) عند $+\infty$.

2/ ا/ أُدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون: $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

3/ أُحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: $2cm$)

4/ ا/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج بــ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ و $y = 0$.

5/ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بــ: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_n = e^{f(n)-n-1}$.

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. [يمكنك الإستفادة من نتيجة السؤال (**II** / **2**/ **ب**/)]

ج/ بيّن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ ، ماذا تستنتج؟

انتهى الموضوع الثاني.

رابط الإطلاع على الموضوع إلكترونيا، مع الإجابة النموذجية وسلم التنقيط:
(تُرفع الإجابة النموذجية بعد انتهاء فترة الإختبار مباشرة)

☺☺بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا☺☺

الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية -مـــاي 2024- في مادة الرياضيات (شعبة الرياضيات):

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/1/ ا/ **كتابة الأعداد على الشكل الأسي:**

لدينا: $|Z_A|=\sqrt{2}$ و $\arg(Z_A)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن:

$\bullet \boxed{Z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

ولدينا: $|Z_C|=\sqrt{2}$ و بوضع $\arg(Z_C)=\theta$ فإن:

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$ وبالتالي: $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

إذن: $\bullet \boxed{Z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

الإستنتاج:

$\bullet Z_B=\overline{Z_A}=\boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=Z_B}$.

$\bullet Z_D=-Z_A=e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})}=\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=Z_D}$

ب/ **الإستنتاج:**

لدينا: $|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=|Z_D|=\sqrt{2}$ ،

إذن: النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$.

2/ ا/ **كتابة العدد على الشكل الأسي:**

$$\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=\frac{1-i-1-i}{-1+i-1-i}=\frac{-2i}{-2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}} .$$

طبيعة المثلث ABC :

من الشكل الأسي نستنتج أن: $k\in\mathbb{Z}$; $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

وأن: $AB=AC$ ، إذن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

ب/ **صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:**

ولتكن M ذات اللاحقة Z ، وذلك معناه أن: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$

وعليه: $Z-Z_B=Z_C-Z_A$ إذن:

$$Z=Z_C-Z_A+Z_B=-1+i-1-i+1-i=-1-i=Z_D$$

إذن صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ هي النقطة D .

الإستنتاج:

لدينا $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ فالرباعي ABDC متوازي أضلاع،

وبما أن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين،

إذن الرباعي ABDC مربع.

3/ مجموعة النقط:

لدينا: $\overline{Z}=Z_Ae^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

ومنه: $Z=\sqrt{2}e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\theta)}=\sqrt{2}e^{i\theta'}\ ;\ \theta'=-\frac{\pi}{4}-\theta$

لما θ يمسح $\mathbb{R}$ فإن θ' يمسح $\mathbb{R}$ كذلك، وعليه تُصبح العلاقة:

$\boxed{Z=\sqrt{2}e^{i\theta'};\theta'\in\mathbb{R}}$ وذلك معناه أن: $|Z|=\sqrt{2}$ أي: $OM=\sqrt{2}$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها المبدأ O و نصف قطرها $\sqrt{2}$ و هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ وعاء به عشر كريات ونسحب عشوائيا منه كريتين في آن واحد،

إذن عدد الحالات الكلية للسحب هو: $C_{10}^2=45$.

1/ حساب الإحتمالات:

الحدث E : عدد الأرقام الحقيقية الصرفة في الوعاء هو 4 إذن:

$\bullet P(E)=\frac{C_4^2}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

الحدث F : عدد مركب له عمدة تنتمي إلى المجال: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ معناه جزؤه الحقيقي موجب، وعددها في الكيس هو 6 إذن:

$\bullet P(F)=\frac{C_6^2}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

2/ أ/ **الإحتمال الشرطي:** $\bullet P_F(E)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}=\dfrac{C_2^2}{15}=\dfrac{1}{15}.$

ب/ الحدثان E و F غير مستقلين، لأن: $P_F(E)\neq P(E)$.

(أو نقول لأن: $P(E)\times P(F)=\dfrac{2}{45}\neq P(E\cap F)$)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ **تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ بحيث يكون العدد M_n مضاعفا لـ 7 :**

لدينا: $\bullet M_n=4C_{n+1}^2-A_{n+3}^2+2=4\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}-\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}+2$

$=2(n+1)n-(n+3)(n+2)+2$

$=2n^2+2n-n^2-3n-2n-6+2=\boxed{n^2-3n-4=M_n}$

M_n مضاعف للعدد 7 معناه $M_n\equiv 0\,[7]$ ومنه: $n^2-3n-4\equiv 0\,[7]$

وبالتالي: $n^2+4n+3\equiv 0\,[7]$ أي: $(n+2)^2-1\equiv 0\,[7]$

ومنه: $(n+1)(n+3)\equiv 0\,[7]$ وبما أن 7 عدد أولي، فإن:

$n+1\equiv 0\,[7]$ أو $n+3\equiv 0\,[7]$ ومنه: $n\equiv -1\,[7]$ أو $n\equiv -3\,[7]$

أي: $n\equiv 6\,[7]$ أو $n\equiv 4\,[7]$ إذن: $\boxed{n\in\{7k+4;7k+6\ /\ k\in\mathbb{N}\}}$.

2/ **دراسة بواقي القسمة الإقليدية:**

لدينا: $5^0\equiv 1\,[7]$ و $5^1\equiv 5\,[7]$ و $5^2\equiv 4\,[7]$ و $5^3\equiv 6\,[7]$ و $5^4\equiv 2\,[7]$

و $5^5\equiv 3\,[7]$ و $5^6\equiv 1\,[7]$ وعليه:

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

3/ أ/ **الإثبات أن $4T_n=5^{n+1}-1$:**

$\bullet\ T_n=5^0+5^1+\cdots+5^n=5^0\left(\dfrac{5^{n+1}-1}{5-1}\right)=\dfrac{1}{4}(5^{n+1}-1)$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{4T_n=5^{n+1}-1}$.

الإستنتاج: لدينا $4T_n=5^{n+1}-1$ ومنه $\boxed{5\times 5^n-4\times T_n=1}$ ،

إذن حسب مبرهنة بيزو: $PGCD(5^n;T_n)=1$.

ب/ **إثبات التكافؤ:** ليكن m عددا طبيعيا:

$4T_n\equiv m\,[7]$ يكافئ $8T_n\equiv 2m\,[7]$ يكافئ $T_n\equiv 2m\,[7]$.

ج/ **استنتاج باقي قسمة العدد N على 7 :**

لدينا: $4T_{2024}=5^{2025}-1$ وبما أن: $2025=337(6)+3$

فإن: $5^{2025}\equiv 6\,[7]$ وبالتالي: $4T_{2024}\equiv 5\,[7]$ إذن: $T_{2024}\equiv 10\,[7]$

أي: $\boxed{T_{2024}\equiv 3\,[7]}\ \cdots(1)$

ولدينا: $4T_{1445}=5^{1446}-1$ وبما أن $1446=241(6)$

فإن: $5^{1446}\equiv 1\,[7]$ وبالتالي: $4T_{1445}\equiv 0\,[7]$ إذن: $T_{1445}\equiv 0\,[7]$

ومنه: $\boxed{2T_{1445}\equiv 0\,[7]}\ \cdots(2)$

من (1) و (2) نجد: $\boxed{N\equiv 3\,[7]}$ إذن باقي قسمة N على 7 هو 3 .

4/ **تبيان أن المعادلة** $5^n x+T_n y=1\ \cdots\ (E_n)$ **تقبل حلولا:**

لدينا $PGCD(5^n;T_n)=1$ إذن المعادلة (E_n) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

حل المعادلة (E_2) : لدينا: $5^2=25$ ولدينا: $T_2=\dfrac{1}{4}(5^3-1)=31$

لدينا حسب السؤال 3/أ/ : $\begin{cases}5^2x+T_2y=1\\5^2(5)+T_2(-4)=1\end{cases}$ بالطرح نجد:

$5^2(x-5)+T_2(y+4)=0$ ومنه: $5^2(x-5)=-T_2(y+4)\cdots(*)$ ومنه:

T_2 يقسم $5^2(x-5)$ وبما أن: $PGCD(5^2;T_2)=1$ فإن: T_2 يقسم $x-5$

أي: $x-5=T_2.k\,;k\in\mathbb{Z}$ إذن: $\boxed{x=31k+5\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $5^2.31k=-31(y+4)$ ومنه: $5^2.k=-y-4$

إذن: $\boxed{y=-25k-4\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$ إذن حلول المعادلة (E_2) هي الثنائيات:

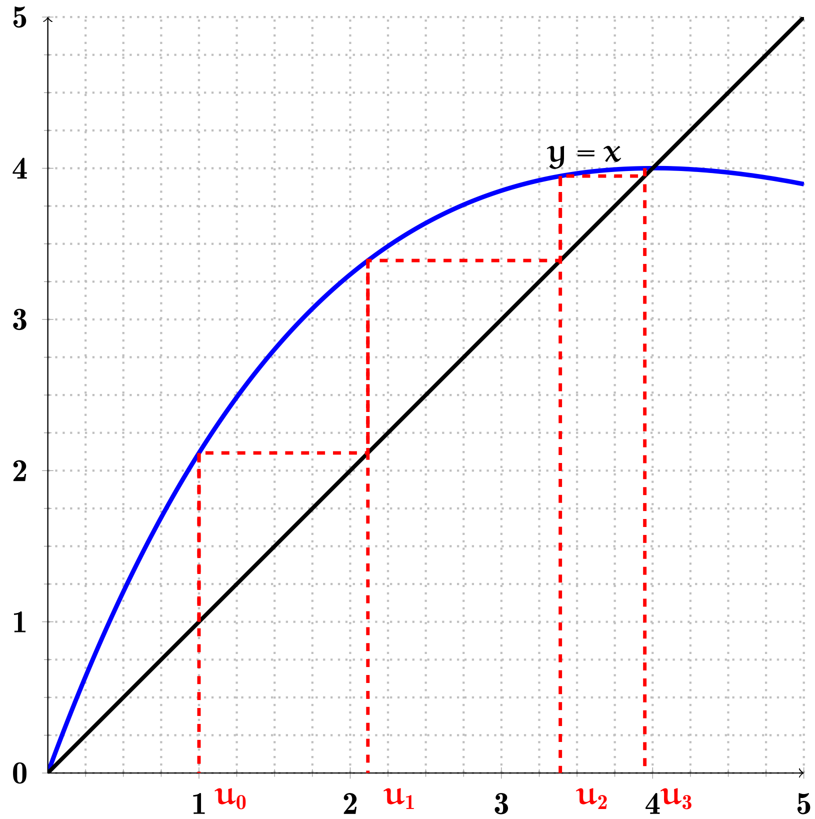
$\boxed{(x;y)=(\ 31k+5\ ;\ -25k-4\ )}$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ ا/ من خلال التمثيل البياني: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ ومنه من أجل كل x من هذا المجال فإن: $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي $0 \leq f(x) \leq 4$

إذن: $f(x) \in [0;4]$.

ب/ **تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) :**



ج/ **التخمين:**

من خلال التمثيل نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 4 .

2/ ا/ **البرهان بالتراجع:** نسمي الخاصية $P(n)$: $0 < u_n \leq 4$.

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ أي: $0 < u_0 \leq 4$ أي: $P(0)$ صحيحة.
- لنفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أي: $0 < u_n \leq 4$

ومنه: $0 < f(u_n) \leq 4$ أي: $0 < u_{n+1} \leq 4$.

إذن إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ **تبيان أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$:**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

وبما أن: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $1 > 1 - \frac{1}{4}u_n \geq 0$

فإن: $e > e^{1-\frac{1}{4}u_n} \geq 1$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

استنتاج إتجاه التغير:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ وبما أن (u_n) ذات حدود موجبة، فإن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3/ **إستنتاج أن (u_n) متقاربة:**

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، إذن هي متقاربة.

حساب النهاية:

المتتالية (u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ حيث a عدد حقيقي.

ومنه: $a = ae^{1-\frac{1}{4}a}$ وبالتالي: $1 = e^{1-\frac{1}{4}a}$ ومنه: $1 - \frac{1}{4}a = 0$

إذن: $a = 4$ إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

4/ $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

ا/ **إثبات عبارة الحد العام:**

الطريقة 1: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

ومنه: $\frac{1}{4}u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)-1$ إذن: $u_n = 4 - 4\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

وبالتالي: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

$$= 4 - 4\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + 4 - 4\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \cdots + 4 - 4\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$$

$$= (4+4+\cdots+4) - 4\left(\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)$$

$$= 4n - 4\ln\left(\frac{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}{u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}}\right)$$

$$= 4n - 4\ln(u_n)$$

وعليه: $4n - S_n = 4\ln(u_n)$ إذن: $\boxed{u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

الطريقة 2: (البرهان بالتراجع)

نسمي الخاصية: $P(n)\ :\ u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

- من أجل $n = 1$: لدينا من جهة: $u_1 = u_0 e^{1-\frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$

ومن جهة أخرى: $e^{1-\frac{1}{4}S_1} = e^{1-\frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$ إذن: $P(1)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n من $\mathbb{N}^*$ كيفي، أي: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$

لدينا: $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n} = e^{n-\frac{1}{4}S_n} e^{1-\frac{1}{4}u_n} = e^{n+1-\frac{1}{4}(S_n+u_n)}$

إذن: $u_{n+1} = e^{(n+1)-\frac{1}{4}S_{n+1}}$ وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\boxed{u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

الطريقة 3:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$ ، وبالتالي:

$$\begin{cases} u_1 = u_0 e^{1-\frac{1}{4}u_0} \\ u_2 = u_1 e^{1-\frac{1}{4}u_1} \\ \vdots \\ u_n = u_{n-1} e^{1-\frac{1}{4}u_{n-1}} \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف، ثم اختزال الحدود (لأن: $u_n > 0$) نجد:

$$u_n = u_0 e^{(1+1+\cdots+1)-\frac{1}{4}(u_0+u_1+\cdots+u_{n-1})}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

ب/ حساب النهاية:

لدينا: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$ ومنه: $S_n = 4n - 4\ln(u_n)$ إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n - 4\ln(u_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(4 - 4\frac{\ln(u_n)}{n}\right) = 4$$

(لأن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \ln 4$).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ $(\Gamma)\ :\ y = (2x+2)e^x$ و $(D)\ :\ y = x + 2$.

1/ الوضعية النسبية: بقراءة بيانية نجد:

- (Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما: 0 و α .
- (Γ) يقع فوق (D) على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha[$ و $]0;+\infty[$.
- (Γ) يقع تحت (D) على المجال: $]\alpha;0[$.

2/ إستنتاج إشارة $g(x)$: $g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$

من خلال الوضعية النسبية لـ (Γ) و (D) نجد:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II/ $f(x) = x(e^x - 1)^2$; $D_f = \mathbb{R}$.

1/ ا/ حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x(e^x-1)^2 = -\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^2 = 1$).

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(e^x-1)^2 = +\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^2 = +\infty$).

ب/ المستقيم المقارب المائل:

لدينا: • $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x(e^{2x}-2e^{x}+1)-x)$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{2x}-2e^{x})$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}(\tfrac{1}{2}2xe^{2x}-2e^{x})=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ج/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) :

لذلك ندرس إشارة:

$$f(x)-x=x(e^{x}-1)^{2}-x=x\left((e^{x}-1)^{2}-1\right)$$

$$=x\left(e^{x}-1-1\right)\left(e^{x}-1+1\right)=\boxed{xe^{x}(e^{x}-2)=f(x)-x}$$

وعليه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: - (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]-\infty;0[$ و $]\ln 2;+\infty[$.

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال: $]0;\ln 2[$.

- (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $O(0;0)$ و $A(\ln 2;\ln 2)$.

2/ تبيان أن: $x(e^{x}-1)\geq 0$: لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$x(e^{x}-1)$		$+$	0	$+$	

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^{x}-1)\geq 0$.

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{f'(x)=(e^{x}-1)^{2}+2xe^{x}(e^{x}-1)}$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^{x}(e^{x}-1)x\geq 0$ وكذلك $(e^{x}-1)^{2}\geq 0$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)\geq 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3/ إثبات عبارة المشتق الثاني: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x)=2e^{x}(e^{x}-1)+(2e^{x}+2xe^{x})(e^{x}-1)+2xe^{x}e^{x}$$

$$=2e^{x}(e^{x}-1+(1+x)(e^{x}-1)+xe^{x})$$

$$=2e^{x}(e^{x}-1+e^{x}-1+xe^{x}-x+xe^{x})$$

$$=2e^{x}(-x-2+e^{x}(2x+2))=\boxed{2e^{x}g(x)=f''(x)}$$

استنتاج نقاط الإنعطاف: لدينا: $f''(x)=2e^{x}g(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وعليه $f''(x)$ تنعدم عند كل من 0 و α وتغير إشارتها في جوارهما، إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما 0 و α

4/ معادلة المماس (T) :

$(T)\ :\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

وبما أن: $f(0)=0$ و $f'(0)=(1-1)^{2}+0=0$ فإن: $\boxed{(T)\ :\ y=0}$.

إثبات وحدانية المماس الذي يمر من المبدأ:

لذلك نحل المعادلة: $0=f'(a)(0-a)+f(a)$

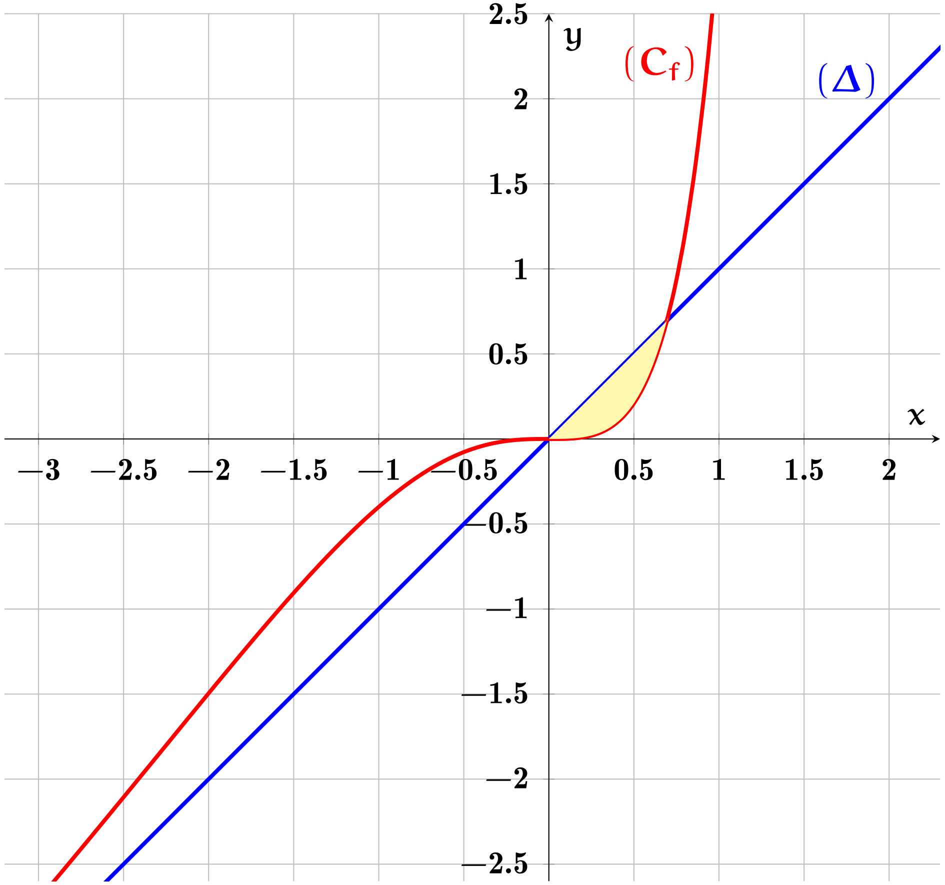
أي المعادلة: $-a[(e^{a}-1)^{2}+2a(e^{a}-1)]+a(e^{a}-1)^{2}=0$

تكافئ: $a(e^{a}-1)(-e^{a}+1-2a+e^{a}-1)=0$

تكافئ: $-2a^{2}(e^{a}-1)=0$ معناه: $a=0$.

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا يشمل المبدأ هو نفسه المماس (T) .

5/ أ/ الإنشاء:



ب/ تعيين قيم العدد الحقيقي m : بقراءة بيانية:

تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة لما $m \in]0;1[$.

6/ أ/ المكاملة بالتجزئة: لتبيان أن: $\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \dfrac{5-8\ln 2}{4}$

نعتبر: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x(e^x-2) \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}(e^x-2)^2 \end{cases}$

وبالتالي:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \left[\frac{1}{2}x(e^x-2)^2\right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^x-2)^2dx$$

$$= \left(\frac{\ln 2}{2}(e^{\ln 2}-2)^2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-4e^x+4)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+4x\right]_0^{\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}-4\times 2+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2+4\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(4-8\ln 2+1)$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \frac{1}{4}(5-8\ln 2)}$$

ب/ استنتاج المساحة: بما أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0;\ln 2]$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) على هذا المجال هي:

$$A = \int_0^{\ln 2}(x-f(x))dx = -\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx$$

$$= -\frac{1}{4}(5-8\ln 2)\ \ u.a = \frac{1}{4}(-5+8\ln 2)\times 4\ cm^2$$

$$\boxed{A = -5+8\ln 2\ cm^2}$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

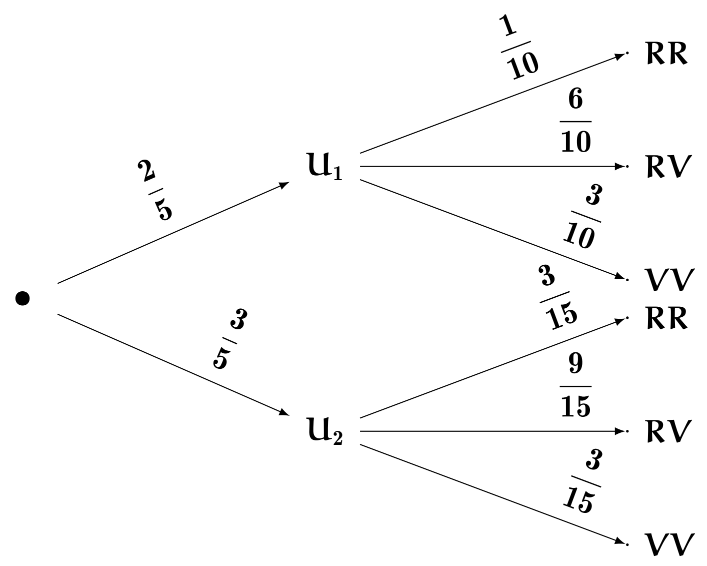
1/ إتمام شجرة الإحتمالات: لدينا:

$\bullet P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{3}{5}$

$\bullet P_{U_1}(RV) = \frac{C_3^1 . C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} \quad (= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}) \qquad \bullet P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

$\bullet P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} \quad (= 1 - \frac{3}{15} - \frac{9}{15}) \qquad \bullet P_{U_2}(RR) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$

وعليه:



2/ حساب إحتمالي الحدثين:

- **الحدث** A **:** الأولى حمراء والأخرتين حمراوين، أو الأولى خضراء والأخرتين خضراوين:

$P(A) = P(U_1)P_{U_1}(RR) + P(U_2)P_{U_2}(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{15}$

$\boxed{P(A) = \frac{4}{25}}$

- **الحدث** B **:** الأولى حمراء، أو الأولى خضراء والأخرتين واحدة حمراء والأخرى خضراء أو الأولى خضراء والأخرتين حمراوين.
(أو يمكن القول أنه الحدث العكسي لثلاث كريات خضراء-الأولى خضراء والأخرتين خضراوين)

$P(B) = P(U_1) + P(U_2)\left(P_{U_2}(RV) + P_{U_2}(RR)\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{9}{15} + \frac{3}{15}\right)$

$\boxed{P(B) = \frac{22}{25}} \qquad \left(P(B) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}\right)$

3/ حساب الإحتمال الشرطي:

$\bullet P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{15}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{4}{25}} = \boxed{\frac{3}{4} = P_A(U_2)}$

4/ ا/ قيم المتغير العشوائي X نلخصها كما يلي:

في حالة سحب الأولى حمراء (حالة سحب كريتين من U_1): نميز ثلاث حالات: إما: $U_1 - RR \to X = 3$ وإما: $U_1 - RV \to X = 2$

وإما: $U_1 - VV \to X = 1$

في حالة سحب الأولى خضراء (حالة سحب كريتين من U_2):

يبقى في الصندوق U_1 كريتان خضراوان، أي: $X = 2$.

إذن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 و 2 و 3 .

ب/ قانون إحتمال المتغير العشوائي X **:**

$\bullet P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25} \qquad \bullet P(X = 2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{25}$

$\bullet P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$ وعليه:

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X **:**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_iP(X=x_i)=1\times\frac{3}{25}+2\times\frac{21}{25}+3\times\frac{1}{25}=\frac{48}{25}$$

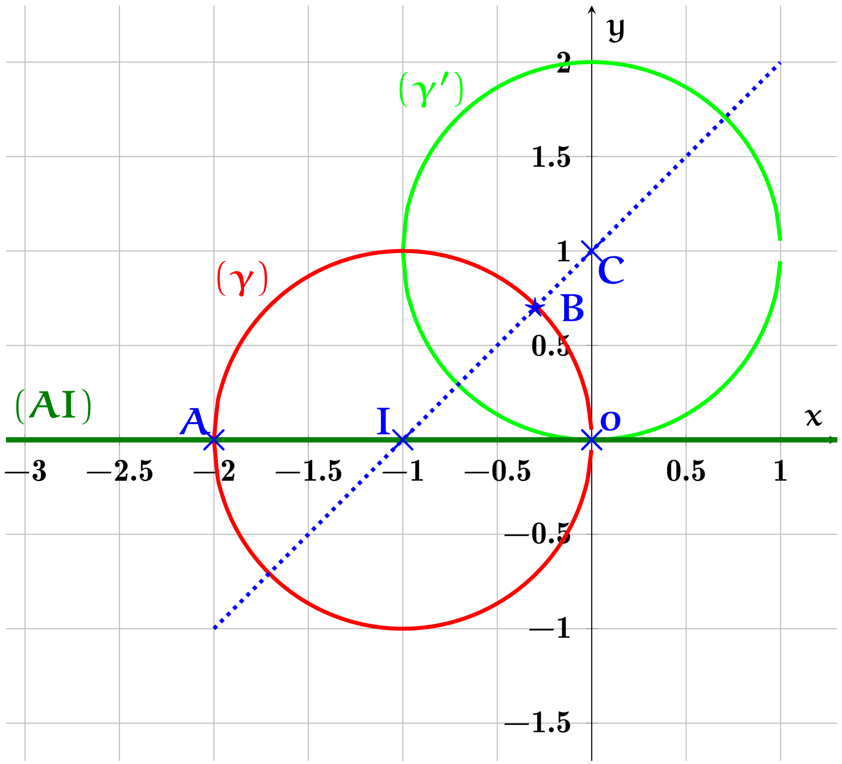
$\boxed{E(X)=1.92}$

ج/ حساب الإحتمال:

$$P(C_3^X=3)=P([X=1]\cup[X=2])=P(X=1)+P(X=2)=\frac{24}{25}$$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/1 الإنشاء:



2/ استنتاج الطويلة وعمدة للعدد Z_B+1 :

• $|Z_B+1|=|Z_B-Z_I|=IB=1$

• $\arg(Z_B+1)=\arg(Z_B-Z_I)=\left(\vec{u};\vec{IB}\right)=\left(\vec{IO};\vec{IB}\right)$

لدينا الزاوية الموجهة $\left(\vec{IO};\vec{IB}\right)$ هي زاوية مركزية في الدائرة (γ) ، زاويتها المحيطية هي: $\left(\vec{AO};\vec{AB}\right)$ إذن:

$$\left(\vec{IO};\vec{IB}\right)=2\left(\vec{AO};\vec{AB}\right)=2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$$

إذن: $\frac{\pi}{4}$ هي عمدةٌ للعدد المركب Z_B+1 .

الشكل الجبري لـ Z_B : لدينا: $Z_B+1=e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه:

$$Z_B=-1+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=Z_B}$$

3/ إثبات أن العدد حقيقي:

• $\frac{Z_B+1}{i+1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+i}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن العدد $\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}$ حقيقي.

الإستنتاج: لدينا العدد $\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}$ حقيقي موجب معناه:

$$\arg\left(\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}\right)=2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن النقط: I و B وC على استقامة واحدة.

II/1 ا/ الإثبات:

$$\arg(Z')=\arg\left(\frac{i(Z+2)}{Z+1}\right)=\arg(i)+\arg\left(\frac{Z+2}{Z+1}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{Z-Z_A}{Z-Z_I}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}+\left(\vec{MI};\vec{MA}\right)=\arg(Z')}$$

ب/ تعيين مجموعة النقط M بحيث Z' تخيلي صرف:

Z' تخيلي صرف معناه: $Z'=0$ أو $\arg(Z')=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي: $Z+2=0$ أو $\frac{\pi}{2}+\left(\vec{MI};\vec{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

أي: $M=A$ أو $\left(\vec{MI};\vec{MA}\right)=k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

إذن مجموعة النقط M في هذه الحالة هي المستقيم (AI) ماعدا النقطة I ، وهو منطبق على حامل محور الفواصل.

2/ أ/ إثبات العلاقة:

$$\bullet Z' - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - \frac{i(Z+1)}{Z+1}$$
$$= \frac{i(Z+2-Z-1)}{Z+1} = \boxed{\frac{i}{Z+1} = Z' - i}$$

ب/ لدينا: $Z = -1 + e^{i\theta}$ أي: $Z - Z_I = +e^{i\theta}$ وبالتالي:

$$\begin{cases} |Z - Z_I| = 1 \\ \arg(Z - Z_I) = \theta \end{cases}$$ معناه: $$\begin{cases} IM = 1 \\ \left(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IM}\right) = \theta \end{cases}$$

لما θ تمسح المجال $]-\pi;\pi]$ فإن: M تمسح الدائرة (γ) ،
وعندئذ بالتعويض في العلاقة في السؤال السابق نجد:

$$Z' - i = \frac{i}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

أي: $\boxed{Z' - Z_C = e^{i\theta'}}$ حيث: $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$

وذلك معناه: $$\begin{cases} |Z' - Z_C| = 1 \\ \arg(Z' - Z_C) = \theta' \end{cases}$$ أي: $$\begin{cases} CM' = 1 \\ \left(\vec{u};\overrightarrow{CM'}\right) = \theta' \end{cases}$$

وبالتالي لما M تمسح الدائرة (γ) أي لما θ تمسح المجال $]-\pi;\pi]$
فإن θ' تمسح المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$
وعندئذ النقطة M' تمسح دائرة (γ') مركزها النقطة C ونصف قطرها 1 .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ أ/ تعيين باقي القسمة الإقليدية: لدينا: $2009 = 16(125) + 9$ ومنه:
$2009 \equiv 9\,[16]$ ومنه: $2009^2 \equiv 81\,[16]$ أي: $2009^2 \equiv 1\,[16]$ إذن
باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1 .

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $2009^2 \equiv 1\,[16]$ ومنه: $(2009^2)^{4000} \equiv 1\,[16]$ أي:
$2009^{8000} \equiv 1\,[16]$ وبما أن: $2009 \equiv 9\,[16]$
فإن: $2009 \times 2009^{8000} \equiv 2009\,[16]$ أي: $\boxed{2009^{8001} \equiv 2009\,[16]}$.

2/
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

أ/ تبيان أن u_0 يقبل القسمة على 5 :

لدينا: $2009 \equiv 4\,[5]$ أي: $2009 \equiv -1\,[5]$ ومنه: $2009^2 \equiv 1\,[5]$
وبالتالي: $2009^2 - 1 \equiv 0\,[5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ إثبات العلاقة التراجعية:

$$u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 = -1 + \sum_{p=0}^{5} C_5^p (u_n)^{5-p}(1)^p$$
$$= -1 + C_5^0u_n^5 + C_5^1u_n^4 + C_5^2u_n^3 + C_5^3u_n^2 + C_5^4u_n + C_5^5u_n^0$$
$$= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1$$
$$= u_n\left(u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5\right)$$
$$\boxed{u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]}$$

ج/ البرهان بالتراجع: نسمي الخاصية: "u_n مضاعف لـ: 5^{n+1}" : $P(n)$.
ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- من أجل $n = 0$:

لدينا u_0 يقبل القسمة على 5 أي u_0 مضاعف لـ 5 إذن $P(0)$ صحيحة.

- ليكن n عددا طبيعيا. لنفرض صحة $P(n)$ أي: u_n مضاعف لـ 5^{n+1}
ومنه: u_n^4 مضاعف لـ مضاعف لـ 5^{n+1} أي أنه مضاعف لـ 5 ،
وكذلك $5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5
إذن $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ مضاعف لـ 5
أي: $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) = 5k$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$.
ولدينا u_n مضاعف لـ 5^{n+1} معناه: $u_n = 5^{n+1}q$ بحيث $q \in \mathbb{Z}$.
وبالتالي: $u_n\left[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)\right] = 5^{n+1}q5k = 5^{n+2}qk$
معناه: u_{n+1} مضاعف لـ 5^{n+2} ، إذن $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

/3 ا/ **التحقق:** لدينا: $u_1 = (u_0+1)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$

ومنه: $u_2 = (u_1+1)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$

إذن: $u_3 = (u_2+1)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$

ب/ **الإستنتاج:**

مما سبق نستنتج أن u_3 مضاعف لـ 5^4 أي أن u_3 مضاعف لـ 625

ومنه: $2009^{250} - 1 \equiv 0\ [625]$ إذن: $\boxed{2009^{250} \equiv 1\ [625]}$

ومنه: $(2009^{250})^{32} \equiv 1\ [625]$ أي: $2009^{8000} \equiv 1\ [625]$ إذن: $\boxed{2009^{8001} \equiv 2009\ [625]}$

/4 ا/ **البرهان:**

لتكن a و b و c أعدادا صحيحة غير معدومة، بحيث: a مضاعف لكل من b و c ، و b و c أوليان فيما بينهما.

الطريقة 1:

a مضاعف لـ b معناه: $a = b.k\ ;\ K \in \mathbb{Z}\ \cdots\ (*)$

وبما أن a مضاعف لـ c فإن c يقسم a أي c يقسم $b.k$

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإن: c يقسم k ، أي $k = c.q\ ;\ q \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $a = b.c.q$ إذن a مضاعف للجداء bc .

الطريقة 2:

a مضاعف لـ b معناه: b يقسم a ،

و a مضاعف لـ c معناه: c يقسم a ،

ومنه الجداء bc يقسم a لأن b و c أوليان فيما بينهما،

أي: a مضاعف للجداء bc .

ب/ **تبيان قابلية قسمة العدد $2009 - 2009^{8001}$ على 10000 :**

لدينا: $2009^{8001} \equiv 2009\ [16]$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\ [16]$

إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 16 .

ولدينا: $2009^{8001} \equiv 2009\ [625]$ أي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\ [625]$

إذن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف لـ 625 .

ولدينا: $16 = 2^4$ وكذلك: $625 = 5^4$ إذن: $PGCD(16;625) = 1$ ؛

نستنتج أن العدد $2009^{8001} - 2009$ مضاعف للجداء: $10000 = 16 \times 625$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/1/ دراسة تغيرات الدالة g :

• **النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right) = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x} = 1$ و $\ln 1 = 0$ ، وكذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$)

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{x+1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ ،

وكذلك: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x+1} = 1$)

• **إتجاه التغير:** لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x-x-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2} = g'(x)}$$

نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما،

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

• **جدول التغيرات:**

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

2/ الإستنتاج: بقراءة جدول التغيرات للدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

II/ من أجل كل $x > 0$: $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1$ و $f(0) = 1$.

1/ أ/ **تبيان النهاية:**

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(1+t)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \boxed{1 = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right] = +\infty \ .$$

ب/ **تبيان أن $y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :**

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x - 2) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1\right] = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

2/ أ/ **دراسة قابلية الإشتقاق عن 0 :**

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1 = +\infty$$

إذن الدالة غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور التراتيب معادلته: $x = 0$.

ب/ **تبيان عبارة المشتقة:**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x.\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} + 1$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\left(\frac{x - x - 1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 = \boxed{g(x) + 1 = f'(x)}$$

إتجاه التغير:

لدينا مماسبق من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

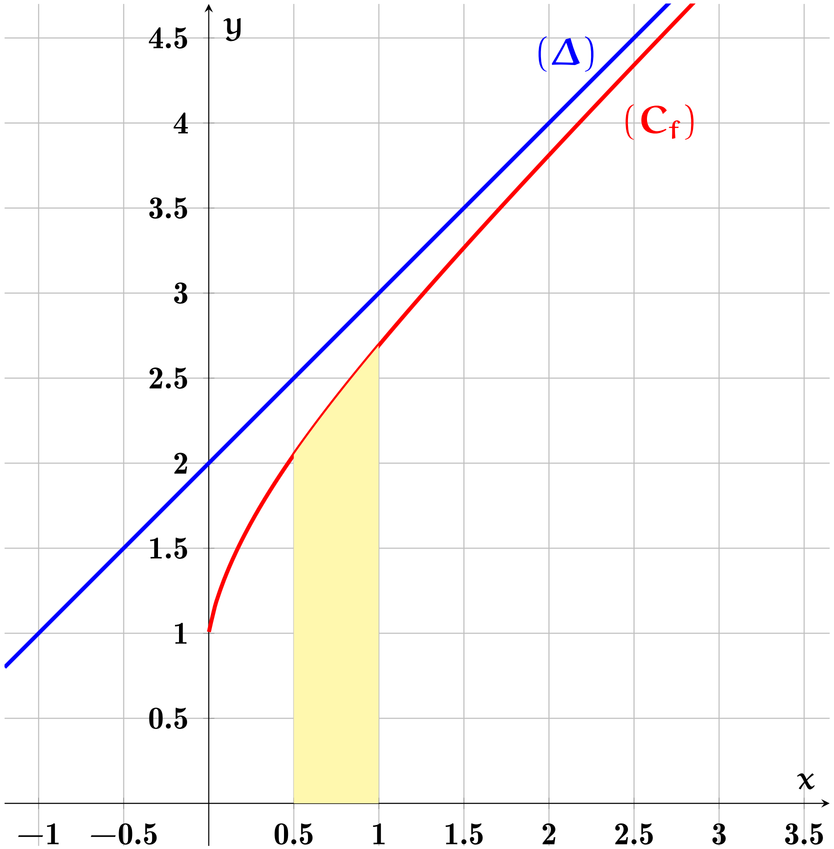
ومنه: $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

3/ الإنشاء:

$f(1) = 2 + \ln 2 \approx 2.7$



/4 أ/ تبيان أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}xf'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x(g(x)+1) - \frac{1}{x+1} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + x - \frac{1}{x+1} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x+1}{x+1} + x + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right) = \frac{1}{2}(2f(x)) \end{aligned}$$

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

إذن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتاج مساحة الحيز:

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات: $y=0$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} = F(1) - F(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ u.a = \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \times 4\ cm^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ cm^2}$$

/5 $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ ;\ n \in \mathbb{N}^*$.

أ/ إثبات عبارة الحد العام:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$e^{f(n)-n-1} = e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = u_n$$

ب/ إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

نعتبر الدالة h المرفقة بعبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

الدالة h معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = e^{f(x)-x-1}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$h'(x) = (f'(x)-1)e^{f(x)-x-1} = g(x)e^{f(x)-x-1}$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

فإن: $h'(x) > 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ؛

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ج/ تبيان النهاية:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{f(n)-n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e$.

(لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$) .

الإستنتاج:

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد e .

تمنياتنا بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا لكل تلاميذنا الشرفاء...

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدّة: 4 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي

$$(E) : 650x - 732y = 486$$

.1 أ. أُحسب $PGCD\,(650;732)$ ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

ب. تحقّق أنّ الثنائية $(3;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

.2 نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha 0 \alpha \beta \beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{\beta 6 \beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عددان طبيعيان.

- عيّن كلّا من α و β ثمّ أُكتب L في النظام العشري.

.3 حلّل العدد 1962 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962 \equiv 0\,[n^2]$

.4 نضع : $PGCD\,(a;b) = d$ و $PPCM\,(a;b) = m$ حيث $(a;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ التي تحقّق

$$\begin{cases} m - 91d = 0 \\ a^2 + b^2 = 1962 \end{cases}$$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0 = 0$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}$

I) **.1** برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \le U_n < \sqrt{3}$

.2 أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \dfrac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}$

ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \dfrac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

.1 أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 ويُطلب تعيين حدّها الأوّل V_0

ب. بيّن أنه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $U_n = \sqrt{\dfrac{3n}{n+1}}$ ثمّ أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \dfrac{2024}{n+\sqrt{V_1}} + \dfrac{2024}{n+\sqrt{V_2}} + \cdots + \dfrac{2024}{n+\sqrt{V_n}}$

أ. بيّن أنه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{2024n}{n+\sqrt{n}} \leq S_n \leq \dfrac{2024n}{n+1}$

ب. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثالث (5 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'' = \pi^2 e^{\pi x+\pi}$ الذي يحقّق $y(0) = e^{\pi}$ و $y'(-1) = \pi$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

أ) $h(x) = e^{\pi x+\pi}$ ب) $h(x) = \pi x + e^{\pi}$ ج) $h(x) = e^{\pi x+\pi} + \pi x$

2. عدد الإمكانيات لتشكيل عدد مضاعف للعدد 5 ومكوّن من ثلاثة أرقام متمايزة مثنى مثنى باستخدام مجموعة الأرقام $\{0; 1; 9; 5; 4\}$ هو

أ) 5 ب) 24 ج) 21

3. إذا كان n عددا من $\mathbb{N}^*$ فإنّ المجموع : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x}dx$ يساوي

أ) $\dfrac{[\log(n+1)]^2}{2\ln 10}$ ب) $\dfrac{\log(n+1)}{\ln 100}$ ج) $\dfrac{\ln(n+1)\times\log(n+1)}{2}$

4. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = \sin\dfrac{\pi}{8} + i\cos\dfrac{\pi}{8}$ فإنّ

أ) $\arg(z) \equiv \dfrac{3\pi}{8}\,[2\pi]$ ب) $\arg(z) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ ج) $\arg(z) \equiv \dfrac{5\pi}{8}\,[2\pi]$

5. مجموعة حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} \leq 3$ ذات المجهول الحقيقي x هي المجال

أ) $[0; +\infty[$ ب) $]-\infty; 0]$ ج) $[-3; 1]$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = xe^{x-1} - 1$

1. بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

ب. استنتج حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$ إشارة العبارة : $g(x) - 1$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^{x-1} - 2\ln x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. أ. أُحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)-1}{x}$

ج. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

2. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha)\approx -0,2$).

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x+e^{m+1}(x-1)=e\left(\ln x^2+1\right)$

3. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $0<\lambda<1$

أ. أُكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda)=\displaystyle\int_{\lambda}^{1} f(t)dt$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّ $\displaystyle\lim_{\lambda \overset{>}{\to} 0}\mathcal{A}(\lambda)=\left(2-e^{-1}\right)cm^2$

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

صندوق به 6 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها ثلاث بطاقات حمراء، بطاقتين خضراوين وبطاقة بيضاء.
البطاقات الحمراء تحمل الحروف: E ، N و N ، البطاقتين الخضراوين تحملان الحرفين: N و S ، أمّا البيضاء تحمل الحرف S
نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث بطاقات في آن واحد.

I) **1.** أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين

أ. A: " الحصول على بطاقتين من نفس اللّون بالضّبط ".

ب. B: " الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أنّ تشكّل كلمة ENS ".

2. أ. بيّن أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، ثمّ استنتج أنّ الحدثين A و B ليسا مستقلين.

ب. أُحسب $P_A\left(\overline{B}\right)$ (احتمال الحدث $\overline{B}$ علما أنّ الحدث A محقّق)

II) نضيف إلى الصندوق n بطاقة تحمل الحرف E حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الصندوق بطاقتين على التوالي وبإرجاع، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب لبطاقتين عدد مرّات ظهور الحرف S

1. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0; 1; 2\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

2. عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\int_0^X te^t dt = 1\right) = \frac{3}{8}$

التمرين الثاني (4 ن)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(\overline{2iz + \sqrt{3} + i}\right)(z^2 + 2z + 2) = 0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها z_A، z_B، z_C و z_D على الترتيب حيث: $z_A = -1+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $2z_C = z_A \times \left(1 + i\sqrt{3}\right)$ و $z_A + z_D = 0$

1. أ. أُكتب z_A على الشّكل المثلّثي ثمّ استنتج كتابة z_C على الشّكل المثلّثي.

ب. أُكتب z_C على الشّكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos \frac{13\pi}{12}$ و $\sin \frac{13\pi}{12}$

2. بيّن أنّ العدد المركّب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ADB

3. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث : $\frac{\overline{z} - z_B}{\overline{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} U_0 = 0 \;\; ; \;\; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$$

1. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع : $V_n = U_{n+1} - U_n$

أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

ب. برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_n = 2^n - 1$

ج. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $PGCD\left(U_n; U_{n+1}\right) = 1$

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $L_n = 3^n + \left(U_n + 1\right)^{2024} + U_n$

أ. أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين 2^n و 3^n على 5

ب. بيّن أنّ العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$

ب. استنتج أنّ $PGCD\left(U_{1962}; U_{1954}\right) = 3$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-1; +\infty[$

2. أُحسب $g(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

II) الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{2\ln(e^x + 1)}{e^x} - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ مفسّرا النتيجتين هندسيا.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$

ج. استنتج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

ب. أنشئ المنحنى (C_f)

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x) + f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

ب. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

III) المتتالية العددية (β_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\beta_n = 2\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln(1 + e^x)\, dx$

1. أ. أُحسب β_1 ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2\ln(1+e)$

ج. بيّن أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي l

2. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln 4^n \leq \beta_n \leq \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \ln(1+e)^{2n}$

ب. استنتج حصراً للعدد l

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية

امتحان البكالوريا التجريبي

دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدّة: 4 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية + سلّم التنقيط

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

1. أ. حساب $PGCD\,(650;732)$ ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

لدينا

$$\begin{aligned} 732 &= 650\times 1+82\\ 650 &= 82\times 7+76\\ 82 &= 76\times 1+6\\ 76 &= 6\times 12+4\\ 6 &= 4\times 1+2\\ 4 &= 2\times 2+0 \end{aligned}$$

ومنه $PGCD\,(650;732)=2$ ، وبما أنّ 2 يقسم 486 فإنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. التحقّق أنّ الثنائية $(3;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتاج مجموعة حلولها.

لدينا

$$650\times 3-732\times 2=486$$

ومنه

$$\begin{aligned} 650\times 3-732\times 2 &= 1950-1464\\ &= 486 \end{aligned}$$

وبالتالي $(3;2)$ حل للمعادلة (E) وعندئذ لدينا

$$\begin{cases} 650x-732y=486\\ 650\times 3-732\times 2=486 \end{cases}$$

ومنه

$$650\,(x-3)-732\,(y-2)=0$$

وعليه

$$325\,(x-3)=366\,(y-2)$$

وبما أنّ $PGCD\,(350;366)=1$ فإنّ $325\mid(y-2)$ وينتج عن ذلك أنّ

$$\begin{cases} y=325k+2\\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S=\{(366k+3\ ;\ 325k+2)\,/k\in\mathbb{Z}\}$$

2. تعيين كُلّا من α و β ثمّ كتابة L في النظام العشري.

لدينا

$$\begin{aligned} L &= 5^4\times\alpha+5^3\times 0+5^2\times\alpha+5^1\times\beta+5^0\times\beta\\ &= 650\alpha+6\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 9^3\times\beta+9^2\times 6+9^1\times\beta+9^0\times 0\\ &= 738\beta+486 \end{aligned}$$

ومنه

$$650\alpha+6\beta=738\beta+486$$

وعليه

$$650\alpha-732\beta=486$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} 0 \leqslant \alpha < 5 \\ 0 \leqslant \beta < 5 \end{cases}$$

فإنّ $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ وبالتالي $L = 1962$

3. تحليل العدد 1962 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962 \equiv 0\ [n^2]$

لدينا

$$\begin{array}{c|c} 1962 & 2 \\ 981 & 3 \\ 327 & 3 \\ 109 & 109 \\ 1 & \end{array}$$

ومنه $1962 = 2 \times 3^2 \times 109$ ونستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962 \equiv 0\ [n^2]$ هي : 1 و 3

4. تعيين كلّ الثنائيات $(a;b)$ التي تحقّق : $m - 91d = 0$ و $a^2 + b^2 = 1962$

لدينا

$$\begin{cases} m \times d = a \times b \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD\left(a'\,; b'\right) = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} m = d \times a' \times b' \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD\left(a'\,; b'\right) = 1 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} d \times a' \times b' - 91d = 0 \\ \left(d \times a'\right)^2 + \left(d \times b'\right)^2 = 1962 \\ PGCD\left(a'\,; b'\right) = 1 \end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases} a' \times b' = 91 \\ d^2\left[\left(a'\right)^2 + \left(b'\right)^2\right] = 1962 \\ d \in \{1;3\} \\ PGCD\left(a'\,; b'\right) = 1 \end{cases}$$

ومن السؤال السابق نستنتج أنّ

$$\begin{cases} \left(a'; b'\right) \in \{(1;91)\,;(7;13)\,;(13;7)\,;(91;1)\} \\ d^2\left[\left(a'\right)^2 + \left(b'\right)^2\right] = 1962 \\ d \in \{1;3\} \end{cases}$$

وبما أنّ $91^2 > 1962$ و $7^2 + 13^2 = 218$ فإنّ

$$\begin{cases} (a';b') \in \{(7;13);(13;7)\} \\ d = 3 \end{cases}$$

عندئذ لدينا

$$(a;b) \in \{(21;39);(39;21)\}$$

التمرين الثاني (٤ ن)

I) 1. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < \sqrt{3}$

- نرمز للخاصية " $U_n \geq 1$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 0$$

ومنه

$$0 \leq U_0 < \sqrt{3}$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$0 \leq U_k < \sqrt{3}$$

ومنه

$$0 \leq U_k^2 < 3$$

وعليه

$$3 < 6 - U_k^2 \leq 6$$

وبالتالي

$$\sqrt{3} < \sqrt{6 - U_k^2} \leq \sqrt{6}$$

ومنه

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq \frac{1}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وعليه

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \frac{3}{\sqrt{3}}$$

أي

$$0 \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \sqrt{3}$$

أي

$$0 \leq U_{k+1} < \sqrt{3}$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \dfrac{(U_n^2 - 3)^2}{6 - U_n^2}$

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}\right)^2 - U_n^2$$

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{9}{6-U_n^2} - U_n^2$$
$$= \frac{9}{6-U_n^2} - U_n^2$$
$$= \frac{9-6U_n^2+U_n^4}{6-U_n^2}$$
$$= \frac{\left(U_n^2-3\right)^2}{6-U_n^2}$$

ب. تبيين أنّ المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{\left(U_n^2-3\right)^2}{6-U_n^2}$$

وبما أنّ

$$0 \le U_n < \sqrt{3}$$

فإنّ

$$\begin{cases} \left(U_n^2-3\right)^2 > 0 \\ 6-U_n^2 > 0 \end{cases}$$

أي

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 > 0$$

ومنه

$$U_{n+1}^2 \ge U_n^2$$

وبما أنّ $U_n \ge 0$ فإنّ

$$U_{n+1} \ge U_n$$

وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

الاستنتاج. لدينا

- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$0 \le U_n < \sqrt{3}$$

ومنه (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$

- المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

عندئذ نستنتج أنّ (U_n) متقاربة.

II) 1. أ. تبيين أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 وتعيين حدّها الأوّل V_0

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}^2}{3-U_{n+1}^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}\right)^2}{3-\left(\frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{9}{6-U_n^2}}{3-\frac{9}{6-U_n^2}}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{3}{3-U_n^2} \\ &= \frac{3-U_n^2+U_n^2}{3-U_n^2} \\ &= 1+\frac{U_n^2}{3-U_n^2} \\ &= V_n+1 \end{aligned}$$

وعليه المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 وحدّها الأوّل V_0 حيث

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{U_0^2}{3-U_0^2} \\ &= \frac{U_0^2}{3-U_0^2} \\ &= \frac{0^2}{3-0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ **ثمّ حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$$

وذلك يكافئ

$$\left(3-U_n^2\right)V_n = U_n^2$$

ويكافئ

$$U_n^2 + V_nU_n^2 = \ 3V$$

وبما أنّ $V_n+1>0$ فإنّ

$$U_n^2\left(V_n+1\right) = \ 3V_n$$

وبما أنّ $U_n \geq 0$ فإنّ

$$U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n+1}}$$

وعليه

$$U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$$

.2 أ. تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{2024n}{n+\sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n+1}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{cases} \dfrac{2024}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2024}{1+\sqrt{V_1}} \leqslant \dfrac{2024}{n+1} \\ \dfrac{2024}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2024}{1+\sqrt{V_2}} \leqslant \dfrac{2024}{n+1} \\ \vdots \\ \dfrac{2024}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2024}{1+\sqrt{V_n}} \leqslant \dfrac{2024}{n+1} \end{cases}$$

ومنه

$$\frac{2024}{n+\sqrt{n}}+\frac{2024}{n+\sqrt{n}}+\cdots+\frac{2024}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{2024n}{n+1}+\frac{2024}{n+1}+\cdots+\frac{2024}{n+1}$$

وعليه

$$\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{2024n}{n+1}$$

ب. **استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{2024n}{n+1}$$

ولدينا

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2024n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2024n}{n}=2024$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2024}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=2024$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=2024$$

التمرين الثالث (5 ن)

1. الجواب هو أ

التبرير. الدّالة $x\mapsto\pi^2e^{\pi x+\pi}$ مستمرّة على $\mathbb{R}$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية $y''=\pi^2e^{\pi x+\pi}$ هي الدوال $x\mapsto e^{\pi x+\pi}+c_1x+c_2$ مع c_1 وc_2 عددان حقيقيان ثابتان، ولدينا

$$\begin{cases}y(0)=e^{\pi}\\ y'(-1)=\pi\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}e^{\pi\times0+\pi}+c_1\times0+c_2=e^{\pi}\\ \pi e^{\pi\times(-1)+\pi}+c_1=\pi\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases}c_2=0\\ c_1=0\end{cases}$$

وبالتالي حلّ المعادلة التفاضلية هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=e^{\pi x+\pi}$

2. الجواب هو ج

التبرير. $A_4^2\times A_1^1+A_3^1\times A_3^1\times A_1^1=21$

3. الجواب هو ج

التبرير. الدّالة $x\mapsto\dfrac{\log x}{x}$ مستمرّة على المجال $[1;n+1]$ ولدينا

$$\int_1^2\frac{\log x}{x}dx+\int_2^3\frac{\log x}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\log x}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{\log x}{x}dx$$
$$=\frac{1}{\ln 10}\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx$$

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx+\int_2^3 \frac{\log x}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1} \frac{\log x}{x}dx=\int_1^{n+1} \frac{\log x}{x}dx$$
$$=\frac{1}{\ln 10}\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\ln 10}\left[(\ln x)^2\right]_1^{n+1}$$
$$=\frac{\ln(n+1)\times\ln(n+1)}{2\ln 10}$$
$$=\frac{\ln(n+1)\times\log(n+1)}{2}$$

.4 الجواب هو أ

التبرير. لدينا

$$\begin{aligned} z&=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\\ &=i\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)\\ &=i\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]\end{aligned}$$

ومنه

$$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\,[2\pi]$$

وعليه

$$\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$$

.5 الجواب هو ب

التبرير. المتراجحة تكافئ

$$(2^x)^2+2\times 2^x-3\leqslant 0$$

وبوضع $t=2^x$ ينتج

$$t^2+2t-3\leqslant 0$$

وذلك يكافئ

$$-3\leq t\leq 1$$

ويكافئ

$$2^x\leq 1$$

ويكافئ

$$x\in\,]-\infty;0]$$

التمرين الرابع (٧ ن)

I) 1. تبيين أنّ الدّالة g متزايدة تماماً على المجال $]0;+\infty[$

الدّالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^{x-1} + e^{x-1} \times x \\ &= (x+1)\, e^{x-1} \end{aligned}$$

ومن أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$(x+1)\, e^{x-1} > 0$$

أي $g'(x) > 0$ على $]0;+\infty[$ ، وبالتالي g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

- g مستمرة على $]0;+\infty[$.
- g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
- لدينا

$g(1,4) \approx 1,09$	$g(1,3) \approx 0,22$

ومنه $g(1,3) < 1 < g(1,4)$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$.

ب. استنتاج إشارة العبارة : $g(x)-1$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا

- g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
- $g(\alpha)-1=0$

عندئذ يمكن استنتاج إشارة $g(x)-1$ في جدول كما يأتي

x	0		α		$+\infty$
$g(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	

II) 1. أ. حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(e^{x-1} - 2\ln x - 1\right)$$

وبما أنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

التفسير الهندسي. المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) هو مستقيم مقارب لـ (C_f)

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{x-1} - 2\ln x - 1\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{e^x}{x} \times e^{-1} - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)-1}{x}$

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{xe^{x-1}-2}{x} \\ &= \frac{g(x)-1}{x} \end{aligned}$$

ج. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها

بما أنّ $x > 0$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)-1$ وعندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

- $f'(x) < 0$ على $]0;\alpha[$ ، ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$
- $f'(x) > 0$ على $]\alpha;+\infty[$ ، ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

تشكيل جدول التغيّرات

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1.

الدّالة f قابلة للاشتقاق عند 1،ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 ونكتب

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ولدينا

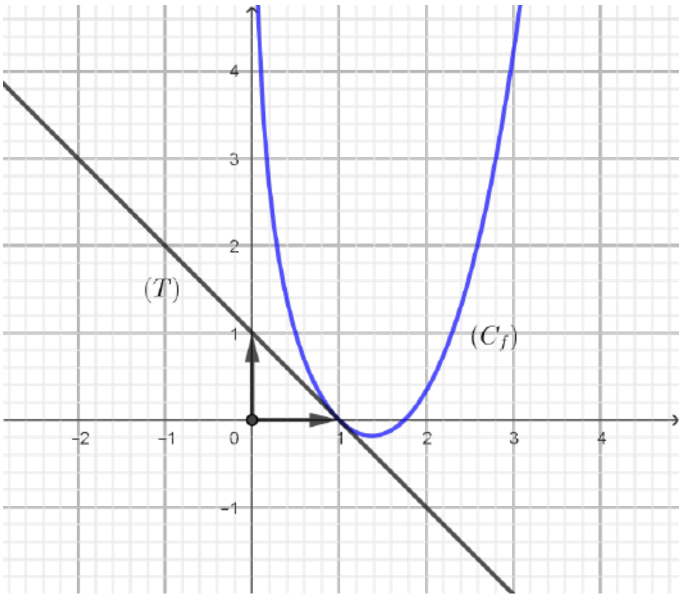
$$\begin{aligned} f(1) &= e^{1-1} - 2\ln 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{1\times e^{1-1}-2}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$(T) : y = -x + 1$$

ب. إنشاء كُلّا من (T) و (C_f).



ج. مناقشة حلول المعادلة $e^x + e^{m+1}(x-1) = e\left(\ln x^2 + 1\right)$ بيانيا

المعادلة

$$e^x + e^{m+1}(x-1) = e\left(\ln x^2 + 1\right)$$

تكافئ

$$e^{x-1} + e^m(x-1) = 2lnx + 1$$

وتكافئ

$$f(x) = -e^m(x-1)$$

لدينا

$$f(x) = -|m|x$$

وبالتالي حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m): y = -e^m(x-1)$$

من أجل كلّ m من $\mathbb{R}$ المستقيم (Δ_m) يشمل النقطة $A(1;0)$ ، وبوضع $m' = -e^m$ ينتج

في حالة	قيم m	عدد حلول المعادلة
$m' \in]-\infty; -1[$	$m \in]0; +\infty[$	حلّان
$m' = -1$	$m = 0$	حلّ واحد
$m' \in]-1; 0[$	$m \in]-\infty; 0[$	حلّان

3. أ. كتابة العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة λ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.

الدّالة f مستمرّة على المجال $[\lambda; 1]$، عندئذ لدينا

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^1 f(t)dt$$

$$= \int_\lambda^1 \left(e^{t-1} - 2\ln t - 1\right)dt$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \left[e^{t-1} - 2t\ln t + t\right]_{\lambda}^{1} \\ &= -e^{\lambda-1} + \lambda + 2\lambda\ln\lambda + 2\end{aligned}$$

بما أنّ الدّالة موجبة على المجال $[\lambda;1]$ فإنّ النتيجة تُفسّر هندسيا بأنّها مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y=0$ ، $x=\lambda$ و $x=1$

ب. **تبيين أنّ** $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \left(2-e^{-1}\right)cm^2$

لدينا

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(-e^{\lambda-1} + \lambda + 2\lambda\ln\lambda + 2\right)cm^2$$

وبما أنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\lambda\ln\lambda) = 0$ فإنّ

$$\lim_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \left(2-e^{-1}\right)cm^2$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	$0,25+0,25$
1.ب	$0,25+0,25$
2	$0,25\times 6$
3	$0,5+0,5$
4	$0,25+0,25$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	$0,25+0,5+0,25$
I) 2.أ	$0,5$
I) 2.ب	$0,25+0,5$
II) 1.أ	$0,25+0,5$
II) 1.ب	$0,25+0,25$
II) 2.أ	$0,25$
II) 2.ب	$0,25$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	$0,5+0,5$
2	$0,5+0,5$
3	$0,5+0,5$
4	$0,5+0,5$
5	$0,5+0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	$0,25+0,25$
I) 2.أ	$0,25+0,25+0,25$
I) 2.ب	$0,25+0,25$
II) 1.أ	$0,5+0,25+0,25$
II) 1.ب	$0,75$
II) 1.ج	$0,5+0,5$
II) 2.أ	$0,5$
II) 2.ب	$0,5+0,25$
II) 2.ج	$0,25$
II) 3.أ	$0,25+0,5$
II) 3.ب	$0,25$

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأول (٤ ن)

I) 1. حساب احتمال كُلّا من الحدثين A و B

أ. A: " الحصول على بطاقتين من نفس اللّون بالضّبط ".

$$P(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد الإمكانيات}}=\frac{C_3^2\times C_3^1+C_2^2\times C_4^1}{C_6^3}=\frac{13}{20}$$

ب. B: " الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أنّ تشكّل كلمة ENS ".

$$P(B)=\frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد الإمكانيات}}=\frac{C_1^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_6^3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

2. أ. تبيين أنّ $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ ، ثمّ استنتاج أنّ الحدثين A و B ليسا مستقلين.

$$P(A\cap B)=\frac{\text{عدد عناصر } A\cap B}{\text{عدد الإمكانيات}}=\frac{C_1^1\times C_2^1\times C_2^1+C_1^1\times C_2^2}{C_6^3}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

وبما أنّ $\frac{3}{10}\times\frac{13}{20}\neq\frac{1}{4}$ أي $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ فإنّ A و B ليسا مستقلين.

ب. حساب $P_A\left(\overline{B}\right)$ (احتمال الحدث $\overline{B}$ علما أنّ الحدث A محقّق)

$$P_A\left(\bar{B}\right)=1-P_A(B)=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{20}}=\frac{8}{13}$$

II) .1 أ. تبرير أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$

عدد مرّات ظهور الحرف S	الإمكانية S
0	$\overline{S}\ \overline{S}$
1	$S\ \overline{S}$
2	$S\ S$

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

- الحدث $\{X=0\}$

$$P(X=0)=\frac{(n+4)^2}{(n+6)^2}$$

- الحدث $\{X=1\}$

$$P(X=1)=\frac{2\times 2^1\times(n+4)^1}{(n+6)^2}=\frac{4n+16}{(n+6)^2}$$

- الحدث $\{X=2\}$

$$P(X=2)=\frac{2^2}{(n+6)^2}=\frac{4}{(n+6)^2}$$

وينتج عن ذلك ما يلي

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{(n+4)^2}{(n+6)^2}$	$\frac{4n+16}{(n+6)^2}$	$\frac{4}{(n+6)^2}$	1

.2 تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\int_0^X te^t dt=1\right)=\frac{3}{8}$

المتراجحة

$$\int_0^X te^t dt=1$$

تكافئ

$$Xe^X-e^X+1=1$$

وتكافئ

$$e^X(X-1)=0$$

وتكافئ

$$X=1$$

وعليه المعادلة

$$P\left(\int_0^X te^t dt=1\right)=\frac{3}{8}$$

تكافئ

$$P(X=1)=\frac{3}{8}$$

وتكافئ

$$\frac{4n+16}{(n+6)^2}=\frac{3}{8}$$

وتكافئ

$$3n^2+4n-20=0$$

وتكافئ

$$n=2$$

التمرين الثاني (4 ن)

I) حل المعادلة $\left(\overline{2iz-\sqrt{3}}+i\right)\left(z^2+2z+2\right)=0$ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$

المعادلة

$$\left(\overline{2iz-\sqrt{3}}+i\right)\left(z^2+2z+2\right)=0$$

تكافئ

$$\overline{2iz-\sqrt{3}}+i=0 \quad \text{أو} \quad z^2+2z+2=0$$

حل المعادلة $z^2+2z+2=0$

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2-4\times 1\times 2\\ &= -4\\ &= 4i^2\\ &= (2i)^2\end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلّين z_1 و z_2 حيث

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-2-2i}{2\times 1}\\ &= -1-i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \overline{z_1}\\ &= -1+i\end{aligned}$$

حل المعادلة $\overline{2iz+\sqrt{3}}+i=0$

المعادلة تكافئ

$$\overline{2iz+\sqrt{3}}=-i$$

وتكافئ

$$2iz+\sqrt{3}=i$$

وتكافئ

$$iz=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

وتكافئ

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;-1-i;-1+i\right\}$

II) 1. أ. كتابة z_A على الشّكل المثلّثي ثمّ استنتاج كتابة z_C على الشّكل المثلّثي.

لدينا

$$\begin{aligned}|z_A| &= \sqrt{(-1)^2+1^2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

ونعتبر θ عمدة للعدد z_A، عندئذ لدينا

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه

$$z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ولدينا

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \qquad \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

عندئذ نستنتج

$$\begin{aligned}|z_C| &= |z_A| \times \left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \\ &= \sqrt{2}\times 1 \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(z_C) &\equiv \arg(z_A) + \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{13\pi}{12}\,[2\pi]\end{aligned}$$

وبالتالي

$$z_C = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

ب. كتابة z_C على الشّكل الجبري ثمّ استنتاج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

$$\begin{aligned}z_C &= (-1+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج أنّ

$$\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \cos\frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2. تبين أنّ العدد المركّب $\frac{z_B-z_D}{z_B-z_A}$ تخيّلي صرف ثمّ استنتاج طبيعة المثلّث ADB

لدينا

$$\begin{aligned}\frac{z_B-z_D}{z_B-z_A} &= \frac{\overline{z_A}+z_A}{\overline{z_A}-z_A} \\ &= \frac{-1-i-1+i}{-1-i+1-i} \\ &= \frac{-2}{-2i} \\ &= -i\end{aligned}$$

ومنه العدد المركّب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف ونستنتج أنّ

$$\left|\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}\right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

أي

$$DB = AB \quad \text{و} \quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

عندئذ نستنتج أنّ المثلّث ADB قائم في B ومتساوي الساقين.

3. **تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث :** $\frac{\overline{z} - z_B}{\overline{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$

لدينا $\frac{\overline{z} - z_B}{\overline{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$ وذلك يكافئ

$$\overline{\overline{\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)}} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$$

ويكافئ

$$\frac{|z - z_A|^2}{|z - z_B|^2} = 1$$

ويكافئ

$$|z - z_A|^2 = |z - z_B|^2$$

ويكافئ

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

ويكافئ

$$AM = BM$$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$

التمرين الثالث (5 ن)

1. **أ.** **تبيين أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل**

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2} - U_{n+1} \\ &= 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1} \\ &= 2U_{n+1} - 2U_n \\ &= 2\left(U_{n+1} - U_n\right) \\ &= 2V_n \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأوّل V_0 حيث

$$\begin{aligned} V_0 &= U_1 - U_0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ب. **البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، $U_n = 2^n - 1$.**

- نرمز للخاصية " $U_n = 2^n - 1$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$\begin{aligned} 2^0 - 1 &= 1 \\ &= U_0 \end{aligned}$$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= V_k + U_k \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2 \times 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

- حسب مبدأ الاستدلال بالتّراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ج. استنتاج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $PGCD\,(U_n; U_{n+1}) = 1$

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2\,(2^n - 1 + 1) - 1 \\ &= 2U_n + 2 - 1 \\ &= 2U_n + 1 \end{aligned}$$

ومنه

$$U_{n+1} - 2U_n = 1$$

وبالتالي حسب مبرهنة بيزو ينتج أنّ $PGCD\,(U_n; U_{n+1}) = 1$

2. أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين 2^n و 3^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n

لدينا

$$\begin{cases} 2^0 \equiv 1\,[5] \\ 2^1 \equiv 2\,[5] \\ 2^2 \equiv 4\,[5] \\ 2^3 \equiv 3\,[5] \\ 2^4 \equiv 1\,[5] \end{cases}$$

وعليه من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا

$$\begin{cases} 2^{4k} \equiv 1\,[5] \\ 2^{4k+1} \equiv 2\,[5] \\ 2^{4k+2} \equiv 4\,[5] \\ 2^{4k+3} \equiv 3\,[5] \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} 3^0 \equiv 1\,[5] \\ 3^1 \equiv 3\,[5] \\ 3^2 \equiv 4\,[5] \\ 3^3 \equiv 2\,[5] \\ 3^4 \equiv 1\,[5] \end{cases}$$

وعليه من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا

$$\begin{cases} 3^{4k} \equiv 1\,[5] \\ 3^{4k+1} \equiv 3\,[5] \\ 3^{4k+2} \equiv 4\,[5] \\ 3^{4k+3} \equiv 2\,[5] \end{cases}$$

ب. تبيين أنّ العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.

لدينا

$$L_n \equiv 0\,[5]$$

وذلك يكافئ

$$3^n + (2^n)^{2024} + 2^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$3^n + \left(2^{2024}\right)^n + 2^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ
$$3^n+1^n+2^n-1\equiv 0\,[5]$$
ويكافئ
$$3^n+2^n\equiv 0\,[5]$$
ويكافئ
$$n\in\{4k+1;4k+3/k\in\mathbb{N}\}$$
ويكافئ
$$n\in\{2\times 2k+1\ ;\ 2\,(2k+1)+1\ /\ k\in\mathbb{N}\}$$
ويكافئ أنّ العدد n فردي.

3. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n\geq p$: $U_n=2^p\times U_{n-p}+U_p$

من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n\geq p$ لدينا
$$\begin{aligned}2^p\times U_{n-p}+U_p&=2^p\left(2^{n-p}-1\right)+2^p-1\\&=2^{p+n-p}-2^p+2^p-1\\&=2^n-1\\&=U_n\end{aligned}$$

ب. استنتاج أنّ $PGCD\,(U_{1962};U_{1954})=3$

من السؤال السابق نستنتج من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n\geq p$ أنّ
$$PGCD\,(U_{n+p};U_n)=PGCD\,(U_n;U_p)$$
وعليه
$$\begin{aligned}PGCD\,(U_{1962};U_{1954})&=PGCD\,(U_{1954};U_8)\\&=PGCD\,(U_{1946};U_8)\\&\ \vdots\\&=PGCD\,(U_8;U_2)\\&=PGCD\,(U_2;U_2)\\&=U_2\\&=3\end{aligned}$$

التمرين الرابع (7 ن)

I) 1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-1;+\infty[$

قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا
$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1\times(x+1)-1\times x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\\&=\frac{-x}{(x+1)^2}\end{aligned}$$
من أجل كلّ x من $]-1;+\infty[$ لدينا
$$(x+1)^2>0$$
ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط $-x$ وعندئذ لدينا

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- $g'(x)>0$ على $]-1;0[$ و $g'(0)=0$، ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-1;0]$.
- $g'(x)<0$ على $]0;+\infty[$ و $g'(0)=0$، ومنه الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2. حساب $g(0)$ ثمّ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

لدينا

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{0}{0+1} - \ln(0+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبما أنّ الدّالة $g(0)$ قيمة حدية صغرى للدّالة g عندئذ نستنتج ما يلي

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$-$

II) 1. أ. حساب كُلّا من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ مفسّرا النتيجتين هندسيا.

لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln(e^x+1)}{e^x} - 1\right) \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2\ln t}{t-1} - 1\right] \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2t}{t-1} \times \frac{\ln(t)}{t} - 1\right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2t}{t-1} = 2 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

وتُفسّر النتيجة هندسيا بأنّ المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ والموازي لحامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ولدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{2\ln(e^x+1)}{e^x} - 1\right] \\ &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{2\ln(t+1)}{t} - 1\right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

فإنّ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

وتُفسّر النتيجة هندسيا بأنّ المستقيم ذو المعادلة $y=1$ والموازي لحامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-x} \times \ln(e^x+1) + 2e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x+1} \\ &= 2e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)\right] \\ &= 2e^{-x} \times g(e^x) \end{aligned}$$

ج. استنتاج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$2e^{-x} > 0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(e^x)$.

المتراجحة $g(e^x) \leq 0$ تكافئ $e^x > 0$ وتكافئ $x \in]-\infty; +\infty[$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$

- $f'(x) < 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

تشكيل جدول التغيّرات

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$1 \searrow -1$

2. أ. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

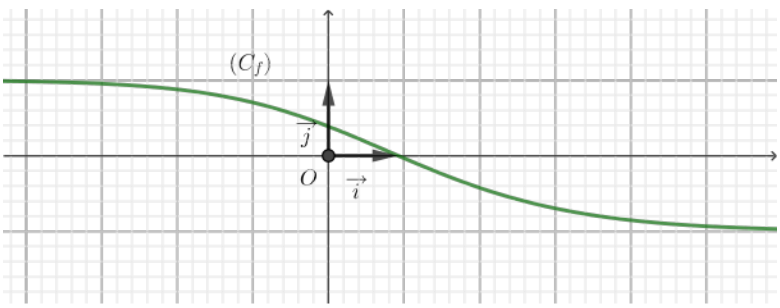
- الدّالة g مستمرّة على $\mathbb{R}$
- الدّالة g متناقصة تماما $\mathbb{R}$
- لدينا

$f(0,9) \approx 0,01$	$f(1) \approx -0,03$

ومنه $f(0,9) \times f(1) < 0$.

وبالتالي المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

ب. إنشاء المنحنى (C_f)



3. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x)+f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned}
f(x)+f'(x) &= \frac{2\ln(e^x+1)}{e^x}-1+2e^{-x}\times g(e^x)\\
&= 2e^{-x}\ln(e^x+1)-1+2e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right]\\
&= 2e^{-x}\ln(e^x+1)-1+\frac{2}{e^x+1}-2e^{-x}\ln(e^x+1)\\
&= -1+\frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1}\\
&= -1+2-\frac{2e^x}{e^x+1}\\
&= 1-\frac{2e^x}{e^x+1}
\end{aligned}$$

ب. استنتاج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

الدّالة f مستمرّة على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي هي تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$ حيث

$$\begin{aligned}
F(x) &= -f(x)+x-2\ln(e^x+1)\\
&= -2e^{-x}\ln(e^x+1)+1+x-2\ln(e^x+1)\\
&= x+1-2\left(e^{-x}+1\right)\ln(e^x+1)
\end{aligned}$$

III) 1. أ. حساب β_1 ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \int_0^1 \left[2e^{-x}\ln(1+e^x)-1+1\right]dx\\
&= \int_0^1 [f(x)+1]dx\\
&= [F(x)+x]_0^1\\
&= F(1)-F(0)+1\\
&= 1+1-2\left(e^{-1}+1\right)\ln(e+1)-0-1+2\left(e^0+1\right)\ln\left(e^0+1\right)+1\\
&= 4\ln 2-2\left(e^{-1}+1\right)\ln(e+1)+2
\end{aligned}$$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $f(x)>-1$ ، وعليه النتيجة تُفسّر هندسيا بأنّ β_1 هو قيمة مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y=-1$ ، $x=0$ و $x=1$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n\le 2\ln(1+e)$

من أجل كلّ x من $[0;1]$ ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$e^{-\frac{x}{n}}\ln(1+e^x)\leqslant 1\times\ln(1+e)$$

ومنه

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}\ln(1+e^x)dx\leqslant\ln(1+e)$$

وعليه

$$\beta_n\leqslant 2\ln(1+e)$$

ج. تبيين أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتاج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي l

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

ومن أجل كلّ x من $[0;1]$ نجد

$$e^{-\frac{x}{n}} < e^{-\frac{x}{n+1}}$$

ومنه

$$e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right) < e^{-\frac{x}{n+1}} \ln\left(e^x+1\right)$$

وعليه

$$0 < e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right) < e^{-\frac{x}{n+1}} \ln\left(e^x+1\right)$$

وبالتالي

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right)dx < \int_0^1 e^{-\frac{x}{n+1}} \ln\left(e^x+1\right)dx$$

أي $\beta_n < \beta_{n+1}$ ، عندئذ نستنتج أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ وبما أنّها محدودة من الأعلى بالعدد $2\ln\left(e+1\right)$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4^n \leq \beta_n \leq \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^{2n}$

من أجل كلّ x من $[0;1]$ لدينا

$$\ln 2 \leq \ln\left(e^x+1\right) \leq \ln\left(e+1\right)$$

ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نجد

$$e^{-\frac{x}{n}}\ln 2 \leqslant e^{-\frac{x}{n}}\ln\left(e^x+1\right) \leqslant e^{-\frac{x}{n}}\ln\left(e+1\right)$$

ومنه

$$\ln 2\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}\ln\left(e^x+1\right)dx \leqslant \ln\left(e+1\right)\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx$$

وعليه

$$2n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 2 \leqslant \beta_n \leqslant 2n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)$$

أي

$$\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4^n \leq \beta_n \leq \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^{2n}$$

ب. استنتاج حصر للعدد l. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4 \leqslant \beta_n \leqslant n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^2$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1-e^{-\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}}\right)\\ &= \lim_{m\to 0}\left(\frac{e^m-1}{m}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

وبما أنّ (β_n) متقاربة نحو l فإنّ $\ln 4 \leq l \leq \ln\left(e+1\right)^2$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1.أ	$0,25+0,5$
I) 1.ب	$0,25+0,5$
I) 2.أ	$0,25+0,25$
I) 2.ب	$0,25+0,25$
II) 1.أ	$0,25$
II) أ.ب	$0,25+0,25+0,25$
II) 2	$0,25+0,25$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
II)	$0,25+0,5+0,25$
II) 1.أ	$0,25+0,5$
II) 1.ب	$0,25+0,5$
II) 2	$0,5+0,5$
II) 3	$0,25+0,25$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	$0,25+0,75$
1.ب	$0,25+0,5$
1.ج	$0,25+0,25$
2.أ	$0,5+0,5$
2.ب	$0,5$
3.أ	$0,75$
3.ب	$0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	$0,25+0,25$
I) 2	$0,5+0,25$
II) 1.أ	$0,25+0,25+0,25+0,25+0,25$
II) 1.ب	$0,5$
II) 1.ج	$0,25+0,25$
II) 2.أ	$0,25$
II) 2.ب	$0,5$
II) 3.أ	$0,25$
II) 3.ب	$0,25+0,25$
III) 1.أ	$0,25+0,25$
III) 1.ب	$0,25$
III) 1.ج	$0,25+0,25$
III) 2.أ	$0,25+0,25$
III) 2.ب	$0,25$

انتهى ■

إختبار في مادة الرياضيات المدة :04 ساعات و نصف

☜ على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (03 نقاط)

– أجب بصحيح أو خطأ :

1)– حجم المجسم المولد بالدوران حول محور الفواصل للتمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $\left[1,e\right]$ بـ :

$f(x)=\dfrac{2(Lnx)^2}{\sqrt{x}}$ هو : $V=\dfrac{4\pi}{5}uv$ ؟

2)– $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2023}{x}\right)^x=\dfrac{1}{2023}$

3)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1+3^{\frac{1}{2}}+3+3^{\frac{3}{2}}+......+3^{\frac{n}{2}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{2}$

4)–(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ : $U_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{e}{n}$ ، $V_n=Ln\sqrt{\dfrac{3}{n}+e}$.

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I)–**1**)– ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من : 2^n ، 3^n على 11 .

2)– n عدد طبيعي ، α عدد صحيح ، نضع : $A_\alpha=2023^{2n+1}+\alpha\times4^{5n+1}$

أ)– تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{1444}\equiv0\left[11\right]$.

ب)– عين الأعداد الصحيحة α التي من اجلها A_α يقبل القسمة على 11 من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ)– أوجد قيم العدد الطبيعي t بحيث : $1443^t+1444^t\equiv0\left[11\right]$.

II)– نضع في علبة بطاقات مرقمة ببواقي قسمة العدد 2^n على 11 ، نسحب من العلبة **3** بطاقات على التوالي وبدون إرجاع

لتكن الحادثتان التاليتان : A البطاقات المسحوبة تحمل أرقماأولية ، B البطاقات المسحوبة تحمل أرقما فرديا

1)– أحسب احتمال الحوادث : A ، B ، $A\cap B$. استنتج احتمال الحادثة : $A\cup B$.

2)– أحسب احتمال سحب بطاقة تحمل رقما أوليا علما أنه فردي .

3)– ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد البطاقات التي تحمل رقما أوليا المتبقية في العلبة

– عرف قانون إحتمال X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1)– $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

أ)– تحقق أن 2 هو جذرل $P(z)$. ب)– حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $P(z)=0$.

2)– في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقاط : A، B و C تحقق لواحقها على الترتيب :

$z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ)– أكتب كل من و z_B، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسي . ب)– عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا .

جـ)– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n}+z_C^{3n}+2^{3n+1}=0$

د)– علم النقاط : A ، B و C ، ماهي طبيعة الرباعي $OBAC$ ؟

3)– M و M' نقطتان من المستوي ذات اللاحقتان : z و z' على الترتيب حيث : $z'=\frac{z_A\times\bar{z}-z_C}{\bar{z}-z_C}$

أ)– لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $(z-z_B)(\bar{z}-z_C)=1$ ، عين ثم أنشئ (E) .

ب)– تحقق أن : $z'=z_A+\frac{z_C}{\bar{z}-z_C}$

جـ)– بين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I)– الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2x^2-5x+4)e^{x-2}+1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	......	↗	$7e^{-\frac{5}{2}}+1$	↘	.....	↗	....

$\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 1cm$

1)– أنقل ثم أكمل جدول تغيرات الدالة g ، استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$. 2)– تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)-1 \succ 0$

3)– برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)-1 = 2g'(x) - g''(x) + 4e^{x-2}$.

4)– أحسب : $S = \int_1^2 \left(g(x)-1\right)dx$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا .

II)– لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \left(\frac{2x-3}{x-1}\right)\left(e^{x-2}+1\right)$.

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)– أ)– أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow[\prec]{} 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow[\succ]{} 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، فسر هذه النتائج بيانيا. ب)– أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2)– أثبت أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، استنتج اتجاه الدالة f على D_f . شكل جدول تغيراتها .

3)– أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$.

4)– أحسب : $f(0)$ ، $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، ثم أنشئ (T) و $\left(C_f\right)$.

III)– لتكن الدالة h المعرفة على $D_h = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ : $h(x) = \left(\frac{2|x|-3}{|x|-1}\right)\left(e^{|x|-2}+1\right)$.

$\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1)– أثبت أن الدالة h دالة زوجية . 2)– اشرح كيفية إنشاء $\left(C_h\right)$ إنطلاقا من $\left(C_f\right)$.

3)– أنشئ $\left(C_h\right)$. (استعمل الألوان للتوضيح)

التمرين الأول : (04 نقاط)

I) – 1)– أوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

2)– أوجد الثنائيات (a,b) من $(\mathbb{N}^*)^2$ حيث : $\begin{cases} PGCD\,(a,b) = 17 \\ PPCM\,(a,b) = 2023 \end{cases}$

II) – لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $289x - 34y = 2023 ......(E)$

1)– أوجد $PGCD\,(289,34)$، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

2)– بين أنه إذاكانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن y مضاعف للعدد 17 . ثم استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) .

3)– أوجد الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y \leq 52$

III) – n عددطبيعي فردي ، باقي قسمته على 17 هو 16 ، فما هو باقي قسمته على 34 ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1)– في ألعاب البحر المتوسط التي إحتضنها ولاية وهران (بالجزائر) في جوان 2022 ، تحصلت الجزائر في رياضة الملاكمة على :

7 ميداليات ذهبية ، 4 ميداليات فضية و ميدالية واحدة برونزية . وضعت هذه الميداليات في صندوق

– نسحب من الصندوق ميداليتين في آن واحد . نعتبر اللعبة التالية : يربح لاعب 20DA عند سحب ميدالية ذهبية ، يربح 10DA عند سحب ميدالية فضية و يخسر 10DA عند سحب ميدالية فضية

– ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب ، عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي

2)– بعد نجاح رياضة الملاكمة في الجزائر ترشح للمشاركة في ألعاب البحر المتوسط التي ستقام بفرنسا : 20 ملاكمة (إناث) من بينهم الملاكمة : إيمان خليف و 18 ملاكم (ذكور)من بينهم الملاكم :بن قاسمية محمد .

تم اختيارمجموعة مكونة من ثلاث ملاكمين للمشاركة في هذه التظاهرة الرياضية

– احسب احتمال الحوادث التالية : A : المجموعة تضم ثلاث ذكور. B : المجموعة تضم ذكر وأنثيين .

C : المجموعة تضم إيمان أو محمد .

D : المجموعة تضم ثلاث إناث ولاتضم الملاكمة إيمان بعد ما تم إقصائها نهائيا من المنافسة .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{9U_n + 2}{U_n + 8} \end{cases}$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = 9 - \dfrac{70}{U_n + 8}$

ب) باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le 2$.

ج) أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.   هـ) استنتج مما سبق أن المتتالية (U_n) متقاربة .

2) أ) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 - U_{n+1} \le \dfrac{7}{8}(2 - U_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le 2 - U_n \le \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ ، ثم أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

II) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$

1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 .

2) أكتب بدلالة n الحدالعام V_n ثم U_n.   3) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ ، ثم استنتج للمرة الثانية حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = U_0(V_0 - 1) + 10U_1(V_1 - 1) + 10^2U_2(V_2 - 1) + \dots\dots\dots + 10^nU_n(V_n - 1)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما ، باستعمال المساواة : $Ln(a \times b) = Ln(a) + Ln(b)$ أثبت أن :

$$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}Ln(a)$$

II) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $D_g =]1, +\infty[$ بـ : $g(x) = Ln\sqrt{\dfrac{x-1}{2e}} + \dfrac{1}{2}$

1) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2)– أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على D_g .

3)– أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على D_g .

III)– لتكن الدالة f المعرفة على المجال $D_f = [1, +\infty[$ بـ : $f(x) = \begin{cases} (x-1)Ln\sqrt{\dfrac{x-1}{2e}} ; x \succ 1 \\ 0 \quad ; x = 1 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)– أحسب : $\lim\limits_{x \underset{\succ}{\to} 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$. ماذا تستنتج ؟ فسر هذه النتيجة بيانيا . 2)– أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3)– أثبت أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

4)– أ)– أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند نقطة A فاصلتها α حيث : $\alpha \succ 1$ يطلب تعيينها .

بـ)– أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A . جـ)– أنشئ (T) و (C_f) .

5)– لتكن الدالة h المعرفة على المجال $D_h = [1, +\infty[$ بـ : $h(x) = -f(x)$

– اشرح كيفية إنشاء (C_h) التمثيل البياني للدالة h إنطلاقا من (C_f) . ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم السابق .

6)– أ)– تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} = x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$ ، ثم أحسب : $\int_2^{\alpha} \dfrac{x^2 - 2x}{x-1} dx$

بـ)– أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = 2$ ، $x = \alpha$.

(استعمل التكامل بالتجزئة)

جـ)– استنتج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و (C_h) و المستقيمين الذي معادلتهما : $x = 2$ ، $x = \alpha$.

بالتوفيق و النجاح في شهادة بكالوريا الأستاذة : بن زادي

الإجابــة النموذجية + سلــم التنقيط :

المــوضوع الأول :

التمرين الأول : (03 نقاط) :

1)- uv $V=\pi\int_1^e \frac{4(Lnx)^4}{x}dx$ uv هو $V=\pi\int_1^e (f(x))^2dx$: $V=\frac{4\pi}{5}uv$ ؟

لدينا $V=4\pi\left[\frac{(Lnx)^5}{5}\right]_1^e uv=\frac{4\pi}{5}uv$ و منه : الإجابة صحيحة .... (0.5ن)

2)- من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x لدينا : $\left(1+\frac{2023}{x}\right)^x=e^{xLn\left(1+\frac{2023}{x}\right)}$

نضع : $t=\frac{1}{x}$ ، $x\to+\infty$ ، $t\to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2023}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}e^{\frac{Ln(1+2023t)}{t}}=\lim_{t\to0}e^{2023\times\frac{Ln(1+2023t)}{2023t}}$$

بما أن : $\lim_{X\to0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1$ و منه : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2023}{x}\right)^x=e^{2023}$ و منه : الإجابة خاطئة........................ (01ن)

3)- نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_n=\left(\sqrt{3}\right)^n$. (U_n) متتالية هندسية أساها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول $U_0=1$.

$$S_n=U_0+U_1+U_1+\dots\dots+U_n=\frac{1}{1-\sqrt{3}}\left[1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]$$

$S_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-3}\right)\left[1-3^{\frac{n+1}{2}}\right]=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{2}$ و منه : الإجابة صحيحة........................ (0.5ن)

4)- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $U_{n+1}-U_n=\frac{e}{n(n+1)}\succ 0$ و منه : (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $n+1\succ n$ ، $\frac{1}{n+1}\prec\frac{1}{n}$ ، $\frac{3}{n+1}+e\prec\frac{3}{n}+e$ ، $\sqrt{\frac{3}{n+1}+e}\prec\sqrt{\frac{3}{n}+e}$

$Ln\sqrt{\frac{3}{n+1}+e} \prec Ln\sqrt{\frac{3}{n}+e}$ و منه : $V_{n+1} \prec V_n$ ، أي أن (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} Ln\sqrt{\frac{3}{n}+e} = Ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Ln\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{n}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

و منه :المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان الإجابة صحيحة .... (01ن)

التمرين الثاني :(05 نقاط):

I)- 1)- $2^0 \equiv 1[11]$ ، $2^1 \equiv 2[11]$ ، $2^2 \equiv 4[11]$ ، $2^3 \equiv 8[11]$ ، $2^4 \equiv 5[11]$ ، $2^5 \equiv 10[11]$ ،

$2^6 \equiv 9[11]$ ، $2^7 \equiv 7[11]$ ، $2^8 \equiv 3[11]$ ، $2^9 \equiv 6[11]$ ، $2^{10} \equiv 1[11]$ . ... (0.5ن)

بواقي قسمة 2^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p = 10$.

$k \in \mathbb{N}$	$10k+9$	$10k+8$	$10k+7$	$10k+6$	$10k+5$	$10k+4$	$10k+3$	$10k+2$	$10k+1$	$10k$	$n =$
$[11]$	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1	$2^n \equiv$

$3^0 \equiv 1[11]$ ، $3^1 \equiv 3[11]$ ، $3^2 \equiv 9[11]$ ، $3^3 \equiv 5[11]$ ، $3^4 \equiv 4[11]$ ، $3^5 \equiv 1[11]$ .... (0.5ن)

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية دورها $p' = 5$.

$k \in \mathbb{N}$	$5k+4$	$5k+3$	$5k+2$	$5k+1$	$5k$	$n =$
$[11]$	4	5	9	3	1	$3^n \equiv$

2)- أ)- لدينا : $2023 \equiv 10[11]$ أي أن : $2023 \equiv -1[11]$ و منه : $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ (لأن $2n+1$ فردي)

$4^{5n+1} = 2^{10n+2}$ و منه : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $1444 \equiv 3[11]$ و منه : $A_{1444} \equiv (-1+3\times4)[11]$ أي أن :

$A_{1444} \equiv 0[11]$ .... (0.5ن)

بـ)- لدينا : $4^{5n+1} \equiv 4[11]$ ، $2023^{2n+1} \equiv -1[11]$ ، A_α يقبل القسمة على **11** معناه : $A_\alpha \equiv 0[11]$.

$A_\alpha \equiv (-1+4\alpha)[11]$ ، $-1+4\alpha \equiv 0[11]$ ، $4\alpha \equiv 1[11]$ ، $12\alpha \equiv 3[11]$ ، $\alpha \equiv 3[11]$. و منه :

A_α يقبل القسمة على **11** معناه : $\alpha = 11k+3 \quad (k \in \mathbb{Z})$ .... (0.5ن)

$n =$	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$ $5k'$	$10k+6$ $5k'+1$	$10k+7$ $5k'+2$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$ $k' \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	$[11]$
$2^n+3^n \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	$[11]$

$n = 11k+5 \quad (k \in \mathbb{N})$ .... (0.5ن)

طريقة ثانية :

لدينا : $3 \equiv -8[11]$ ، $3^t \equiv (-2)^{3t}[11]$ و منه : $1443^t + 1444^t \equiv 0[11]$ يكافئ: $2^t + (-2)^{3t} \equiv 0[11]$.

$n =$	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	$[11]$
$(-2)^{3t} \equiv$	1	-8	9	-6	4	-10	3	-2	5	-7	$[11]$
$2^t+(-2)^{3t} \equiv$	2	5	2	2	9	0	1	5	8	10	$[11]$

$n = 11k+5 \quad (k \in \mathbb{N})$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^3 = 720$

1) البطاقات التي تحمل أرقاما أولية هي: $2,3,5,7$ و منه : $P(A) = \dfrac{A_4^3}{A_{10}^3} = \dfrac{24}{720} = \dfrac{1}{30}$ .... (0.25ن)

2) البطاقات التي تحمل أرقاما فردية هي : $1,3,5,7,9$ و منه : $P(B) = \dfrac{A_5^3}{A_{10}^3} = \dfrac{60}{720} = \dfrac{1}{12}$ .... (0.25ن)

3) البطاقات التي تحمل أرقاما فردية وأولية هي: $3,5,7$ و منه : $P(A \cap B) = \dfrac{A_3^3}{A_{10}^3} = \dfrac{6}{720} = \dfrac{1}{120}$ .... (0.25ن)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120}$$

و منه : $P(A \cup B) = \dfrac{13}{120}$ .... (0.25ن)

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{12}} = \dfrac{1}{10}$ .... (0.25ن)

3)– قيم المتغير العشوائي : $x_i \in \{1,2,3,4\}$ .... (0.25ن)

$P(X=1)=\frac{A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{24}{720}=\frac{1}{30}$ ، $P(X=2)=\frac{A_4^2\times A_6^1\times 3!}{A_{10}^3\times 2!\times 1!}=\frac{216}{720}=\frac{3}{10}$ .... (0.25ن) (0.25ن)

$P(X=3)=\frac{A_4^1\times A_6^2\times 3!}{A_{10}^3\times 2!\times 1!}=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}$ ، $P(X=4)=\frac{A_6^3}{A_{10}^3}=\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$ .... (0.25ن) (0.25ن)

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=\frac{1}{30}+\frac{6}{10}+\frac{3}{2}+\frac{4}{6}\approx 2.8$ .... (0.25ن)

التمرين الثالث: (05 نقاط):

1)– أ)- $P(2)=8-16+16-8=0$ .... (0.25ن)

ب)- من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$ .... (0.5ن)

$P(z)=0$ يكافئ من $z=2$: أو $z^2-2z+4=0$ $(\Delta=-12)$

$S=\{2,1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\}$ .... (0.5ن)

2)– أ)- $z_B=2e^{\frac{i\pi}{3}}$ ، $z_C=2e^{\frac{-i\pi}{3}}$ ، $\frac{z_B}{z_C}=e^{\frac{i2\pi}{3}}$ .... (0.5ن)

ب)- $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n=e^{\frac{i2n\pi}{3}}$. $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقي يكافئ : $(k\in\mathbb{N})$ $\frac{2\pi n}{3}=k\pi$ و منه :

$(k\in\mathbb{N})$ $2n=3k$ ، لدينا : $3/2n$ و $PGCD(2,3)=1$ ومنه : حسب مبرهنة غوص : $3/n$

$n=3k'$ $(k'\in\mathbb{N})$ .... (0.5ن)

جـ)- n من فردي معناه : $n=2k+1\ (k\in\mathbb{N})$

$$(z_B)^{3n}=2^{3n}\left(e^{i(2k+1)\pi}\right)=2^{3n}e^{i\pi}=-2^{3n}$$

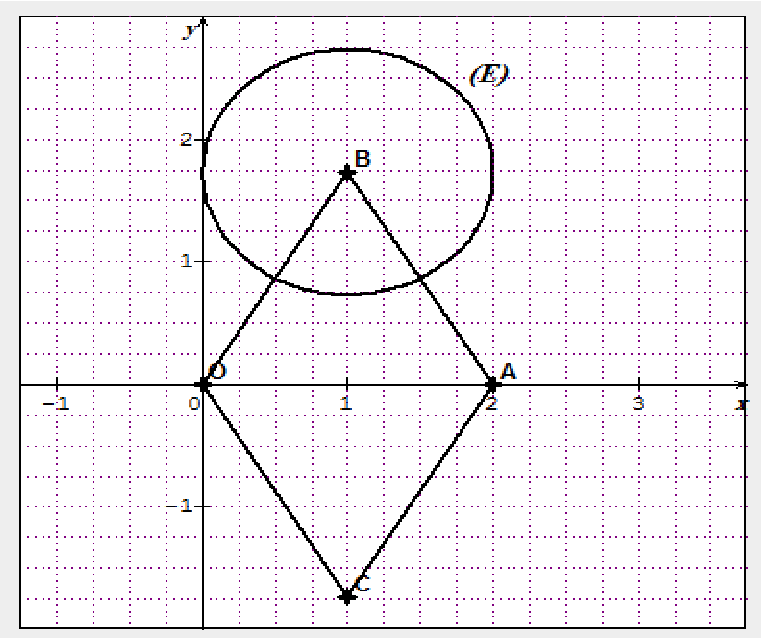
$$(z_C)^{3n}=2^{3n}\left(e^{-i(2k+1)\pi}\right)=2^{3n}e^{-i\pi}=-2^{3n}$$ .... (0.5ن)

$$(z_B)^{3n}+(z_C)^{3n}+2^{3n+1}=-2^{3n}-2^{3n}+2^{3n+1}=-2^{3n+1}+2^{3n+1}=0$$

د)- لدينا : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$ $\left(z_B=z_A-z_C\right)$ و $OB=OC=2$ (متوازي أضلاع له ضلعان متتابعان متقايسان)

ومنه : الرباعي $OBAC$ معين .... (0.5ن)

- تعليم النقاط : .... (0.5ن)



2)– أ)-$1=\left(z-z_B\right)\overline{\left(z-z_C\right)}=\left(z-z_B\right)\left(z-z_C\right)$ ومنه : $BM=1$

(نذكر أن : $z.\overline{z}=|z|^2$)

ومنه: (E) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $r=1$ .... (0.5ن)

ب)- $\dfrac{z_A.\overline{z}-z_C}{\overline{z}-z_C}=\dfrac{z_A.\overline{z}-2.z_C+z_C}{\overline{z}-z_C}=\dfrac{z_A.\overline{z}-z_A.z_C+z_C}{\overline{z}-z_C}=\dfrac{z_C}{\overline{z}-z_C}+z_A=z'$ .... (0.25ن)

ج)- $\left|\dfrac{z_C}{\overline{z-z_B}}\right|=\left|\dfrac{z_C}{\overline{\overline{z-z_B}}}\right|=\left|\dfrac{z_C}{\overline{z}-z_C}\right|=\left|z'-z_A\right|$ ومنه : $AM'=\dfrac{OC}{BM}$

وبما أن : $M\in(E)$ فإن : $BM=1$ ومنه : $AM'=2$ ومنه : مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A

و نصف قطرها $r=2$ .... (0.5ن)

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$ ، $g(1)=e^{-1}+1$ . ... (0.75ن)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$7e^{\frac{-5}{2}}+1$	$\searrow$	$e^{-1}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \succ 0$ . ... (0.25ن)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x-2} \succ 0$ ، $2x^2-5x+4 \succ 0$ ($\Delta=-7 \prec 0$) ومنه : $g(x)-1 \succ 0$ .... (0.25ن)

g قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$: $2g'(x)=\left(4x^2-2x-2\right)e^{x-2}$ ، $g''(x)=\left(2x^2+3x-2\right)e^{x-2}$

$$2g'(x)-g''(x)+4e^{x-2}=\left(4x^2-2x-2-2x^2-3x+2+4\right)e^{x-2}$$

$2g'(x)-g''(x)+4e^{x-2}=\left(2x^2-5x+4\right)e^{x-2}=g(x)-1$ .... (0.5ن)

$$S=\int_1^2\left(g(x)-1\right)dx=\left[2g(x)-g'(x)+4e^{x-2}\right]_1^2=\left[\left(2x^2-9x+13\right)e^{x-2}\right]_1^2$$

.....$S=\int_1^2\left(g(x)-1\right)dx=3-6e^{-1}$ .... (0.25ن)

$S=\left(3-6e^{-1}\right)cm^2$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=1$ ، $x=1$ ، $x=2$ . ... (0.25ن)

1) – أ) – $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}\left(2x-3\right)\left(e^{x-2}+1\right)=-e^{-1}-1\\ \lim\limits_{x\underset{\prec}{\to}1}\left(x-1\right)=0^{-1}\end{cases}$ ومنه : $\lim\limits_{x\underset{\prec}{\to}1}f(x)=+\infty$ .... (0.25ن)

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}\left(2x-3\right)\left(e^{x-2}+1\right)=-e^{-1}-1\\ \lim\limits_{x\underset{\succ}{\to}1}\left(x-1\right)=0^{+1}\end{cases}$ ومنه : $\lim\limits_{x\underset{\succ}{\to}1}f(x)=-\infty$ .... (0.25ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x=1$ . ... (0.25ن)

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+1\right)=1\end{cases}$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ .... (0.25ن)

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $y=2$ بجوار $-\infty$ . ... (0.25ن)

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x-2}+1\right) = +\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: .... (0.25ن)

2)– f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\left(e^{x-2}+1\right) + \left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)e^{x-2}$

$$f'(x) = \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x-3}{x-1}\right]e^{x-2} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ .... (0.5ن)

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2} \succ 0$ ومنه: متزايدة تماما على $\mathbb{R}-\{1\}$ . ... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة f : .... (0.5ن)

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3)– $(T): y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3x - 4$ .... (0.25ن)

$f(0) = 3\left(e^{-2}+1\right) \approx 3.40$ ، $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$ . ... (0.25ن) (0.25ن)

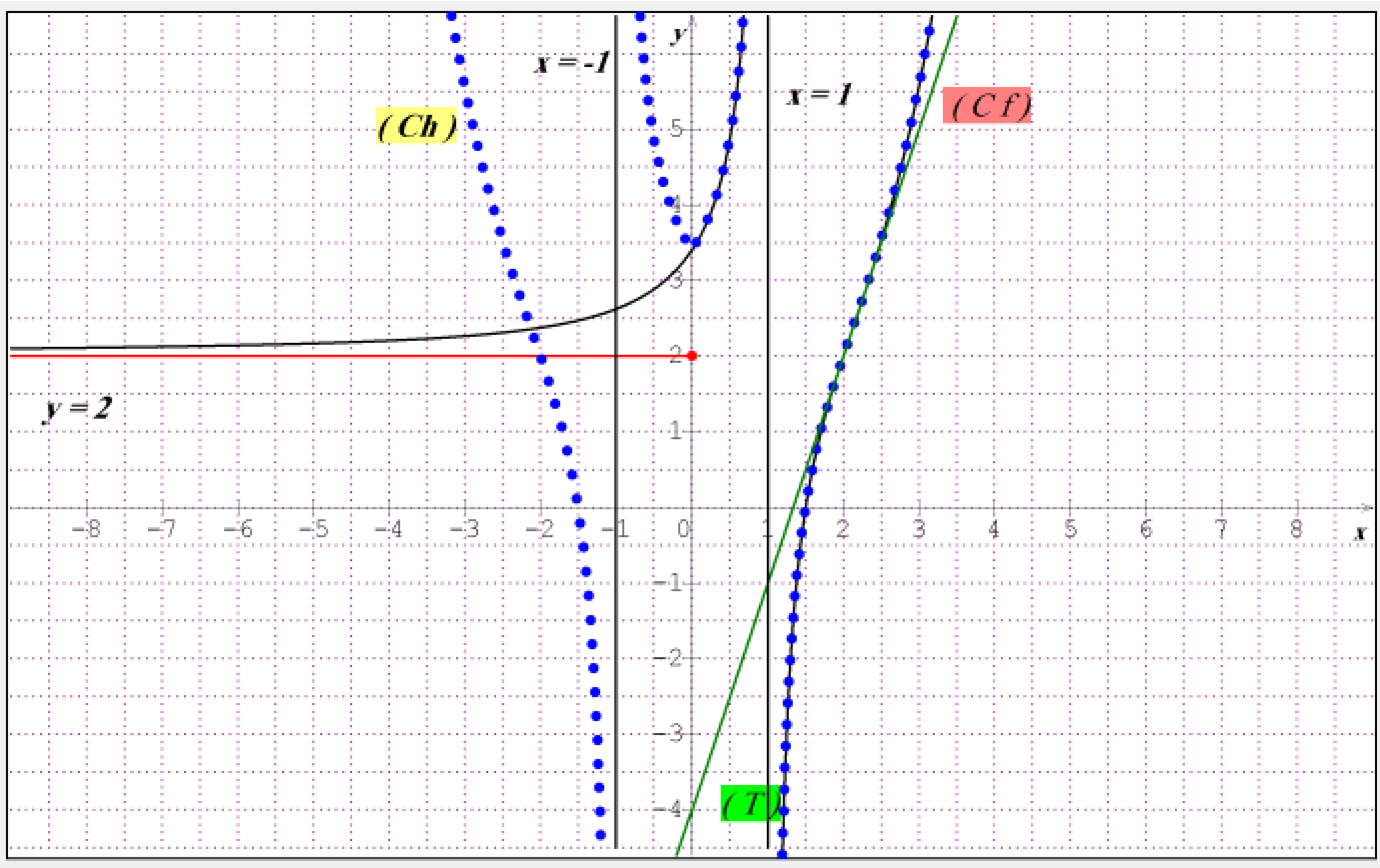
III)– 1)– من أجل كل x من D_h : $h(-x) = h(x)$ (لأن : $|-x| = |x|$) ومنه : الدالة h دالة زوجية............ (0.25ن)

2)– على المجال $[0,1[\cup]1,+\infty[$: $h(x) = f(x)$ و منه (C_h) يطابق (C_f) .

على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,0]$ بما ان الدالة h دالة زوجية فإن يقبل محور التراتيب كمحور تناظر : .... (0.25ن)

نرسم نظير الجزء السابق بالنسبة لـ (yy')

3)– إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) : .... (0.75ن)



الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط) :

I) – 1) – $119 = 7\times 17$ ، $D_{119} = \{1,7,17,119\}$ .... (0.25ن)

2) – نضع : $a = 17a'$ $b = 17b'$ حيث : $PGCD(a',b') = 1$

لدينا : $m = \dfrac{a\times b}{d}$ حيث : $d = PGCD(a,b)$ $m = PPCM(a,b)$ ومنه :

$\begin{cases} 17a'b' = 2023 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a'b' = 119 \\ PGCD(a',b') = 1 \end{cases}$.

a'	1	119	7	17
b'	119	1	17	7

$S = \{(17,2023);(2023,17);(119,289);(289,119)\}$ .... (1.25ن)

II) – 1) – $34 = 2\times 17$ ، $119 = 7\times 17$ ، ومنه : $PGCD(289,34) = 17$ .... (0.25ن)

ومنه : المعادلة $\left(E\right)$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ . ... (0.25ن)

2)– المعادلة $\left(E\right)$ تكافئ : $17x-2y=119......\left(E\right)$. $17x-2y=119$ معناه : $2y=17x-199$

$2y=17(x-7)$ لكن **2** و**17** أوليان فيما بينهما و منه حسب مبرهنة غوص :

أي أن : $17/y$: **y مضاعف 17** .... (0.5ن)

$y=17k\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ، نعوض y بما يساويه في المعادلة $\left(E\right)$ نجد : $y=17k\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$S=\left\{\left(2k+7,17k\right);\left(k\in\mathbb{Z}\right)\right\}$ .... (0.5ن)

3)– $x^2-y\le 52$ يكافئ : $4k^2+28k+49-17k\le 52$ ، $4k^2+11k-3\le 0$.

$\Delta=169$ ، $k_1=-3$ ، $k_2=\frac{1}{4}$ ومنه : $k\in\left\{-3,-2,-1,0\right\}$.

$S'=\left\{\left(1,-51\right);\left(3,-34\right);\left(5,-17\right);\left(7,0\right)\right\}$ .... (0.5ن)

III)– n عددطبيعي فردي معناه : $n\equiv 1\left[2\right]$ ، باقي قسمته على 17 هو 16 معناه : $n\equiv 16\left[17\right]$

$\begin{cases}17n\equiv 17\left[34\right]\\ 2n\equiv 32\left[34\right]\end{cases}$ ، $15n\equiv -15\left[34\right]$ ، $n\equiv -1\left[34\right]$ ، $n\equiv 33\left[34\right]$ و منه :

باقي قسمة n على 34 هو **33** . ... (0.5ن)

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1)– عدد الحالات الممكنة للسحب : $C_{12}^2=66$

2ذهبية ← 40 ، 1 ذهبية + 1فضية ← 30 ، 1 ذهبية + 1 برونزية ← 10 ، 2 فضية ← 20 ، 1 فضية + 1 برونزية ← 0 .

$x_i\in\left\{,10,20,30,40\right\}$ .... (0.5ن)

$P\left(X=0\right)=\frac{C_1^1\times C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{66}=\frac{2}{33}$ ، $P\left(X=10\right)=\frac{C_1^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{7}{66}$ .... (0.25ن)(0.25ن)

$P\left(X=20\right)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$ ، $P\left(X=30\right)=\frac{C_4^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{28}{66}=\frac{14}{33}$ .... (0.25ن)(0.25ن)

$P\left(X=40\right)=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$ .... (0.25ن)

x_i	0	10	20	30	40
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{7}{22}$

$E(X) = 0\times\frac{2}{33} + 10\times\frac{7}{66} + 20\times\frac{1}{11} + 30\times\frac{14}{33} + 40\times\frac{7}{22}$ ، $E(X) = \frac{85}{3}$ .... (0.25ن)

2)– عدد الحالات الممكنة : $C_{38}^{3} = 8436$.

$P(A) = \frac{C_{18}^{3}}{C_{38}^{3}} = \frac{816}{8436} = \frac{68}{703}$ .... (0.5ن)

$P(B) = \frac{C_{18}^{1}\times C_{20}^{2}}{C_{38}^{3}} = \frac{3420}{8436} = \frac{15}{37}$ .... (0.5ن)

$P(C) = \frac{C_{2}^{1}\times C_{36}^{2} + C_{2}^{2}\times C_{36}^{1}}{C_{38}^{3}} = \frac{1296}{8436} = \frac{108}{703}$ .... (0.5ن)

$P(D) = \frac{C_{19}^{3}}{C_{37}^{3}} = \frac{969}{8436} = \frac{17}{148}$ .... (0.5ن)

التمرين الثالث: (05 نقاط) :

I)– 1)– أ)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{9U_n + 72 - 70}{U_n + 8} = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8}$ .... (0.25ن)

ب)– $P(n)......0 \le U_n \le 2$

من أجل $n = 0$: $0 \le \frac{1}{2} \le 2$ و منه : $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ معناه $0 \le U_n \le 2$ ، نبرهن على صحة $P(n+1)$ معناه : $0 \le U_{n+1} \le 2$

$0 \le U_n \le 2$ ، $8 \le U_n + 8 \le 10$ ، $\frac{1}{10} \le \frac{1}{U_n + 8} \le \frac{1}{8}$ ، $\frac{-70}{8} \le \frac{-70}{U_n + 8} \le \frac{-70}{10}$

ومنه : $0 \le \frac{1}{4} \le U_{n+1} \le 2$: $P(n+1)$ محققة .

ومنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le 2$ حسب مبدأ البرهان بالتراجع . ... (0.5ن)

جـ)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{9U_n + 2}{U_n + 8} - U_n = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{U_n + 8} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + 8}$

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le 2$ ومنه : $U_n + 1 \succ 0$ ، $U_n + 8 \succ 0$ ، $U_{n+1} - U_n \ge 0$ أي أن :

(U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .... (0.5ن)

هـ)– (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بـ: 2 فهي متقاربة .... (0.25ن)

2)– أ)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 - U_{n+1} = 2 - \dfrac{9U_n + 2}{U_n + 8} = \dfrac{2U_n + 16 - 9U_n - 2}{U_n + 8} = \dfrac{7(2 - U_n)}{U_n + 8}$

$U_n \ge 0$ ، $U_n + 8 \ge 8$ ، $\dfrac{1}{U_n + 8} \le \dfrac{1}{8}$ ، $\dfrac{7}{U_n + 8} \le \dfrac{7}{8}$ و منه : $2 - U_{n+1} \le \dfrac{7}{8}(2 - U_n)$ .... (0.5ن)

ب)–

$$\begin{aligned}
\cancel{2 - U_1} &\le \frac{7}{8}(2 - U_0) \\
2 - U_2 &\le \frac{7}{8}(\cancel{2 - U_1}) \\
&\vdots \\
2 - U_n &\le \frac{7}{8}(\cancel{2 - U_{n-1}}) \\
\hline
0 \le 2 - U_n &\le \left(\frac{7}{8}\right)^n (2 - U_0)
\end{aligned}$$

و منه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le 2 - U_n \le \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ .... (0.5ن)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$ .... (0.25ن)

II)–1)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \dfrac{\dfrac{9U_n + 2}{U_n + 8} - 2}{\dfrac{9U_n + 2}{U_n + 8} + 1} = \dfrac{9U_n + 2 - 2U_n - 16}{9U_n + 2 + U_n + 8} = \dfrac{7(U_n + 2)}{10(U_n + 2)}$

$V_{n+1} = \dfrac{7}{10}V_n$ ومنه : (V_n) متتالية هندسية أساسها : $q = \dfrac{7}{10}$ وحدها الأول : $V_0 = \dfrac{\dfrac{1}{2} - 2}{\dfrac{1}{2} + 1} = -1$ .... (0.5ن)

2)– من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = V_0 \times q^n = -\left(\frac{7}{10}\right)^n$ .... (0.25ن)

$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$ ، $V_n\left(U_n + 1\right) = U_n - 2$ ، $V_n \times U_n - U_n = -V_n - 2$ ، $U_n\left(V_n - 1\right) = -V_n - 2$

$U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n} = \frac{-\left(\frac{7}{10}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{7}{10}\right)^n}$ .... (0.5ن)

3)– $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ و منه : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$ .... (0.25ن)(0.25ن)

4)– لدينا : $U_n = \frac{V_n + 2}{1 - V_n}$ ، $U_n\left(1 - V_n\right) = V_n + 2$ ، $U_n\left(V_n - 1\right) = -V_n - 2 = \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2$

$10^n U_n\left(V_n - 1\right) = 7^n - 2 \times 10^n$ ، $S_n = \frac{1}{1-7}\left(1 - 7^{n+1}\right) - \frac{2}{1-10}\left(1 - 10^{n+1}\right)$ ومنه :

$S_n = \frac{7^{n+1} - 1}{6} - \frac{2(10^{n+1} - 1)}{9}$ .... (0.5ن)

التمرين الرابع (07 نقاط):

I)– $\begin{cases} Ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = Ln\left(\sqrt{a}\right) + Ln\left(\sqrt{a}\right) = 2Ln\left(\sqrt{a}\right) \\ Ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = Lna \end{cases}$ و منه : $2Ln\left(\sqrt{a}\right) = Lna$

أي أن : $Ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} Lna$ .... (0.25ن)

II)–1)– $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ .... (0.25ن)(0.25ن)

2)– g قابلة للإشتقاق على D_g : $g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2e}}{\frac{x-1}{2e}}\right) = \frac{1}{2(x-1)} \succ 0$ .... (0.25ن)

ومنه : الدالة متزايدة تماما على D_g. .... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة g : .... (0.25ن)

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3)- $g(3)=Ln\sqrt{\dfrac{2}{2e}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}Ln\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ .... (0.25ن)

إشارة $g(x)$: .... (0.25ن)

x	0		3		$+\infty$
إشارة: $g(x)$		-	0	+	

III)-1)- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}Ln\sqrt{\dfrac{x-1}{2e}}=-\infty$ ومنه: f غير قابلة للإشتقاق عند **1** من اليمين.. (0.25ن)(0.25ن)

- (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $W(1,0)$.. (0.25ن)

2)- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .... (0.25ن)

3)- f قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{2}Ln\left(\dfrac{x-1}{2e}\right)+\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{x-1}{2}=g(x)$ .... (0.25ن)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$:

f متناقصة تماما على المجال : $]-\infty,3[$ ، f متزايدة تماما على المجال : $]3,+\infty[$ .... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة f : .... (0.5ن)

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

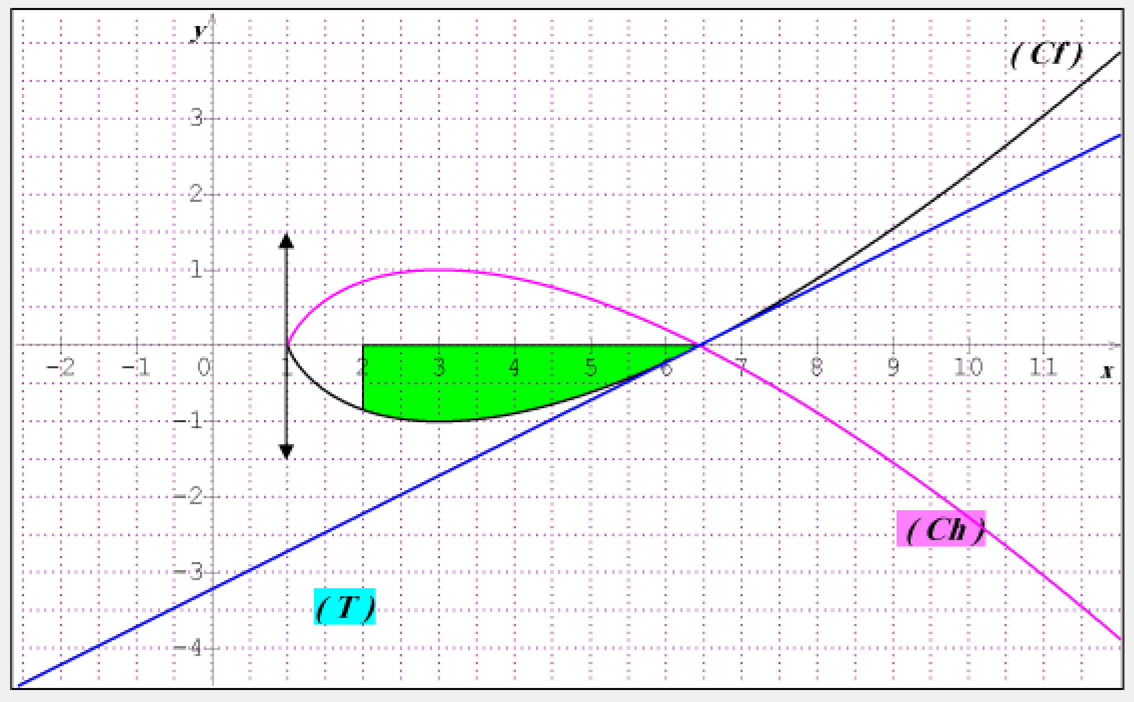
4)–أ)– $\left(x-1\right)Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}}=0$ معناه : $x-1=0$ أو $Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}}=0$

$x=1$ أو $Ln\sqrt{\frac{x-1}{2e}}=0$ ، $\frac{1}{2}Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right)=0$ ، $\frac{x-1}{2e}=1$ ، $x=1+2e$.

بما أن : $\alpha \succ 1$ فإن : $\alpha=1+2e$ .... (0.25ن)

ب)– $(T): y=f'(1+2e)(x-1-2e)+f(1+2e)=\frac{1}{2}x-e-\frac{1}{2}$ .... (0.25ن)

جـ)– إنشاء (T) ، (C_f) و (C_h) : .... (0.75ن)



5)– (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لـ (xx') على المجال $\left[1,+\infty\right[$ . ... (0.25ن)

6)– أ)– $x-1-\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)-1}{x-1}=\frac{x^2-2x+1-1}{x-1}=\frac{x^2-2x}{x-1}$ .... (0.25ن)

$$\int_2^{\alpha}\frac{x^2-2x}{x-1}dx=\int_2^{\alpha}\left[x-1-\frac{1}{x-1}\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}-x-Ln\left(x-1\right)\right]_2^{\alpha}$$

$\int_2^{\alpha}\frac{x^2-2x}{x-1}dx=2e^2-\frac{3}{2}-Ln2$ .... (0.25ن)

ب- $U(x) = \frac{x^2 - 2x}{4}$ $\qquad$ $U'(x) = \frac{x-1}{2}$

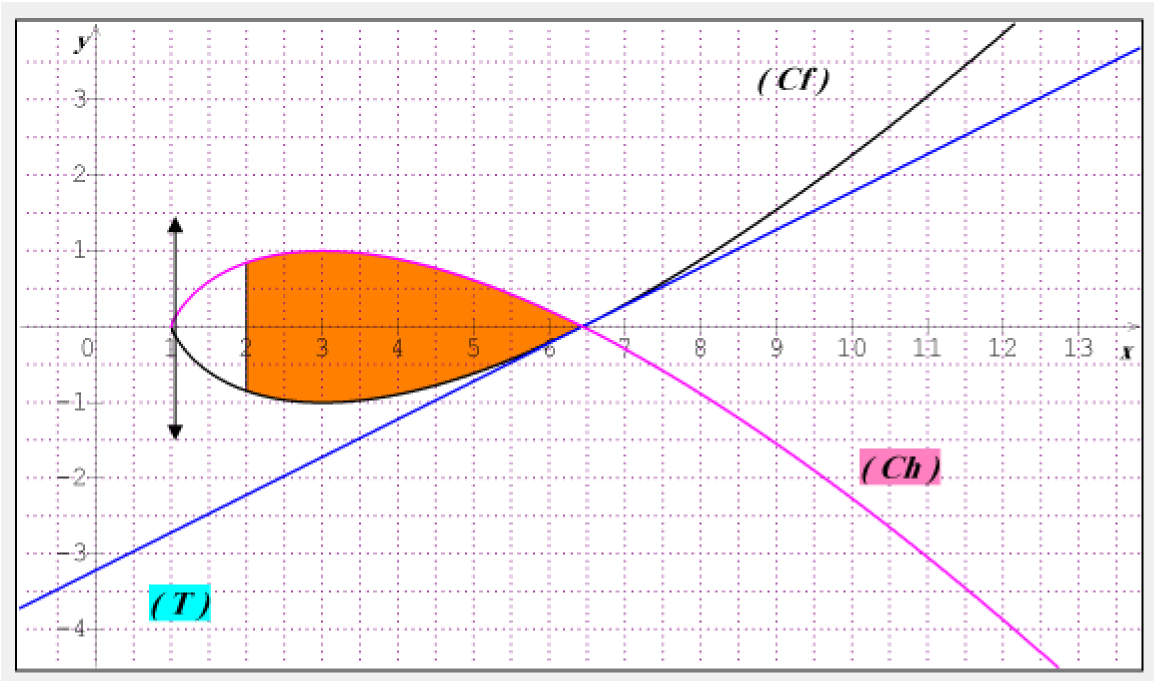
$V'(x) = \frac{1}{x-1}$ $\qquad$ $V(x) = Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right)$

$$\int_2^{\alpha} f(x)\,dx = \left[\left(\frac{x^2-2x}{4}\right)Ln\left(\frac{x-1}{2e}\right)\right]_2^{\alpha} - \frac{1}{4}\int_2^{\alpha}\frac{x^2-2x}{x-1}\,dx$$

$$\int_2^{\alpha} f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\left(2e^2 - \frac{3}{2} - Ln2\right) \qquad S = -\int_2^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(2e^2 - \frac{3}{2} - Ln2\right)$$

$S \approx 3.146cm^2$ .... (0.75ن)

جـ- $S' = \int_2^{\alpha} g(x) - f(x)\,dx = -2\int_2^{\alpha} f(x)\,dx \approx 6.292cm^2$ .... (0.25ن)



امتحان بكالوريا تجريبية — ثانوية أوبيناتر الخاصة

الشعبة: رياضيات — دورة ماي 2024

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 سا ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام : -2 , -1 , 0, 1, 2 و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام : -1 , 0, 1 و كرتان سوداوان تحملان الرقمين : -1 , 0 (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس).

1) نسحب عشوائيا ودون إرجاع كريتين من هذا الكيس و ليكن الحدثان :

A : "الكريتان المسحوبتان لوناهما مختلفان", B : "الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"

– أحسب $p(A)$ و $p(B)$ ثم بين أن $p(A\cup B)=\frac{32}{45}$.

2) نعيد الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كريتين في آن واحد .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم أكتب قانون إحتماله .

ب/ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

2) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) هل (u_n) متقاربة ؟ عين نهايتها .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$.

ب/ أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج/ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) a و b عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a=\overline{201}$ و $b=\overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2) x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $ax-by=3$

أ/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0[3]$

ب/ استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $0\le x_0 \quad 5$ ثم حل المعادلة (E) .

3) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب/ بين ان $p\gcd(x,y)=pcgd(y,3)$.

ج/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\frac{y}{x}$ كسرا قابلا للاختزال .

4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على ب : $u_0=2$ ، $u_{n+1}=u_n+19$ و $v_0=5$ ، $v_{n+1}=v_n+9$

– عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق $u_p=v_q$ و $|q-p|\le 20$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة ب : $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\ge 0$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة ب : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O,i,j)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

4) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-1$

5) أ/ بين أن $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

ب/ بين ان المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0<x_0<0.2$.

ج/ بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

6) أحسب $f(-1)$ ثم أرسم (T)،(Δ) و (C_f)

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): xe^{-x+2}-1-m=0$$

8) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة ب : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على و التي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير x.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي حيث: $n \geq 4$

يحتوي صندوق U على n كرية لا يمكن التمييز بينها في اللمس ، منها 3 حمراء و البقية سوداء . نسحب في آن واحد كريتين .

1) أحسب احتمال الحدثين التاليتين : A" سحب كريتين من نفس اللون" ، B" سحب كرية حمراء على الأكثر" .

2) أحسب احتمال الحدث C" سحب كرية حمراء على الأقل"

3) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k للصندوق k $\left(1 \leq k \leq 3\right)$ الذي يحتوي على k كرية حمراء و $n-k$ كرية سوداء ، نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كريتين.

نسمي RR الحدث: " الحصول على كريتين حمراويتين" و NN الحدث "الحصول على كريتين سوداويتين"

و RN الحدث " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون "

ليكن المتغير X العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

أ) انجز شجرة الاحتمالات.

ب) عين مجموعة قيم X.

جـ) أثبت أن: $P\left(X = 1\right) = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ و $P\left(X = 2\right) = \dfrac{8}{3n(n-1)}$.

د) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z التالية:

$$\left(z-2\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,u,v\right)$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب

$$z_A=-1+i\sqrt{3} \quad , \quad z_B=-1-i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_C=2$$

1) بين أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

أ) عين طبيعة المثلث ABC.

ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة $\left(\mathcal{C}\right)$ المحيطة بالمثلث ABC ثم أرسم $\left(\mathcal{C}\right)$.

2) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2\left(z+\bar{z}\right)+z\bar{z}=0$.

3) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى $\left(\Gamma\right)$.

4) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R.

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في المجموعة ^{2} المعادلة : $(E): 5x-6y=3$

1) أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y)حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E)ثم حل في ^{2} المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة $(S)\ :\ \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2) a و b عددان طبيعيان حيث :

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

أ/ عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة ـبـ : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O,i,j)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل x عدد حقيقي ، $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-\ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

أرسم (Δ) و (C_g)

4) استنتج اشارة $g(x)$عندما يتغير x في المجموعة .

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة ـبـ : $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل x عدد حقيقي: $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ثم أحسب : $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$

4) أحسب $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

التمرين الأول:

1) حساب الاحتمالات :

$$P(A) = \frac{62}{90}$$

$$P(B) = \frac{6}{90}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{90}$$

$$P(A \cup B) = \frac{64}{90} = \frac{32}{45}$$

2)

أ) المتغير العشوائي

$$P(X = 0) = \frac{7}{45}$$

$$P(X = 1) = \frac{20}{45}$$

$$P(X = 2) = \frac{12}{45}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{45}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{45}$$

ب) حساب الأمل الرياضياتي

$$E(X) = 1.4$$

التمرين الثاني:

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

- لدينا : $\frac{1}{2u_n+1}-1=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=u_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

2) أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

-1 من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

-2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ :

$0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

-3 حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

- لدينا : . $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$
- تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in}$ متزايدة :

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$
- أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in}$ متزايدة.

ج) دراسة تقارب المتتالية : $(u_n)_{n\in}$

$(u_n)_{n\in}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد . $\frac{1}{2}$

- تعيين نهاية المتتالية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$: $(u_n)_{n\in}$

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$:

1) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in}$ هندسية :

- لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times 3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$$

أي

$$v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$$

ومنه $(v_n)_{n\in}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول

$$v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$$

2) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times 6^n$
- استنتاج أنَ : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$
- ومنه $\left(2v_n-3^n\right)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه

$$u_n==-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\frac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$$ أي $$u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$$

- حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$:

التمرين الثالث:

1) a,b في النظام العشري $b=9$ و $a=19$

2)

أ) تبيان أن $x \equiv 0[3]$

$19x - 9y = 3 \dots (E)$, $19x = 9y + 3$, $19x = 3(3y+1)$, $19x \equiv 0[3]$

و 19 أولي مع 3 (حسب مبرهنة غوص) اذن $x \equiv 0[3]$

ب) الحل الخاص $(x_0, y_0) = (3,6)$

حل المعادلة (E)

$$S = \{(9k+3, 19k+6)/k \epsilon \mathbb{Z}\}$$

3)

أ) القيم الممكنة لـ d هي : $d \in \{1 ; 3\}$

ب) $pgcd(x;y) = pgcd(y;3)$

ج) $\frac{y}{x}$ قابلا للاختزال من أجل $(x;y) = \{(27k'+3; 57k'+6)/k' \in \mathbb{Z}\}$

4) $(p;q) = \{(3;6);(12,25)\}$

التمرين الرابع:

1) لدينا : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$

أ) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات :

- لدينا : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+2}\right) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} = +\infty$

- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^2\times e^{-x} - e^2 \times xe^{-x}\right) = 1$

- حساب المشتقة :

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

- دراسة إشارة المشتقة :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،: $g(x)\geq 0$

- من أجل $x\in$ فان $g(x)\in[0;+\infty[$ ومنه $g(x)\geq 0$

2) لدينا : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$

1- حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=+\infty$ لأن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{1}{e^{2}}=0\end{cases}$$

2- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=g(x)$

- لدينا : $f'(x)=1+e^{-x+2}-xe^{-x+2}=1+(1-x)e^{-x+2}=g(x)$

ومنه $f'(x)=g(x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3- حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x+2}=0$

- التفسير الهندسي :

المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4- دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى $(\Delta): y=x-1$

- ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=xe^{-x+2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

5- أ) تبيان أنَ النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) :

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(x-2)e^{-x+2}$
- جدول إشارة : $f''(x)$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$

- المشتقة الثانية f'' تنعدم من أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

2) تبيان أن المنحني (C_f) في نقطة فاصلتها : $0<x_0<0.2$

- الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

- $f(0)=-1$ و $f(0.2)=0.2-1+0.2\times e^{-0.2+2}=-0.8+1.21=0.41$

ومنه $f(0)\times f(0.2)<0$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $0<x_0<0.2$
- أي (C_f)يقطع $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0<x_0<0.2$

3) تبيان أنَ المنحني (C_f) يقبل مماسا(T) يوازي المستقيم : (Δ)

(T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

أي $f'(x)=1$ ومنه $g(x)=1$ وبالتالي : $1+(1-x)e^{-x+2}=1$

إذن : $(1-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

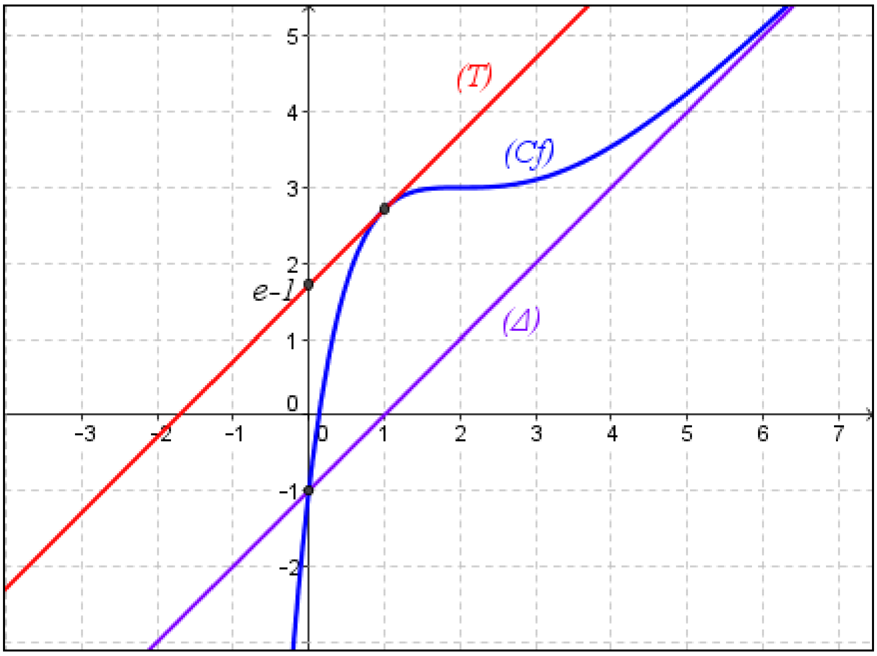
- كتابة معادلة ديكارتية للمماس : (T)

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+e=x-1+e$ أي $(T): y=x-1+e$

د) حساب : $f(-1)$

$$f(-1)=-1-1-e^{3}=-2-e^{-3}=-22.09$$

الرسم :



6- المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$

$xe^{-x+2}-1-m=0$ معناه $xe^{-x+2}-1=m$

ومنه $x-1+xe^{-x+2}=x+m$ أي $f(x)=x+m$

- إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (Δ) و (T)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .
- إذا كان $m\in]-1;e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m=e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1.
- إذا كان $m\in]e-1;+\infty[$ فان المعادلة ليس لها حل .

7- تبيان أنَ الدالة F دالة أصلية للدالة f على والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير :

- لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

ومن
$$F'(x)=x-1-\left[e^{-x+2}+(1+x)\left(-e^{-x+2}\right)\right]=x-1-(1-1-x)e^{-x+2}$$
$$=x-1+xe^{-x+2}$$

أي $F'(x)=f(x)$

- ولدينا : $F(2)=\frac{1}{2}\times2^2-2-(1+2)e^{-2+2}+3=2-2-3e^0+3=-3+3=0$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) احتمال الأحداث A، B، C :

$P(C) = \frac{6n-12}{n^2-n}$ ، $P(B) = \frac{n^2-n-6}{n^2-n}$ ، $P(A) = \frac{n^2-7n+18}{n^2-n}$

3) أ- شجرة الاحتمالات

ب- $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

ج- $P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$ ، $P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

د- $P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$ ، $P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ ، $P(X=0) = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$

$E(X) = \frac{4}{n}$

التمرين الثاني:

I. حل المعادلة : $(E): (z-2)(z^2+2z+4) = 0$

$(z-2)(z^2+2z+4) = 0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

- $z-2=0$ معناه $z=2$
- حل المعادلة $z^2+2z+4=0...(*)$

- حساب المميز : $\Delta = 2^2 - 4\times1\times4 = 4-16 = -12$

نضع $\Delta = 12i^2 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$$z_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3} \text{ ، } z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}$$

- مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \left\{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\right\}$

II. لدينا : $z_A = -1+i\sqrt{3}, z_B = -1-i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$

1- أ) تبيان أنَ : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

- لدينا : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$

- ومنه $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6}{12} + i\frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- أي $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

لانَ : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

- $Arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\left(k \in \quad\right)$

ب) تعيين طبيعة المثلث : ABC

- لدينا : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1$ ومنه $\frac{CB}{CA} = 1$ أي $CB = CA$
- ولدينا : $Arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\left(k \in \quad\right)$ أي $\left(CA;CB\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\left(k \in \quad\right)$ ومنه

ABC مثلث متقايس الأضلاع

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث : ABC

- لدينا : $|z_A| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 = OA$

$|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 = OB$ و $|z_C| = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2 = OC$

- وبالتالي : $OA = OB = OC = 2$ أي النقط B, A و C تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0$

$2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0$ معناه $2\left(x + iy + x - iy\right) + x^2 + y^2 = 0$

ومنه $x^2 + y^2 + 4x = 0$ وبالتالي : $\left(x + 2\right)^2 + y^2 = 4$

أي أنَ (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

ب) التحقق من أنَ A و B تنتميان إلى (Γ) :

- لدينا : $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|-1+i\sqrt{3}+2|=|1+i\sqrt{3}|=2=r$

- ولدينا : $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=|-1-i\sqrt{3}+2|=|1-i\sqrt{3}|=2=r$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ) .

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

1) تعيين صورة النقطة B بالدوران R :

- لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$
- ولدينا : $a=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ولدينا كذلك : $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

أي $b=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}=1+i\sqrt{3}$

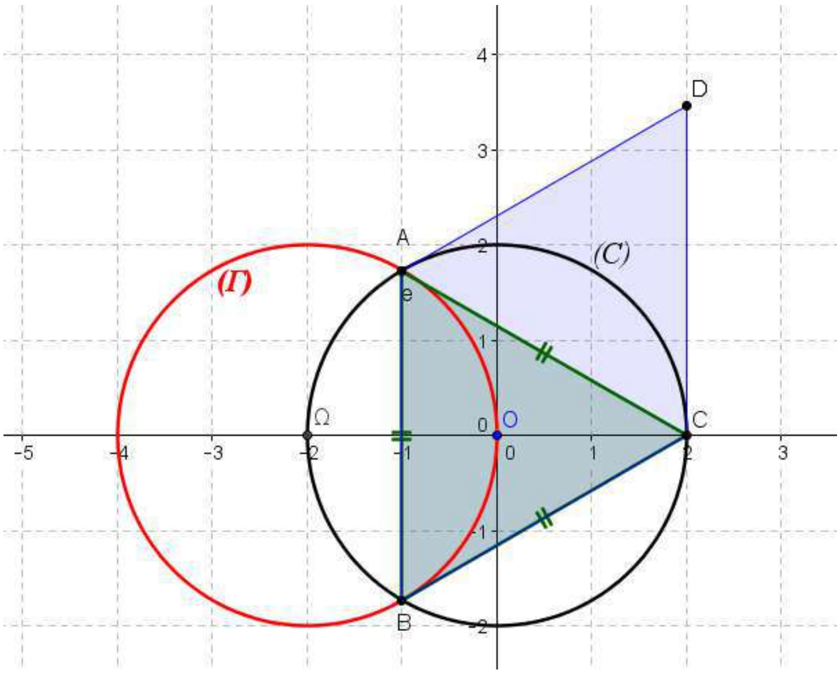
- إذن : $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}$

أي $z_{B'}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}=2=z_C$ ومنه $R(B)=C$

2) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$$

أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$



- استنتاج طبيعة الرباعي : $ABCD$

الرباعي $ABCD$ معين لأنَ :

- $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{AB}=-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$ و

$z_{DC}=2+2i\sqrt{3}-2=2i\sqrt{3}$

أي $z_{AB}=z_{DC}=2i\sqrt{3}$

- ولدينا : $BC=CD$ لأن $R(B)=C$ و $R(C)=D$

ج) صورة (Γ) بالدوران : R

هي $(\mathcal{C})$ لأنَ $R(\Omega)=O$ و $R(B)=C$

التمرين الثالث:

لدينا : $(E): 5x-6y=3$

1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:

- لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$

أي $5x=3(1+2y)$

- لدينا : $3/5x$ و $3\wedge 5=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3

2) تعيين حل خاص للمعادلة : (E)

- نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times 3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)

- حل المعادلة: (E) لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$
أي $(*) : 5(x-3)=6(y-2)$

- لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge 5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص .
أي $x-3=6k\,(k\in\ )$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\ )$

- من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$
ومنه $y-2=5k\,(k\in\ )$ أي $y=5k+2\,(k\in\ )$

- مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\ \}$

ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv -1[6]\\ x\equiv -4[5]\end{cases}$

- $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\ x\equiv -4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\ x=5n-4\end{cases}$
أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$

ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\ )$

-2 لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}$

- تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة **:** (E)

- لدينا : $a=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$

ولدينا : $b=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$

مع $\alpha\leq2$ و $\beta\leq4$

- الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$

ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$

اي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$

بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد :

$102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة

التمرين الرابع:

I. لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- حساب **:** $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$$

لأنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$$

- التفسير الهندسي $y=0$: مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_g) بجوار $-\infty$

- حساب **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - ln\left(e^x+1\right)\right) = -\infty$$ لأنَ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right) = +\infty \end{cases}$$

2) تبيان أنَ $g'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

- لدينا :

$$g'(x) = \frac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x \times e^x}{\left(e^x+1\right)^2} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

أي $g'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

3) تبيان أنَه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} + ln\left(1+e^{-x}\right) - x$

- لدينا : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} - ln\left[e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} - ln\left(e^x\right) - ln\left(1+e^{-x}\right)$ أي

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + ln\left(1+e^{-x}\right) - x$$

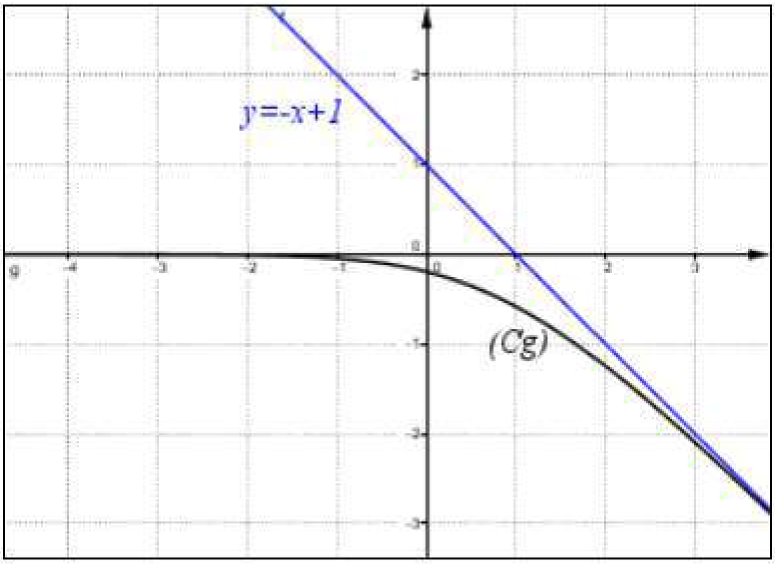
4) أ) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x) - (-x+1)\right]$

● لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

● تفسير النتيجة : المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_g) عند $-\infty$.

5) الرسم :



استنتاج اشارة : $g(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II. لدينا : $f(x)=e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)$

1) البرهان أنَ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

● نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} ln\left(1+e^{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}} = 0$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، : $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

- لدينا : $f'(x) = -e^{-x} \times ln\left(e^{x}+1\right) + e^{-x} \times \frac{e^{x}}{e^{x}+1} = e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1} - ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^{x}+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\frac{1}{e^{x}+1} = \frac{1}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

- حساب : $\int_{-ln3}^{0} \frac{1}{e^{x}+1} dx$

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^{x}+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي
$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^{x}+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$$

4) حساب $\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx$: بالمكاملة بالتجزئة

$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}\,ln\left(e^{x}+1\right)dx$$

نضع : $u'\left(x\right)=e^{-x}$ ومنه $u\left(x\right)=-e^{-x}$

و $v\left(x\right)=ln\left(e^{x}+1\right)$ ومنه $v'\left(x\right)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

إذن :

$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}\,ln\left(e^{x}+1\right)dx=\left[-e^{-x}\,ln\left(e^{x}+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

أي
$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=-ln2+e^{ln3}\,ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^{x}+1}dx$$

$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$$

إذن $\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=3ln\frac{4}{3}$

بكالوريا تجريبية

الشعبة: رياضيات
المدة: 04 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على صفحتين (الصفحة 1 من 5 والصفحة 2 من 5)

التمرين الأول (04.25 نقطة)

كيس يحتوي على: خمس كريات حمراء تحمل الأعداد: 1، e، e، e^2 و e^2 وثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد: e، e^2 و e^2 وثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد 1، $\frac{1}{e}$ و $\frac{1}{e^2}$ (الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس)

نسحب بطريقة عشوائية من هذا الكيس كريتان في آن واحد

نعتبر الأحداث A، B و C حيث:
◄ A: "سحب كريتان مختلفتان في اللون"
◄ B: "سحب كريتان لهما نفس العدد"

❶ أ/ احسب $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cup B)$

ب/ ما احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنّ لهما نفس العدد؟

❷ نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين،

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(\alpha\beta)$

أ/ عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب/ احسب احتمال الحادثة "$X^2 > 4$"

❸ نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون ارجاع بحيث نرتبها ترتيبا تصاعديا عند ظهورها

نعتبر الحدثان C، D حيث:
◄ C: "سحب كرية واحدة فقط حمراء والكرة الأولى سوداء"
◄ D: "سحب ثلاث كريات تحمل أعداد تشكل حدودا متتابعة من متتالية هندسية"

- احسب $P(C)$ و $P(D)$

التمرين الثاني (04.25 نقطة)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2^n$، وليكن S_n المجموع المعرف بـ $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

❶ اكتب S_n بدلالة n، ثم استنتج أنّ S_n و U_n أوليان فيما بينهما

❷ أ/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ U_n على 7

ب/ نعتبر العدد A حيث $A = (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$

– بيّن أن A يقبل مضاعف لـ 7

ج/ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_{2n} مضاعفا لـ 7

❸ نعتبر المعادلة $(E): 4x - 7y = 3$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ بيّن أن الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل لـ (E)، ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ب/ نضع $D = PGCD(x; y)$، عيّن القيم الممكنة لـ D

❹ ليكن P العدد الطبيعي الذي يكتب $\overline{1\alpha\alpha220}$ في النظام ذا الأساس 4، بحيث α عدد طبيعي

- جد قيمة α حتى يكون $(P - 1)$ مضاعفا لـ7، ثمّ اكتب P في النظام العشري

التمرين الثالث 04.50 نقطة

I) نعتبر العدد المركب $L = 2+\sqrt{3}+i$

❶ بيّن أن طويلة L هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

❷ تحقق من أنّ: $L=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

❸ أ/ بيّن أنّ: $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$

ب/ بيّن أنّ $L=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (تذكر أنّ: $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

ج/ اكتب العدد المركب L على شكله الأسي

د/ بين أنّ: $L^6=(8+4\sqrt{3})^3 i$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega=\sqrt{3}$ و L على الترتيب، وليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2

❶ بيّن أنّ d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$

❷ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|\overline{z}-4-\sqrt{3}+2i|=|L|$

التمرين الرابع 07.00 نقطة

I) لتكن الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_\alpha(x)=e^{2x}-2\alpha e^x+3$، حيث α وسيط حقيقي

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب f'_α الدالة المشتقة للدالة f_α، ثمّ عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي α القيم الحدية للدالة f_α

❷ نسمي Ω_α النقطة الحدية لـ (C_α) في حالة وجودها

أ/ عيّن بدلالة α احداثيي النقطة Ω_α

ب/ عيّن مجموعة النقط Ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$

II) نعتبر الدالة f_1 حيث (C_1) تمثيلها البياني

❶ أ/ عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_1)

ب/ ادرس تغيرات الدالة f_1، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ عيّن معادلة المماس (T) لـ(C_1) عند النقطة ذات الترتيبة 3

❸ ارسم كلا من (T) و (C_1)

❹ لتكن (Δ_m) عائلة المستقيمات المعرفة بـ: $y=mx+3-m\ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي

أ/ بيّن أنّ المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثييها

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x(e^x-2)=m(x-\ln 2)$

III) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=-e^{2x}+2e^x+3$ و (C') تمثيلها البياني

❶ اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$، ثمّ بيّن أنّ (C') و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي يطلب تعيين معادلته

❷ ارسم (C')

❸ بيّن أن $A=1u.a$ ، حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_1) و(C') والمستقيمان ذو المعادلتان $x=0$ و $x=\ln 2$

الموضوع

يحتوي الموضوع الثاني على ثلاث صفحات (من الصفحة 3 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول 04.00 نقطة

❶ ادرس حسب قيم بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 13

❷ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E_n) = 286x - 247y = 4^n - 25$ حيث n عدد طبيعي

- عيّن قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

❸ نضع: $n = 3$

أ/ بيّن أن (E_3) تكافئ المعادلة $(E'): 22x - 19y = 3$، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E')

ب/ ما هي القيم الممكنة لـ$\text{PGCD}(x;y)$ حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E')

ج/ عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E') بحيث يكون $\text{PGCD}(x;y) = 3$

د/ عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E') التي تحقق $|2x - y| < 17$

التمرين الثاني 04.00 نقطة

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، α عدد مركب حيث: $\begin{cases} \alpha + \overline{\alpha} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \alpha\overline{\alpha} = 4 \\ \operatorname{Im}(\alpha) > 0 \end{cases}$

❶ أ/ اكتب العدد α على الشكل الجبري

ب/ اكتب العدد α^2 على الشكل الأسي

❷ أ/ بين أنّ $\alpha = 2e^{\frac{\pi}{8}i}$

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $L_n = \alpha^n$، و نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين L_1 و L_2 على الترتيب

❶ عيّن قيم n التي من أجلها العدد L_{4n} تخيلي صرف

❷ المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \arg(L_n)$

أ/ بيّن أنّ (U_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب U_n بدلالة n

ب/ احسب بدلالة n عبارة S_n حيث: $S_n = \arg\left(\overline{L_0} \times \overline{L_1} \times \ldots \times \overline{L_n}\right)$

❸ أ/ عيّن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $z = L_1\left(L_2 - e^{i\theta}\right)$ حيث: $\theta \in \mathbb{R}$

ب/ عيّن (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $\arg\left[\left(iz + i\overline{L_2}\right)^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث 04.50 نقطة

زهرة نرد ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6، p_k هو احتمال الحصول على الرقم k حيث $(1 \le k \le 6)$

هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

- الأعداد p_1، p_2، p_3، p_4، p_5 و p_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r
- والأعداد: p_1، p_2 و p_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q

❶ اثبت أنّ $p_k = \frac{k}{21}$ من أجل $1 \le k \le 6$

❷ نرمي هذه الزهرة مرة واحدة، ونعتبر الحوادث التالية:

A: "العدد المحصل عليه زوجي"

B: "العدد المحصل عليه أكبر أو يساوي 3"

C: "العدد المحصل عليه 3 أو 4"

أ/ احسب احتمال كل من الحوادث A، B و C

ب/ احسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علما أنه زوجي

ج/ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

❸ نستعمل الآن هذه الزهرة لإجراء اللعبة التالية:

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و ثلاث كرات سوداء، وصندوق U_2 يحتوي على كريتين حمراوين وكرة سوداء واحدة، يأتي لاعب ويرمي الزهرة:

- إذا حصل على رقم زوجي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_1
- إذا حصل على رقم فردي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_2

اللاعب يعتبر رابحا إذا سحب كرة حمراء، ونسمي G الحادثة: "اللاعب رابح"

أ/ عيّن احتمال الحادثة $G \cap A$، ثم احتمال الحادثة G

ب/ علما أن اللاعب رابح، عيّن احتمال أن يكون حصل على عدد زوجي.

التمرين الرابع 07.50 نقطة

n عدد طبيعي غير معدوم

I) h_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $h_n(x) = x^2 - n + n\ln x$

❶ أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير h_n، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ أ/ بيّن أنّ المعادلة $h_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n بحيث $1 \leq \alpha_n < e$

ب/ استنتج إشارة $h_n(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f_n(x) = x - n - \dfrac{n\ln x}{x}$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (الوحدة $2cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_n(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

❷ أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_n) ذو المعادلة $y = x - n$ مقارب مائل لـ (C_n)

ب/ ادرس وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n)

❸ أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x > 0$: $f_n'(x) = \dfrac{h_n(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير f_n، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❹ تحقق أنّ $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \dfrac{n}{\alpha_n}$

❺ بيّن أنه يوجد مماس (T_n) للمنحنى (C_n) يوازي (Δ_n) ثمّ اكتب معادلة له

❻ أ/ تحقق أنّ $t = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1 - t = 2\ln t$

ب/ بيّن أنه يوجد مماس وحيد (D_n) للمنحنى (C_n) يشمل مبدأ المعلم، ثمّ اكتب معادلة له

III) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي: $g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

❶ ادرس تغيرات الدالة g

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0.5 < \beta < 0.6$

❸ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

❹ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، $f_n(\beta) = \beta$، ماذا تستنتج؟

IV)

❶ ارسم (C_2) (نأخذ $1.2 < \alpha_2 < 1.3$ و $f(\alpha_2) \approx -1.1$)

❷ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f_2(x) = mx$ حلين مختلفين

الخليل للرياضيات

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربيــــة الوطنيــــة

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان: شهادة البكالوريا

اللقب: عويسي

دورة: جوان 2024

الاسم: الحسين

الشعبة: رياضيات

تاريخ ومكان الميلاد: 7 - 5 - 1996 / الكلفة

اختبار مادة: الرياضيات

رقم التسجيل:

يوم: 10 جوان 2024

امضاء المترشح (ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس

1. .... 2. .... 3. ....

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة – ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مـــــادة: الرياضيات

الموضوع الأول

e^2 e 1 $\frac{1}{e}$ $\frac{1}{e^2}$

e^2 e 1

e^2 e

e^2

التمرين الأول

1 1- حساب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$:

- $P(A) = 1 - \dfrac{C_5^2 + C_3^2 + C_3^2}{C_{11}^2} = \dfrac{39}{55}$

- $P(B) = \dfrac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{11}^2} = \dfrac{10}{55} = \dfrac{2}{11}$

لدينا : $P(A\cap B) = \dfrac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \dfrac{7}{55}$

ومنه : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{42}{55}$

ب/ حساب احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنّ لهما نفس العدد :

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{55}}{\frac{10}{55}} = \frac{7}{10}$$

2) أ/ قانون احتمال X :

لدينا : $X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

حيث :

$$P(X=-3) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55} \quad ; \left\{ \frac{1}{e^2} \times \frac{1}{e} = e^{-3} \right\}$$

$$P(X=-2) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{2}{55} \quad ; \left\{ \frac{1}{e^2} \times 1 = e^{-2} \right\}$$

$$P(X=-1) = \frac{C_1^1 C_3^1 + C_1^1 C_2^1}{C_{55}^2} = \frac{5}{55} \quad ; \left\{ \frac{1}{e^2} \times e = \frac{1}{e} \times 1 = e^{-1} \right\}$$

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 + C_3^1 C_1^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{8}{55} \quad ; \left\{ 1\times 1 = \frac{1}{e^2} \times e^2 = \frac{1}{e} \times e = 1 \right\}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{10}{55} \quad ; \left\{ 1\times e = e^2 \times \frac{1}{e} = e \right\}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{55}^2} = \frac{11}{55} \quad ; \left\{ 1\times e^2 = e \times e = e^2 \right\}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{11}^2}=\frac{12}{55} \quad ; \{e^2 \times e = e^3\}$$

$$P(X=4)=\frac{C_4^2}{C_{11}^2}=\frac{6}{55} \quad ; \{e^2 \times e^2 = e^4\}$$

وعليه :

$X=x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{5}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{11}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{6}{55}$

ب/

$$P(X^2>4)=P(|X|>2)$$
$$=P(X<-2)+P(X>2)$$
$$=P(X=-3)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{19}{55}$$

③ ◀ حساب $P(C)$:

نميز 3 حالات :

e^2	e^2	e^2

e^2	e^2	e

e^2	e	e

e^2 e 1 $\frac{1}{e}$ $\frac{1}{e^2}$

e^2 e 1

e^2 e

e^2

$$P(C)=\frac{A_1^1A_2^1A_2^1+2A_1^1A_2^1A_2^1+2A_2^1A_1^1A_2^1}{A_{11}^3}=\frac{20}{990}=\frac{2}{99}$$

◀ حساب $P(D)$:

نميز 4 حالات :

$$\left(\frac{1}{e^2};\frac{1}{e};1\right);\left(\frac{1}{e^2};1;e^2\right);\left(\frac{1}{e};1;e\right);\left(1;e;e^2\right);\left(e;e;e\right);\left(e^2;e^2;e^2\right)$$

$$P(D)=\frac{A_4^1A_1^1A_2^1+A_4^1A_2^1A_4^1+A_1^1A_2^1A_3^1+A_2^1A_3^1A_4^1+A_3^3+A_4^3}{A_{11}^3}=\frac{70}{990}=\frac{7}{99}$$

التمرين الثاني

1) كتابة S_n بدلالة n :

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$S_n = U_0 + U_1 + \_\_\_\_\_\_ + U_n$$

$$= 2^0 + 2^1 + \_\_\_\_\_\_ + 2^n$$

$$= 2^0 \, \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

ب/ استنتاج أن $S_n \wedge U_n = 1$:

لدينا :

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

$$S_n = 2^n \times 2 - 1$$

$$2(2)^n - S_n = 1$$

$$2U_n - S_n = 1$$

توجد ثنائية $(u,v) = (2,-1)$ تحقق $uU_n + vS_n = 1$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن $U_n \wedge S_n = 1$

2) أ- بواقي قسمة U_n على 7 :

لدينا :

$$U_0 = 2^0 \equiv 1[7]$$

$$U_1 = 2^1 \equiv 2[7]$$

$$U_2 = 2^2 \equiv 4[7]$$

$$U_3 = 2^3 \equiv 1[7]$$

ومنه بواقي قسمة U_n على 7 نلخصها في الجدول التالي :

$n \equiv$	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$U_n \equiv$	1	2	4	$[7]$

ب/ تعيين أن A مضاعف 7 :

$$A \equiv (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2(6)^{2022} \ [7]$$

$$\equiv (2^{2024} + 2^{1962} - 2^{1445+1} + 1)^{1954} - 2(6)^{2022} \ [7]$$

$$\equiv (2^{3\alpha+2} + 2^{3\alpha} - 2^{3\alpha} + 1)^{1954} - 2(-1)^{2022} \ [7]$$

$$\equiv (4 + 1 - 1 + 1)^{1954} - 2 \ [7]$$

$$\equiv 5^{1954} - 2 \ [7]$$

$$\equiv (-2)^{1954} - 2 \ [7]$$

$$\equiv 2^{1954} - 2 \ [7]$$

$$\equiv 2^{3\alpha+1} - 2 \ [7]$$

$$\equiv 2 - 2 \ [7]$$

$$\equiv 0 \ [7]$$

ومنه : $A \equiv 0 \ [7]$

ج/ تعيين قيم n التي من أجلها S_{2n} مضاعف لـ 7 :

لدينا : $S_{2n} \equiv 0 \ [7]$

معناه : $2^{2n+1} - 1 \equiv 0 \ [7]$

ومنه: $2^{2n+1} \equiv 1[7]$

ومنه: $2n+1 = 3\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$

ومنه: $2n+1 \equiv 0[3]$

ومنه: $2n \equiv 2[3]$

ومنه: $n \equiv 1[3]$ (لأن: $3 \wedge 2 = 1$)

ومنه $n = 3k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

③ أ/ تبيين أن $(S_1 ; S_2 - 1)$ حل لـ (E):

لدينا: $4(S_2 - 1) - 7S_1 = 4(2^{2+1} - 2 - 1) - 7(2^{1+1} - 1)$

$= 4(6) - 7(3)$

$= 3$

ومنه الثنائية $(S_1 ; S_2 - 1)$ حل لـ (E)

ب حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

لدينا
$$\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases}$$

بطرح المعادلتين طرفا لطرف نجد: $4(x-6) - 7(y-3) = 0$

ومنه: $4(x-6) = 7(y-3)$

ومنه: $7 \mid 4(x-6)$ و $4 \mid 7(y-3)$

علما أن $4 \wedge 7 = 1$

فإنه (حسب غوص) لدينا: $7 \mid x-6$ و $4 \mid y-3$

ومنه:
$$\begin{cases} x - 6 = 7k \\ y - 3 = 4k \end{cases}$$
حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه :
$$\begin{cases} x = 7k+6 \\ y = 4k+3 \end{cases}$$

اذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث :

$(x,y) \in \{(7k+6 ; 3k+3) / k \in \mathbb{Z}\}$

④ تعيين القيم الممكنة لـ D :

لدينا : $D = x \wedge y$

ومنه : $D|_x$ و $D|_y$

ومنه $D|_{4x-3y}$

ومنه $D|_3$

اذن $D \in \{1, 3\}$

④ تعيين قيمة α :

لدينا : $P = \overline{1\alpha\alpha220}^4$

$= 0(4)^0 + 2(4)^1 + 2(4)^2 + \alpha(4)^3 + \alpha(4)^4 + 1(4)^5$

$= 320\alpha + 1064$

لدينا $P - 1 \equiv 0\,[7]$

معناه : $320\alpha + 1064 - 1 \equiv 0\,[7]$

ومنه : $5\alpha + 6 \equiv 0\,[7]$

ومنه : $5\alpha \equiv 1\,[7]$

ومنه : $15\alpha \equiv 3\,[7]$

ومنه $\alpha \equiv 3\,[7]$

ومنه : $\alpha = 7k+3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ولدينا : $0 \leq \alpha < 4$

ومنه : $\alpha = 3$

وعليه : $P = \overline{133220}^4 = 2024$

التمرين الثالث

(I) ① تبيين أن : $|L| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

لدينا :

$$|L| = |2+\sqrt{3}+i|$$
$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(1)^2}$$
$$= \sqrt{4+3+4\sqrt{3}+1}$$
$$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{4(2+2\sqrt{3})}$$
$$= 2\sqrt{2+2\sqrt{3}}$$

② التحقق أن : $L = 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right]+2i\sin\frac{\pi}{6}$

لدينا :

$$L = 2+\sqrt{3}+i$$
$$= 2\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+2i\,\frac{1}{2}$$
$$= 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right]+2i\sin\frac{\pi}{6}$$

③ أ/ تبيين أن $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

لدينا :

$$\cos^2\theta = \left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^2$$
$$= \frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}+2}{4}$$
$$= \frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{4}+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{2}+1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)+1\right]$$

ومنه : $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left[\cos 2\theta+1\right]$

ومنه : $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

ب/ نبين أن: $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$L = 2\left[1 + \cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\left[1 + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)\right] + 2i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] + 2i\,2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

ج/ كتابة L على الشكل الأسي:

$$L = 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 4i\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

د/ نبين أن: $L^6 = (8+4\sqrt{3})^3 i$

لدينا:

$$L^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\right]^3 i$$

$$= \left[4(2+\sqrt{3})\right]^3 i$$

$$= (8+4\sqrt{3})^3 i$$

II) 1) لدينا: $h: z' - \omega = 2(z - \omega)$

وعليه: $d - \omega = 2(L - \omega)$

ومنه:

$d = 2(L - \omega) + \omega$

$= 2(2+\sqrt{3}+i-\sqrt{3})+\sqrt{3}$

$= 2(2+i)+\sqrt{3}$

$= 4+\sqrt{3}+2i$

② تحديد طبيعة (Γ):

لدينا: $|\bar{z}-4-\sqrt{3}+2i| = |L|$

$\overline{|\bar{z}-4-\sqrt{3}+2i|} = |L|$

$|z-4-\sqrt{3}-2i| = |L|$

$|z-(4+\sqrt{3}+2i)| = |L|$

$|z-d| = |L|$

$DM = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

ومنه (Γ) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

التمرين الرابع

I) ① حساب f'_α:

لدينا f_α قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - 2\alpha e^{x}$

$= (e^{x}-\alpha)2e^{x}$

- تعيين القيم الحدية لـ f_α:

لدينا: $2e^{x} > 0$

ولدينا: $e^{x} - \alpha = 0$ معناه $e^{x} = \alpha$

- لما: $\alpha \leq 0$ معناه $x = \ln \alpha$ (وهذا مستحيل)

ومنه لا توجد أي قيم حدية لـ f_α لما، $\alpha \leq 0$

- لما $\alpha > 0$: معناه $x = \ln \alpha$

اذن f_α تقبل قيمة حدية عند $x = \ln \alpha$.

② أ/ تعيين احداثيي Ω_α :

لما $\alpha > 0$ لدينا :

$$f_\alpha(\ln\alpha) = e^{2\ln\alpha} - 2\alpha e^{\ln\alpha} + 3$$
$$= e^{\ln\alpha^2} - 2\alpha\alpha + 3$$
$$= \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 = 3 - \alpha^2$$

ومنه :

$$\Omega_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$$

ب/ تعيين مجموعة النقط Ω_α لما : $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

لدينا : $\Omega_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$

لدينا : $\begin{cases} x = \ln\alpha \\ y = 3-\alpha^2 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \alpha = e^x \\ y = 3-(e^x)^2 \end{cases}$

ومنه $y = 3 - e^{2x}$

اذن مجموعة النقط Ω_α لما $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

هي منحنى الدالة $x \mapsto 3 - e^{2x}$

II ① أ/ تعيين المستقيمات المقاربة لـ (C_1) :

• $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{2x} - 2e^x + 3)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x(e^x-2)+3\right] = +\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((e^x)^2 - 2e^x + 3\right) = 3$

لأن : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

ومنه (C_1) يقبل مقارب معادلته $y = 3$

ب/ تغيرات f_1 :

لدينا : $f'_1(x) = (e^x - 1)2e^x$

بما أن $1>0$

فإن (C_n) يقبل قيمة حدية عند $\Omega_1(\ln(1); 3-1^2)$

أي عند: $\Omega_1(0; 2)$

وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_1(x)$	$-$	0	$+$

لدينا f_1 متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

ومتناقصة تماما على $]-\infty,0[$

ج/ جدول تغيرات f_1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

ه) معادلة المماس (T)

لدينا: $f_1(x) = 3$

معناه $e^{2x} - 2e^x + 3 = 3$

ومنه، $e^x(e^x - 2) = 0$

ومنه: $e^x - 2 = 0$ (لأن $e^x \neq 0$)

ومنه: $e^x = 2$

ومنه $x = \ln 2$

ومنه (T) مماس لـ (C_1) في النقطة $A(\ln 2, 3)$

اذن :

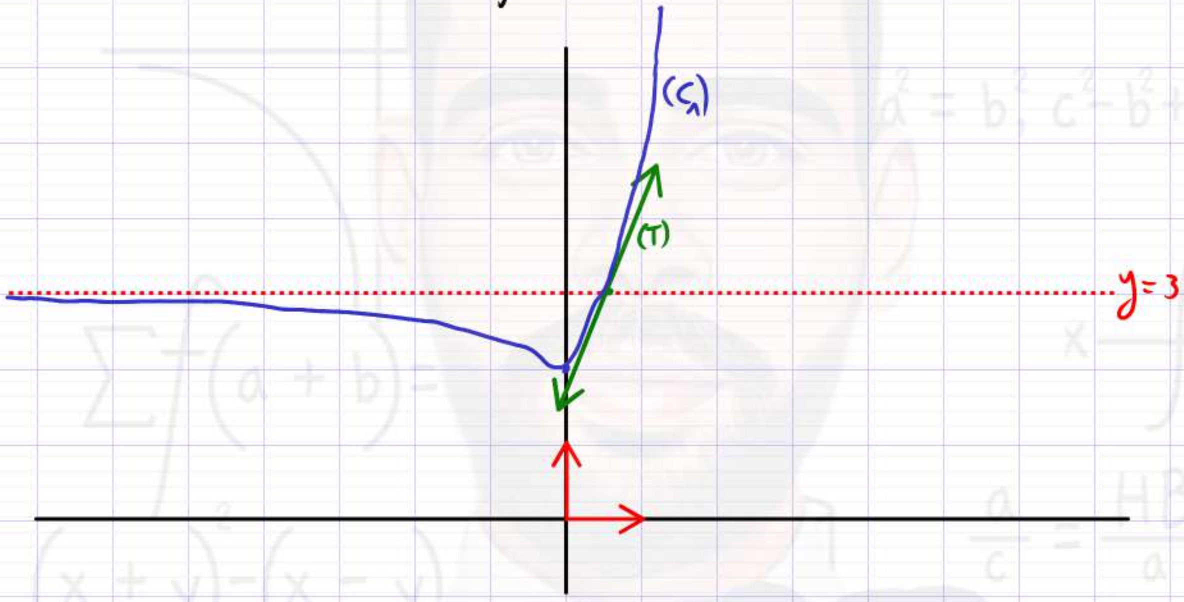
$$(T) : y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$$

$$= 4(x - \ln 2) + 3$$

$$= 4x - \ln 4 + 3$$

③ رسم (T) و (C_1)

لدينا : $\begin{cases} f(1) \approx 4{,}95 \\ f(2) \approx 42{,}82 \end{cases}$



④ أ/ تبيين أن (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة :

لدينا $(\Delta_m) : y = mx + 3 - m\ln 2$

ومنه : $mx + 3 - m\ln 2 - y = 0$

ومنه : $(x - \ln 2)m + 3 - y = 0$

ومنه : $\begin{cases} x - \ln 2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x = \ln 2 \\ y = 3 \end{cases}$

اذن جميع المستقيمات (Δ_m) تدور حول $A(\ln 2, 3)$

ب/ المناقشة البيانية:

لدينا: $e^x(e^x-2)=m(x-\ln 2)$

ومنه: $e^{2x}-2e^x+3=mx-m\ln 2+3$

ومنه: $f_1(x)=y_{(\Delta_m)}$ .... (E)

وعليه حلول (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_1) مع المستقيمات (Δ_m)

ومنه:

- لما $m\leq 0$: للمعادلة (E) حل وحيد
- لما $0<m<4$: للمعادلة (E) حلان
- لما $m=4$: للمعادلة (E) حل وحيد (مضاعف)
- لما $m>4$: للمعادلة (E) حلان.

III) ① كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$g(x)=-e^{2x}+2e^x+3$$
$$=-(e^{2x}-2e^x+3)+6$$
$$=-f_1(x)+6$$

ومنه $g(x)=6-f_1(x)$

تذكير

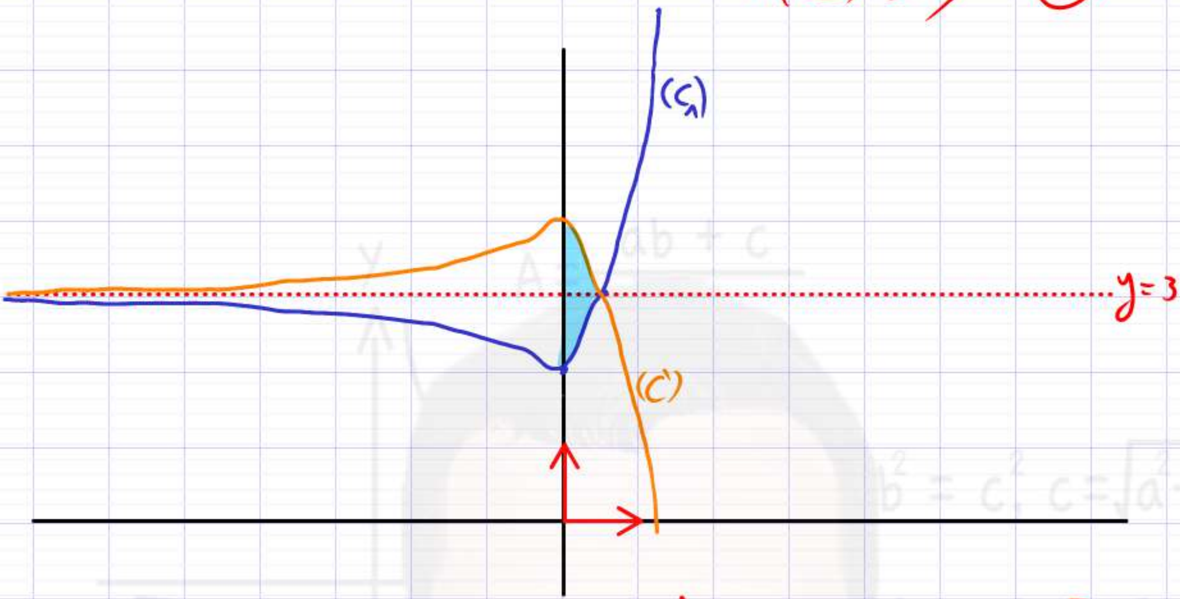
(C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=a$ معناه: $f(x)+g(x)=2a$

لدينا $g(x)=-f_1(x)+6$

ومنه: $g(x)+f_1(x)=2(3)$

ومنه (C_1) و (C') متناظران بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=3$

② رسم (C') :



③ تبين أن $A=1$:

$$A=\int_0^{\ln 2}\left(g(x)-f_1(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(-e^{2x}+2e^{x}+3-e^{2x}+2e^{x}-3\right)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(-2e^{2x}+4e^{x}\right)dx$$

$$=-e^{2x}+4e^{x}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=-e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}+e^{2(0)}-4e^{0}$$

$$=-4+8+1-4=\boxed{1\ u.a}$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول

① دراسة بواقي قسمة 4^n على 13 :

لدينا :

$4^0 \equiv 1[13]$

$4^1 \equiv 4[13]$

$4^2 \equiv 3[13]$

$4^3 \equiv 4^2\times 4[13] \equiv 12[13]$

$4^4 \equiv 4^3\times 4[13] \equiv 9[13]$

$4^5 \equiv 4^4\times 4[13] \equiv 10[13]$

$4^6 \equiv 4^5\times 4[13] \equiv 1[13]$

ومنه بواقي قسمة 4^n على 13 نلخصها في الجدول التالي

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	3	12	9	10	[13]

② تعيين قيم n حيث (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا :

$286 = 247(1)+39$

$247 = 39(6)+\boxed{13}$

$39 = 13(3)+0$

ومنه $PGCD(286;247)=13$

المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

معناه $13 \mid 4^n-25$

ومنه $4^n-25=13k$; $k\in\mathbb{N}$

ومنه $4^n - 25 \equiv 0 [13]$

ومنه: $4^n \equiv 25 [13]$

ومنه: $4^n \equiv 12 [13]$

ومنه $n = 6k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$

3

أ/ تبيين أن (E_3) تكافئ (E'):

لدينا: $(E_3): 286x - 247y = 39$

ومنه: $(E'): 22x - 19y = 3$

اذن $(E') \Longleftrightarrow (E_3)$

- حل المعادلة (E'):

نلاحظ أن $(1,1)$ حل خاص لـ (E')

ومنه: $\begin{cases} 22x - 19y = 3 \\ 22(1) - 19(1) = 3 \end{cases}$

بالطرح نجد: $22(x-1) = 19(y-1)$

ومنه: $19 \mid 22(x-1)$ و $22 \mid 19(y-1)$

بما أن $22 \wedge 19 = 1$

فإنه (حسب غوص):

$19 \mid x-1$ و $22 \mid y-1$

ومنه: $x-1 = 19k$ و $y-1 = 22k$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ومنه: $x = 19k+1$ و $y = 22k+1$

اذن حلول (E') هي الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث:

$(x,y) \in \{(19k+1 ; 22k+1)\}$

ب/ تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$:

نضع $d = x \wedge y$

لدينا $d | x$ و $d | y$

ومنه $d | 22x - 19y$

ومنه $d | 3$

ومنه $d \in D_3$

ومنه $d \in \{-3; -1; 1; 3\}$

ج/ تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول (E') حيث $x \wedge y = 3$:

لدينا : $x \wedge y = 3$

ومنه : $\begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ y \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} 19k+1 \equiv 0 [3] \\ 22k+1 \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} k+1 \equiv 0 [3] \\ k+1 \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه $k+1 \equiv 0 [3]$

اذن $k \equiv 2 [3]$

أي $k = 3k' + 2$ مع $k' \in \mathbb{Z}$

لدينا $\begin{cases} x = 19k + 1 \\ y = 22k + 1 \end{cases}$

وعليه: $\begin{cases} x = 57k' + 39 \\ y = 66k' + 45 \end{cases}$ مع $k' \in \mathbb{Z}$

د) تعيين الثنائيات (x, y) حلول (E) حيث $|2x - y| < 17$

لدينا: $|2x - y| < 17$

معناه: $|2(19k+1) - (22k+1)| < 17$

ومنه: $|16k + 1| < 17$

ومنه: $-17 < 16k + 1 < 17$

ومنه: $-18 < 16k < 16$

ومنه: $-1{,}1 < k < 1$

ومنه: $k \in \{-1 ; 0\}$

إذن:

$(x, y) \in \{(-18, -21) ; (1, 1)\}$

التمرين الثاني

I) 1/ كتابة α على الشكل الجبري:

لدينا: $\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \alpha + \bar{\alpha} = 2Re(\alpha) \end{cases}$

وعليه: $2Re(\alpha) = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

ومنه: $Re(\alpha) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

ولدينا:
$$\begin{cases} \alpha\bar{\alpha} = 4 \\ \alpha\bar{\alpha} = Re^2(\alpha) + Im^2(\alpha) \end{cases}$$

ومنه: $Re^2(\alpha) + Im^2(\alpha) = 4$

ومنه: $2+\sqrt{2} + Im^2(\alpha) = 4$

ومنه: $Im^2(\alpha) = 2-\sqrt{2}$

ومنه: $Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ أو $Im(\alpha) = -\sqrt{2-\sqrt{2}}$

لكن $Im(\alpha) \geq 0$

اذن $Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

لدينا
$$\begin{cases} Re(\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

اذن: $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ب/ كتابة α^2 على الشكل الأسي:

لدينا: $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ومنه:
$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
&= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2} \\
&= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \\
&= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&= 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 4e^{i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

ج) 1/ أ. تبيان أن $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

لدينا : $|\alpha^2| = 4$

ومنه : $|\alpha| = 2$

ولدينا : $\arg(\alpha^2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $2\arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه : $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + k\pi$

لما : $k = 2k'$ $(k' \in \mathbb{Z})$:

فإن $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi$

لما : $k = 2k'+1$ $(k' \in \mathbb{Z})$:

فإن $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + \pi + 2k'\pi$

بما أن : $\begin{cases} Re(\alpha) > 0 \\ Im(\alpha) > 0 \end{cases}$

فإن : $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi$

اذن : $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

ب/ استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

لدينا : $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$= \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ومنه : $\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$

اذن :

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{8}} \end{cases}$$

وعليه :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

II) ① تعيين قيم n حيث L_{4n} تخيلي صرف :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $L_{4n} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$

معناه $\arg(\alpha^{4n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه : $4n \cdot \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه : $4n\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه : $n = 2k+1$

② أ/ تبيين أن (U_n) حسابية :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \arg(L_{n+1}) \\ &= \arg(\alpha^{n+1}) \\ &= \arg(\alpha^{n}\cdot\alpha) \\ &= \arg(\alpha^{n}) + \arg(\alpha) \\ &= \arg(L_n) + \frac{\pi}{8} \\ &= U_n + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

إذن (W_n) حسابية أساسها $r=\frac{\pi}{8}$
وحدها الأول W_0 حيث

$$W_0 = \arg L_0$$
$$= \arg(L^0)$$
$$= \arg(1)$$
$$= 0$$

كتابة W_n بدلالة n :

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، لدينا:

$$W_n = W_0 + nr$$
$$= \frac{n\pi}{8}$$

ب/ حساب بدلالة n المجموع S_n :

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، لدينا:

$$S_n = \arg\left(\overline{L_0}\times\overline{L_1}\times \dots \times \overline{L_n}\right)$$
$$= \arg\left(\overline{L_0\times L_1\times \dots \times L_n}\right)$$
$$= -\arg\left(L_0\times L_1\times \dots \times L_n\right)$$
$$= -\left[\arg(L_0)+\arg(L_1)+\dots+\arg(L_n)\right]$$
$$= -\left[W_0 + W_1 + \dots + W_n\right]$$
$$= -\frac{1}{2}(n+1)(W_0+W_n)$$
$$= -\frac{1}{2}(n+1)\arg(L_n)$$

$$= -\frac{1}{2}(n+1)\, n\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{-n\pi(n+1)}{16}$$

③ أ/ تعيين (E_1) :

من أجل كل $\theta \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $z = L_1(L_2 - e^{i\theta})$

معناه : $z = L_1L_2 - L_1e^{i\theta}$

ومنه : $z = L_3 - \alpha e^{i\theta}$

ومنه : $z = L_3 + \alpha e^{i\pi} e^{i\theta}$

ومنه : $z - L_3 = 2e^{i\frac{\pi}{8}}e^{i\pi}e^{i\theta}$

ومنه $z - L_3 = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{8}+\theta\right)}$

وعليه : $\begin{cases} MB = 2 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{MB}) = \frac{9\pi}{8} + \theta + 2k\pi \end{cases}$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

إذن (E_1) هي الدائرة التي

- مركزها النقطة B
- نصف قطرها 2

ب/ تعيين (E_2) :

لدينا : $\arg\left[(iz + i\overline{L_2})^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$

معناه: $2\arg\left[(iZ - iL_2)\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$

ومنه: $\arg\left[i(Z - L_2)\right] = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$

ومنه: $\arg(i) + \arg(Z - L_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$

ومنه: $\frac{\pi}{2} + \arg(Z - L_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$

ومنه: $\arg(Z - L_2) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$

وعليه: $(\vec{u}\ ; \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$

اذن (E_2) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وميله $\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

التمرين الثالث

① اثبات أن: $P_k = \frac{k}{21}$

لدينا: $\sum_{i=1}^{6} P_i = 1$

ومنه: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

لدينا: الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 و P_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r

معناه: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{6}{2}(P_1 + P_6)$

وعليه: $\frac{6}{2}(P_1 + P_6) = 1$

ومنه = $(I) \; .... \; P_1+P_6=\frac{1}{3}$

ولدينا: الأعداد P_1 ، P_2 و P_4 تشكل بهذا الترتيب
متتالية هندسية أساسها q

معناه: $(II) \; .... \; P_1 \cdot P_4 = P_2^2$

ولدينا $P_2 = P_1 + r$ ومنه $P_1 = P_2 - r$

ولدينا $\begin{cases} P_4 = P_2 + 2r \\ P_6 = P_2 + 4r \end{cases}$

⇐ نعوض P_1 و P_6 في (I) نجد: $P_2+2r+P_2+4r=\frac{1}{3}$

ومنه = $2P_2+6r=\frac{1}{3} \; ..... \; (III)$

⇐ نعوض قيمة P_1 و P_4 في (II) نجد: $(P_2-r)(P_2+2r)=P_2^2$

ومنه: $rP_2-2r^2=0$

ومنه: $r(P_2-2r)=0$

ومنه: $P_2-2r=0 \quad (r\neq 0)$

ومنه = $P_2=2r$

⇐ نعوض قيمة P_2 في (III) نجد: $2(2r)+6r=\frac{1}{2}$

ومنه: $r=\frac{1}{21}$ و $P_2=\frac{2}{21}$

اذن: $P_1=P_2-r$

تكافؤ : $P_1 = \frac{1}{21}$

اذن من أجل كل $1 \leq k \leq 6$ لدينا $P_k = \frac{k}{21}$

② أ/ حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$:

من أجل كل $1 \leq k \leq 6$ لدينا:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

وعليه،

- $P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
- $P(B) = 1 - (P_1 + P_2) = 1 - \frac{1+2}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$
- $P(C) = P_3 + P_4 = \frac{3+4}{21} = \frac{1}{3}$

ب/ حساب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3 علما أنه زوجي:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4+6}{21}}{\frac{12}{21}} = \frac{5}{6}$$

ج/ تبيين أن A و B مستقلتان:

لدينا:

- $P(A) \cdot P(B) = \frac{24}{49}$

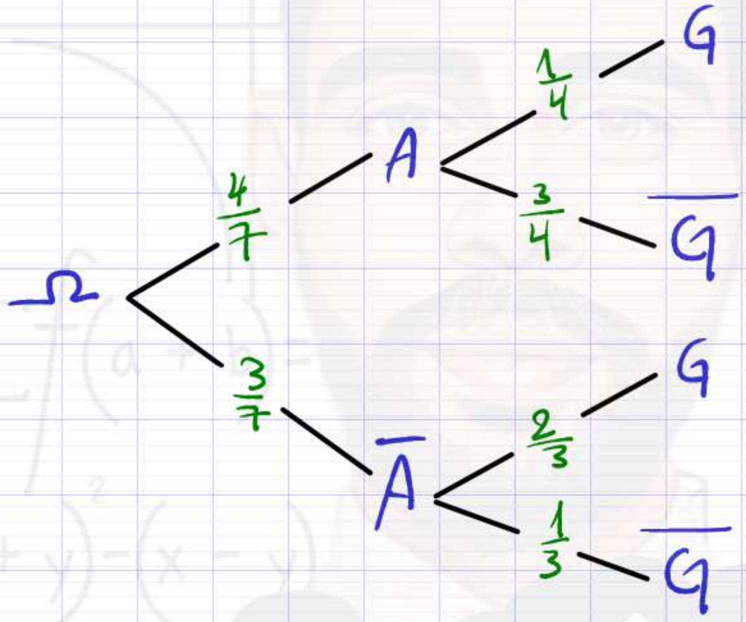
• $P(A\cap B) = P_4 + P_6 = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21}$

بما أن $P(A)\cdot P(B) \neq P(A\cap B)$

فإن A و B غير مستقلتان.

③ أ/ تعيين $P(A\cap G)$

لنمذج هذه التجربة بشجرة الاحتمالات:



ومنه. $P(A\cap G) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$

ب/ حساب $P(G)$:

$$P(G) = P(A\cap G) + P(\overline{A}\cap G)$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{7}$$

التمرين الرابع

I)

1) حساب نهايات الدالة h_n :

• $\lim\limits_{x \to 0} h_n(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - n + n\ln x)$

$= -\infty$

لأن : $\begin{cases} n \geq 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - n + n\ln x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + n\ln x)$

$= +\infty$

لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ب/ تغيرات الدالة h_n :

لدينا h_n تابعة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ حيث :

$h_n'(x) = 2x + \frac{n}{x}$

$= \frac{2x^2 + n}{x}$

لدينا: $x>0$ لأن $D_g = \mathbb{R}_+^*$

ولدينا: $2x^2+x>0$ لأن $x \geq 1$

اذن $h_n'(x)>0$

ومنه h_n متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$h_n'(x)$	‖	$+$
$h_n(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow +\infty$

② أ/ تبيين أن $h_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n :

لدينا h_n مستمرة ومتزايدة تماما على $I=]0,+\infty[$

ولدينا $[1,e[\subset I$

ولدينا $\begin{cases} h_n(1) \approx 1-n \leq 0 \\ h_n(e) \approx e^2 > 0 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $h_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n حيث $1 \leq \alpha_n < e$

ب/ اشارة $h_n(x)$:

x	0		α_n		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) $f_n(x) = x - n - \frac{n\ln x}{x}$

① • $\lim_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$:لأن

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مقارب معادلته $x=0$

• $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

لأن: $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (x-n) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

② أ/ تبيين أن (Δ_n) مقارب مائل لـ (C_n)

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f_n(x) - y_{\Delta_n} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{n\ln x}{x} \right] = 0$$

لأن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ب/ دراسة وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n):

من أجل كل $x > 0$ و $n \geq 1$، لدينا:

$$f_n(x) - (x-n) = \frac{-n\ln x}{x}$$

لدينا: $x > 0$

ولدينا: $-n\ln x = 0$

معناه: $x = 1$

وعليه:

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x) - y_{(\Delta)}$	||	$+$	0	$-$	

- (C_n) فوق (Δ_n) لما $0 < x < 1$
- (C_n) تحت (Δ_n) لما $x > 1$
- (C_n) يقطع (Δ_n) في $A_n(1, 1-n)$

③ أ/ تبيين أنّ $f_n'(x) = \dfrac{h_n(x)}{x^2}$

لدينا f_n قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ حيث:

$$f_n'(x) = 1 - \frac{\frac{n}{x} \cdot x - n\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - n - n\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{h_n(x)}{x^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير f_n :

لدينا $f'_n(x) = \dfrac{h_n(x)}{x^2}$

بما أن $x^2 > 0$

فإن :

x	0		α_n		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه $f_n(x)$ متزايدة تماما على $[\alpha_n ; +\infty[$
ومتناقصة تماما على $]0 ; \alpha_n]$

x	0		α_n		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) التحقق أن $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \dfrac{n}{\alpha_n}$

من أجل كل $n \geq 1$ ، $x > 0$ لدينا ، $h_n(\alpha_n) = 0$

ومنه ، $\alpha_n^2 - n + n\ln\alpha_n = 0$

ومنه : $\ln\alpha_n = \dfrac{n - \alpha_n^2}{n}$

ومنه : $f_n(\alpha_n) = \alpha_n - n - \dfrac{n\ln\alpha_n}{\alpha_n}$

$$= \alpha_n - n - \frac{n\left(\frac{n-\alpha_n^2}{n}\right)}{\alpha_n}$$

$$= \alpha_n - n - \frac{n-\alpha_n^2}{\alpha_n}$$

$$= \alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n} + \alpha_n$$

$$= 2\alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n}$$

5) تبيين أنه يوجد مماس يوازي (Δ_n) :

لدينا $(\Delta_n) \parallel (T_n)$

معناه يوجد عدد حقيقي a يحقق: $f_n'(a) = 1$

ومنه $\dfrac{a^2 - n + n\ln a}{a^2} = 1$

ومنه $a^2 - n + n\ln a = a^2$

ومنه $n\ln a = n$

ومنه $\ln a = 1$

ومنه $a = e$

ومنه يوجد مماس لـ (C_n) يوازي (Δ_n) معادلته :

$$(T_n) : y = f_n'(e)(x-e) + f_n(e)$$

$$= x - e + e - n - \frac{n}{e}$$

$$= x - \left(n + \frac{n}{e}\right)$$

6) أ/ التحقق أن $t=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة :

من أجل كل $t>0$ ، لدينا :

$$1 - t = 2\ln t$$

تكافئ $1 - t - 2\ln t = 0$

نضع : $\varphi(t) = 1 - t - 2\ln t$

لدينا . φ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، حيث :

$$\varphi'(t) = -1 - \frac{2}{t} = -\frac{t+2}{t}$$

لدينا $t>0$ ، ولدينا $-(t+2)=0$ معناه $t=-2$

ولدينا $\varphi(1) = 0$

t	0	1	$+\infty$
$\varphi'(t)$	‖	$-$	
$\varphi(t)$	‖ $+\infty$	↘ 0	$-\infty$

إذن : $t=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1-t=2\ln t$

ب/ تبيين أنه يوجد مماس وحيد لـ (C_n) يشمل مبدأ المعلم:

(Δ_n) مماس لـ (C_n) يشمل مبدأ المعلم

معناه يوجد عدد حقيقي b حيث:

$$f_n'(b)(0-b)+f_n(b)=0$$

ومنه: $$\frac{b^2-n+n\ln b}{b^2}(-b)+b-n-\frac{n\ln b}{b}=0$$

ومنه: $$\frac{-(b^2-n+n\ln b)+b^2-nb-n\ln b}{b}=0$$

ومنه: $$-b^2+n-n\ln b+b^2-nb-n\ln b=0$$

ومنه: $$n-nb-2\ln b=0$$

ومنه: $$n(1-b-2\ln b)=0$$

ومنه $$1-b-2\ln b=0$$

ومنه $$v(b)=0$$

ومنه $$b=1$$

إذن يوجد مماس وحيد لـ (C_n) يشمل

صيغة المماس، معادلة:

$$(D_n): y = f_n'(1)(x-1) + f_n(1)$$

$$= (1-n)(x-1) + 1-n$$

$$= (1-n)x$$

III)

$$g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

1) تغيرات الدالة g:

لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ حيث،

$$g'(x) = f'_{(n+1)}(x) - f'_n(x)$$

$$= \frac{h_{(n+1)}(x) - h_n(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(x^2 - (n+1) + (n+1)\ln x - x^2 + n - n\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-n - 1 + n\ln x + \ln x + n - n\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-1 + \ln x\right)$$

لدينا $x^2 > 0$

ولدينا: $-1+\ln x=0$

معناه: $x=e$

اذن:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

وعليه g متزايدة تماما على $]e;+\infty[$

ومتناقصة تماما على $]0;e[$

② تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β :

لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;e[$

ولدينا $]0{,}5;0{,}6[\subset]0;e[$

ولدينا $\begin{cases} g(0{,}6)\approx -0{,}14 \\ g(0{,}5)\approx 0{,}38 \end{cases}$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0{,}5<\beta<0{,}6$

③ الوضع النسبي بين (C_n) و (C_{n+1})

من أجل كل $x>0$ و $n\geq 1$ لدينا:

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=g(x)$$

وعليه:

- (C_{n+1}) فوق (C_n) لما $0<x<1$
- (C_{n+1}) تحت (C_n) لما $x>1$
- (C_{n+1}) يقطع (C_n) في $B_n\left(e;e-n-\frac{n}{e}\right)$

④ تبيان أن $f_n(\beta)=\beta$:

من أجل كل $x>0$ ، لدينا :

$$g(x) = f_{(n+1)}(x) - f_n(x)$$

$$= x-(n+1)-\frac{(n+1)\ln x}{x} - x + n + \frac{n\ln x}{x}$$

$$= -1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$= -\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا ، $g(\beta)=0$

ومنه ، $-\left(1+\frac{\ln\beta}{\beta}\right)=0$

ومنه : $\frac{\ln\beta}{\beta}=-1$

ومنه $\ln\beta=-\beta$

وبالتالي ، $f_n(\beta)=\beta-n+\frac{n\beta}{\beta}$

$$=\beta-n+n$$

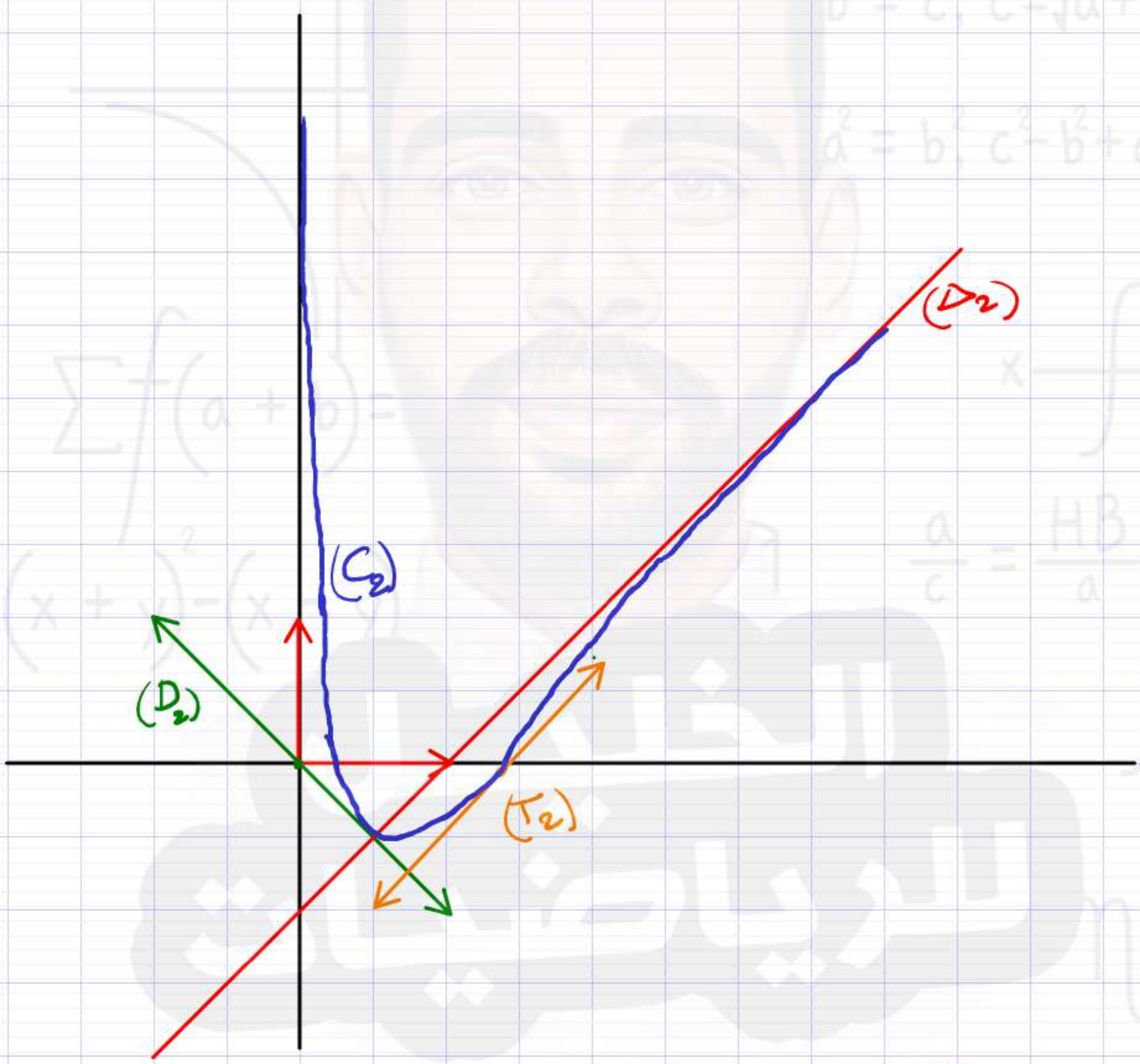
$$=\beta$$

(IV

① رسم (C_2) :

من أجل $n=2$ ، لدينا :

$$\begin{cases}(T_2): y = x - 2\left(1+\frac{1}{e}\right) \\ (\Delta_2): y = x-2 \\ (D_2): y=-x\end{cases}$$



② المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $f_2(x)=mx$ هي فواصل نقط تقاطع (C_2) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=mx$

لدينا $y = mx$

ومنه $mx - y = 0$

ومنه $\begin{cases} x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

اذن المستقيمات ذات المعادلة $y = mx$

تدور حول مبدأ المعلم.

ونجد أنه لما: $-1 < m < -2\left(1+\frac{1}{e}\right)$

للمعادلة حلين متمايزين

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غرداية — **ثانويات المقاطعة التفتيشية غرداية 02**

امتحان بكالوريا التجريبي — **دورة: ماي 2024**

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدّة: 04 سا و 30 د**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-4)(z^2+4z+16)=0$

2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب

$z_A=4$ ، $z_B=-2+2i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

• أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

3) نعتبر العدد المركب L حيث: $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

أ- أكتب العدد L على الشكل الأسي ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقي سالب.

د- ما طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C. أوجد عبارته المركبة.

ه- عين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتحويل r.

و- ما طبيعة الرباعي $ABCE$ ؟ علل إجابتك.

4) (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left|iz+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|z-4\right|$

أ- بين أن كلا من النقطتين E و B تنتميان إلى (γ)

ب- عين طبيعة المجموعة (γ).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر ثنائية $(x_0;q)$ حيث x_0 و q عددين طبيعيين غير معدومين و $p\gcd\left(x_0,q\right)=1$. (x_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول x_0 ، وتحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $x_{n+1}+2x_{n+3}-44x_0{}^2q^n=0$

1) أ- بين أن: $q+2q^3=44x_0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $p\gcd\left(1+2q^2,4\right)=1$ ثم حدد قيمة كل من x_0 و q

2) نأخذ فيما يلي $(x_0;q)=(3;4)$ ونضع من أجل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n\equiv 0[3]$

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+1}=4S_n+3$ ، ثم حدد قيمة العدد: $p\gcd\left(S_{n+1};S_n\right)$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n\equiv 0[5]$

3) أ- حدد باقي قسمة العدد S_{27} على 17.

ب- استنتج ثلاثة قواسم أولية للعدد S_{27}

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على **5** كريات حمراء و**3** كريات صفراء وكريتين خضراوين. الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من الوعاء U.

A و B و C ثلاثة أحداث حيث:

- A : " الحصول على ثلاث كريات حمراء"
- B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"
- C : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A و B و C على الترتيب.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

3) نظيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع.

D و E حدثين حيث:

- D : " الحصول على كريتين حمراوين"
- E : " الحصول على كريتين من نفس اللون"

أ- برهن أن: $\mathrm{P}(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب- أحسب بدلالة n العدد $\mathrm{P}(E)$ احتمال الحدث E.

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x)=e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m$ حيث m وسيط حقيقي

(C_m) التمثيل البياني للدالة f_m في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. حيث $\|\vec{i}\|=2\,cm$

I. في هذا الجزء نضع: $m=1$

1) أدرس تغيرات الدالة f_1

2) أ- برهن أن المنحني (C_1) يقبل A_0 نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

ب- أكتب معادلة لـ(T) المماس للمنحني (C_1) عند النقطة A_0 ثم أنشئه.

ج- أنشئ المنحني (C_1)

II.

1) أ- بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها.

ب- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m وجود نقط تقاطع المنحني (C_m) مع حامل محور الفواصل.

2) أدرس تغيرات الدالة f_m ، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m).

3) أ- m_1 و m_2 عددين حقيقين حيث: $m_1<m_2$ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_1}) و (C_{m_2})

ب- أنشئ (دون دراسة التغيرات) المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) في نفس المعلم السابق.

4) نعتبر y_m القيمة الحدية المحلية للدالة f_m التي تأخذها عند x_m أكتب كل من x_m و y_m بدلالة m.

استنتج معادلة مستقلة عن m للمنحني (P) مجموعة النقط $M(x_m;y_m)$ لما m يمسح $]-1;+\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: رياضات /البكالوريا التجريبي 2024

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

نعتبر المعادلة التالية: (E) .... $7x-5y=11$ حيث x و y عددان صحيحان

1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

ج) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر تماما من 7 ، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}$ في النظام العشري

أ) تحقق أن $10^3\equiv -1[11]$

ب) عين قيمة العدد N إذا علمت أن باقي قسمته على 11 هو 4

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس U على 5 كريات بيضاء و3 كريات حمراء وكريتان خضراوان،الكريات متماثلة ولانفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس

1) أحسب إحتمال الحادثتين التاليتين :

A : " الكريات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B : " من بين الكريات الثلاثة المسحوبة توجد كرة واحدة فقط خضراء "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الألوان الظاهرة

أ) عين قانون احتمال المتغير X

ب) احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير العشوائي X

3) في تجربة مستقلة نعتبر الكيس U وكيس آخر V به كريتين بيضاوين وكريتين حمراوين وكرية خضراء

نرمي حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6، إذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس U

وإلا نسحب كرية من الكيس V

أ) بين أن احتمال سحب كرية بيضاء هو $\frac{5}{12}$

ب) علما أن الكرية المسحوبة بيضاء فما احتمال ان تكون من الكيس V

التمرين الثالث: (04 نقاط).

a عدد حقيقي موجب تماما

f الدالة المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) نفرض أن $0 < a < 1$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ب) بين أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

2) نضع $a \succ 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$

أ) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$

ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (w_n) كالآتي:

$w_0 = 0$ ومن أجل كل $n \succ 1$ ، $w_n = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$

- أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و a

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{w_n}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 2 - \ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية : $f(x) = \frac{1}{2}\left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ أحسب $f(-x) + f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) أ) أثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (C_f) يوازيان (Δ) يطلب تحديد معادلة كل منهما.

ب) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2 < \alpha < 2,1$ و $-0,5 < \beta < -0,4$

ج) أرسم كلاً من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f).

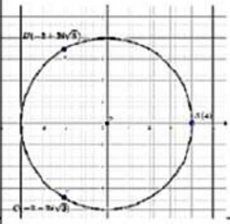
5) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e-2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا

6) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين

اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \alpha$

انتهى الموضوع الثاني

نموذج تصحيح بكالوريا تجريبية 2024

عناصر الإجابة		النقطة
الموضوع الاول		
التمرين الأول: (6 نقاط)		
1 / $z^2+4z+16=0$ إمّا : $z-4=0$ أي $z=4$ أو $z^2+4z+16=0$ و $\Delta=-12$ أي $\Delta=12i^2$ أي: $z_1=-2+2i\sqrt{3}$ ، $z_2=-2-2i\sqrt{3}$ 	0.5 01	2
2 / كتابة كل من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي. $z_A=4e^{i0}$ ، $z_B=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_C=4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$. استنتاج خصائص الدائرة المحيطة بالمثلث ABC بما أنّ: $\|z_A\|=\|z_B\|=\|z_C\|=4$ فإنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O نصف قطرها 4.	0.5	0.5
3 / أ / $L=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ كتابة L على الشكل الأسي : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\|L\|=1$ و $Arg(L)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad /k\in\mathbb{Z}$ ومنه: $L=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ التفسير الهندسي للنتائج: $\|L\|=1$ معناه $\left\|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right\|=1$ أي: $\frac{\|z_B-z_A\|}{\|z_C-z_A\|}=1$ أي: $\|z_B-z_A\|=\|z_C-z_A\|$ ومنه: $AB=AC$ و $Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}$ معناه: $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}$. ب / المثلّث ABC متقايس الأضلاع. ج / تعيين قيم n حتى يكون العدد المركّب L^n حقيقيا سالبا تماما. L^n حقيقي سالب تماما معناه: $Arg(L^n)=(2k+1)\pi \quad k\in\mathbb{Z}^-$ أي: $-\frac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi \quad / \quad k\in\mathbb{Z}^-$ $-n=6k+3 \quad / \quad k\in\mathbb{Z}^-$ أي: $n=-6k-3 \quad / \quad k\in\mathbb{Z}^-$. د / إيجاد طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحوّل B إلى C. لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فإنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ التحويل دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$. أيجاد العبارة المركّبة للتحويل : $z'=az+b_r$ و $a=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $b=z_A(1-a)=z_A\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه $b=2-2i\sqrt{3}$ وتصبح العبارة المركّبة من الشكل: $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2-2i\sqrt{3}$.		

هـ / تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالدوران r. لدينا: $z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C + 2 - 2i\sqrt{3}$.اي: $z_E = 4 - 4i\sqrt{3}$.

و / الرباعي ABCE معيّن لأن المثلثين ABC وACE متقايسا الأضلاع ويشتركان في الضلع $[AC]$

4 / (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق : $|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$

أ / التبيين أنّ النقطتين B وE تنتميان إلى المجموعة (γ). $|iz_B + 2i - 2\sqrt{3}| = |i(-2 + 2i\sqrt{3}) + 2i - 2\sqrt{3}|$ أي:

$|iz_B + 2i - 2\sqrt{3}| = |-4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ و $|z_B - 4| = |-2 + 2i\sqrt{3} - 4| = |-6 + 2i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ أي: $B \in (\gamma)$

$$|iz_E + 2i - 2i\sqrt{3}| = |i(4 - 4i\sqrt{3}) + 2i - 2\sqrt{3}|$$

أي: $|iz_E + 2i - 2i\sqrt{3}| = |2\sqrt{3} + 6i| = 4\sqrt{3}$ و $|z_E - 4| = |4 - 4i\sqrt{3} - 4| = |-4i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ أي: $E \in (\gamma)$.

$$|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$$

$$\left|i\left(z + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{i}\right)\right| = |z - 4|$$

$$\left|i\left(z + 2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = |z - 4|$$

$$|i| \times |z + 2 + 2i\sqrt{3}| = |z - 4| \quad ; \quad |i| = 1$$

$$|z - (-2 - 2i\sqrt{3})| = |z - 4|$$

ب / تعيين طبيعة المجموعة (γ): لدينا: $|z - z_C| = |z - z_A|$

$|z - z_C| = |z - z_A|$ معناه : $MC = MA$ ومنه المجموعة (γ): هي محور القطعة $[AC]$

أو بعبارة أخرى هي المستقيم (BE)

التمرين الثاني: (6 نقاط)

الاجابة النموذجية مادة الرياضيات الشعبة: رياضيات بك 2024

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	التمرين الثاني (04 نقاط)

1) أ- لدينا: $x_{n+1}+2x_{n+3}=44x_n^2$ ؛ (x_n) هندسية أي $x_n=x_0q^n$

ومنه: $x_0q^{n+1}+2x_0q^{n+3}-44x_0^2q^{2n}=0$ اذن: $q+2q^3=44x_0$ — 0,5

ب- لدينا: $q(1+2q^2)=44x_0$ — 0,5

q يقسم $44x_0$ و أولي مع x_0 فهو يقسم 44 (حسب غوص)

$q\in\{1;4;11;44\}$

لما $q=1$ فان: $1+2q^2=3$ ؛ لما $q=4$ فان: $1+2q^2=33$

لما $q=11$ فان $1+2q^2=243$ ؛ لما $q=44$ فان: $1+2q^2=1937$

في كل الحالات: $PGCD(1+2q^2;4)=1$

* تحديد x_0 ، q : — 0,5

لما $q=1$ أو $q=11$ فان: $x_0\notin\mathbb{N}$

لما $q=4$ فان: $x_0=3$ ؛ لما $q=44$ فان $x_0=3873$

المجموع: 1,5

2) أ- لدينا: $(x_0,q)=(3,4)$ ؛ $S_n=x_0+x_1+\dots+x_n$ — 0,5

$$S_n=x_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=3\,\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=4^{n+1}-1$$

لدينا: $4\equiv1[3]$ ومنه $4^{n+1}\equiv1[3]$ ومنه $4^{n+1}-1\equiv0[3]$ اذن $S_n\equiv0[3]$

ب- التحقق: $S_{n+1}=4^{n+2}-1=4\times4^{n+1}-4+3=4(4^{n+1}-1)+3=4S_n+3$ — 0,5

اذن $PGCD(S_{n+1};S_n)=3$

جـ- لدينا: $S_n\equiv0[5]$ أي $4^{n+1}-1\equiv0[5]$ ومنه $4^{n+1}\equiv1[5]$ — 0,5

لدينا: $4\equiv-1[5]$ ومنه $4^{n+1}\equiv(-1)^{n+1}[5]$ ومنه $(-1)^{n+1}\equiv1[5]$

ومنه $n+1$ زوجي أي n فردي

اذن مجموعة قيم n حتى يكون $S_n\equiv0[5]$ هي n فردي أي $n=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

المجموع: 1,5

1	0,5	أ- باقي قسمة S_{28} على 17 : لدينا : $S_{28}=4^{28+1}-1=4^{29}-1$ لدينا: $4^{29}=4\times4^{28}$ أي $4^{29}=4\times(4^2)^{14}=4\times(16)^{14}$ نعلم أن $16\equiv-1\,[17]$ ومنه $(16)^{14}\equiv(-1)^{14}\,[17]$ أي $(16)^{14}\equiv1\,[17]$ ومنه $4\times(16)^{14}\equiv4\,[17]$ ومنه: $4\times(16)^{14}-1\equiv4-1\,[17]$ ومنه : $S_{28}\equiv3\,[17]$ اذن باقي قسمة S_{28} على 17 هو 3	3
	0,5	ب- استنتاج القواسم الثلاث الأولية للعدد S_{27} : لدينا: $S_{28}=4S_{27}+3$ و $S_{28}\equiv3\,[17]$ ومنه $4S_{27}+3\equiv3\,[17]$ أي $4S_{27}\equiv0\,[17]$ ومنه $S_{27}\equiv0\,[17]$ إذن: القواسم الأولية الثلاث المطلوبة لـ S_{27} هي 3 و 5 و 17	
			1)
			2)

التمرين الثالث: (6 نقاط)

1) حساب الإحتمالات:

$p(A)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$ (0.5)

$p(B)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$. (0.5)

$p(C)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$. (0.5)

2) قيم المتغير العشوائي هي: $X\in\{1;2;3\}$. (0.25)

$$p(X=1)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}.$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_5^1+C_3^2\times C_2^1+C_2^2\times C_5^1+C_2^2\times C_3^1+C_5^2\times C_2^1+C_5^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}.$$

$$p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}.$$

قانون إحتمال المتغير العشوائي:

$(X=x_i)$	1	2	3

	$p(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

0.75

0.25

الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=1\times\frac{11}{120}+2\times\frac{79}{120}+3\times\frac{30}{120}=0{,}87.$$

3) أ) البرهان أن $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$:

0.25

$$p(D)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

ب) حساب $p(E)$ بدلالة n :

0.5

$$p(E)=\frac{A_2^2+A_3^2+A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{2+6+\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{8+n(n-1)}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}.$$

0.5

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E)\geq\frac{1}{2}$:

$p(E)\geq\frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\frac{1}{2}$ أي $2n^2-2n+16\geq n^2+9n+20$.

وبالتالي: $n^2-11n-4\geq 0$ نحسب Δ

$\Delta=137$

$n_1=-0{,}35$.

$n_2=11{,}35$.

أي قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E)\geq\frac{1}{2}$ هي: $n\geq 12$

التمرين الرابع: (6 نقاط)

1.5

I) 1- لدينا : $f_1(x)=e^{-2x}-2e^{-x}+1$

دراسة تغيرات الدالة f_1 :

0.5

أ) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-2x}-2e^{-x}+1\right]=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}-2e^{-x}+1\right]=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(1-2e^{x}+e^{2x}\right)=+\infty$$

0.25

ب) الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على وعبارة دالتها المشتقة هي :

$f_1'(x)=-2e^{-2x}+2e^{-x}$ أي $f_1'(x)=2e^{-2x}\left(e^{x}-1\right)$

0.75

اشارة $f_1'(x)$ من اشارة $e^{x}-1$ ومنه نلخص اشارة قي الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$

أي f_1 متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty,0\right]$

و f_1 متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

و جدول تغيرات الدالة يكون :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1.25

1) أ- برهان أن المنحنى (C_1) يقبل نقطة انعطاف A_0 و حساب احداثياتها :

نحسب f_1'' : الدالة f_1' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f_1''(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$ أي

$f_1''(x) = 2e^{-2x}\left(2 - e^{x}\right)$

0.5 نضع $f_1''(x) = 0$ أي $2e^{-2x}\left(2-e^{x}\right) = 0$ ومنه يكون إذا $2 - e^{x} = 0$ وبالتالي $x = \ln 2$

ويمكن تلخيص اشارة $f_1''(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f_1''(x)$		$+$	0	$-$	

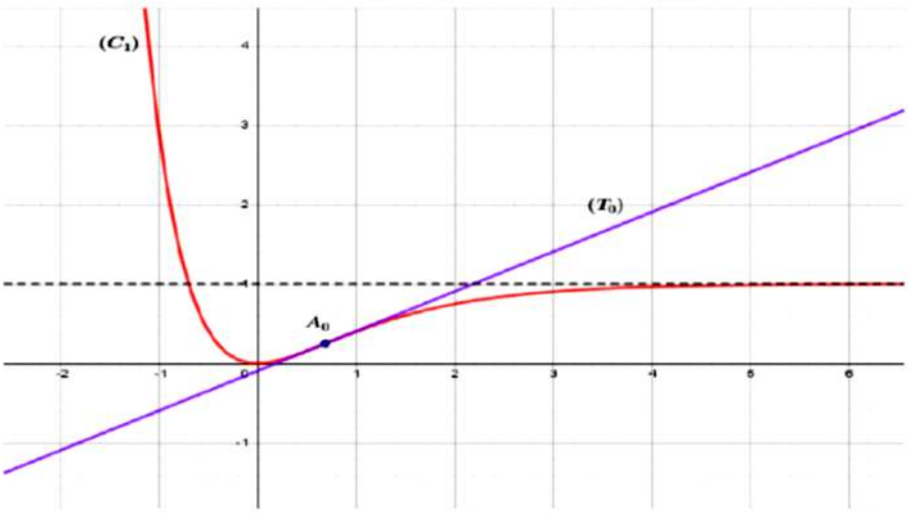
أي المشتقة الثانية للدالة f_1 تنعدم عند الفاصلة $\ln 2$ وتغير اشارتها

0.5 وبالتالي المنحنى (C_1) الممثل للدالة f_1 يقبل النقطة A_0 : $A_0(\ln 2; f_1(\ln 2))$ ومنه $A_0\left(\ln 2;\frac{1}{4}\right)$

ب – معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة هي : $(T) :\ y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2)$

0.05 أي : $(T) :\ y = \frac{1}{2}(x - \ln 2) + \frac{1}{4}$ و منه $(T) :\ y = \frac{1}{2}x - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4}$

0.5 جـ - الانشاء



0.75

II) 1) أ - برهان أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة و تعين احداثياتها :

نحل المعادلة $f_m(x) = f_{m'}(x)$ مع $(m \neq m')$ أ

0.25 $e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m = e^{-2x} - (1+m')e^{-x} + m'$ أي $(m' - m)e^{-x} = m' - m$ اذن $e^{-x} = 1$

أي $x = 0$ و بما أن من أجل كل عدد حقيقي m : $f_m(0) = 0$ اذن جميع المنحنيات تمر من النقطة الثابتة

0.5 هي المبدأ $O(0,0)$ (كما يمكن استعمال طريقة الكثير الحدود المعدوم)

ب- المناقشة حسب فيم m وجود نقط تقاطع المنحنى (C_m) مع حامل محور الفواصل :

نحل المعادلة $f_m(x) = 0$ أي $e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m = 0$ بوضع $e^{-x} = t$ تصبح المعادلة :

$$t^2-(1+m)t+m=0$$

نحسب المميز Δ نجد : $\Delta=(1+m)^2-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$ أي $\sqrt{\Delta}=|m-1|$

لما $m\rangle 1$: $t=\dfrac{1+m-(m-1)}{2}=1$ أو $t=\dfrac{1+m+(m-1)}{2}=m$ وبالتالي $x=0$ أو $x=-\ln m$

لما $m\langle 1$: $t=\dfrac{1+m-(1-m)}{2}=m$ أو $t=\dfrac{1+m+(1-m)}{2}=1$

- لما $0\langle m\langle 1$ نجد : $x=-\ln m$ أو $x=0$
- لما $m\leq 0$ نجد : $t_1\langle 0$ مرفوض ولما $t=1$ نجد $x=0$
- لما $m=1$ نجد : $t=1$ أي نجد $x=0$

إذن - لما $m=1$ أو $m\leq 0$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة هي المبدأ $O(0,0)$

- لما $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما المبدأ $O(0,0)$ والنقطة $B(-\ln m,0)$

---

2 (2)

2) دراسة تغيرات الدالة f_m وتعين معادلة للمستقيمات المقاربة :

0.5

أ- النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m\right]=m$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m\right]=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(1-(1+m)e^{x}+me^{2x}\right)=+\infty$$

0.25

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=m$ فإن المنحنيات (C_m) تقبل نستقيما مفاريا معادلته $y=m$ بجوار $+\infty$

: : الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وعبارة دالتها المشتقة هي :

0.75

$$f'_m(x)=-2e^{-2x}+(1+m)e^{-x} \quad \text{أي} \quad f'_m(x)=e^{-2x}\left[(1+m)e^{x}-2\right]$$

اشارة $f'_m(x)$ من اشارة $(1+m)e^{x}-2$ أي نناقش حسب قيم m اشارة $f'_m(x)$

أ) لما $m=-1$ أي $m+1=0$ تكون $f'_m(x)\langle 0$ وبالتالي الدالة f_{-1} متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

ب) لما $m\langle -1$ أي $m+1\langle 0$: تكون $f'_m(x)\langle 0$ وبالتالي الدالة f_m متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جـ) لما $-1\langle m$ أي $0\langle m+1$ نقول $(1+m)e^{x}-2=0$ نجد $e^{x}=\dfrac{2}{m+1}$ ومنه $x=\ln\left(\dfrac{2}{m+1}\right)$ وفي هذه الحالة نقول الدالة f_m متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty,\ln\left(\dfrac{2}{m+1}\right)\right]$ ومتزايدة تمامل على المجال $\left[\ln\left(\dfrac{2}{m+1}\right);+\infty\right[$

جـ) جدول التغيرات :

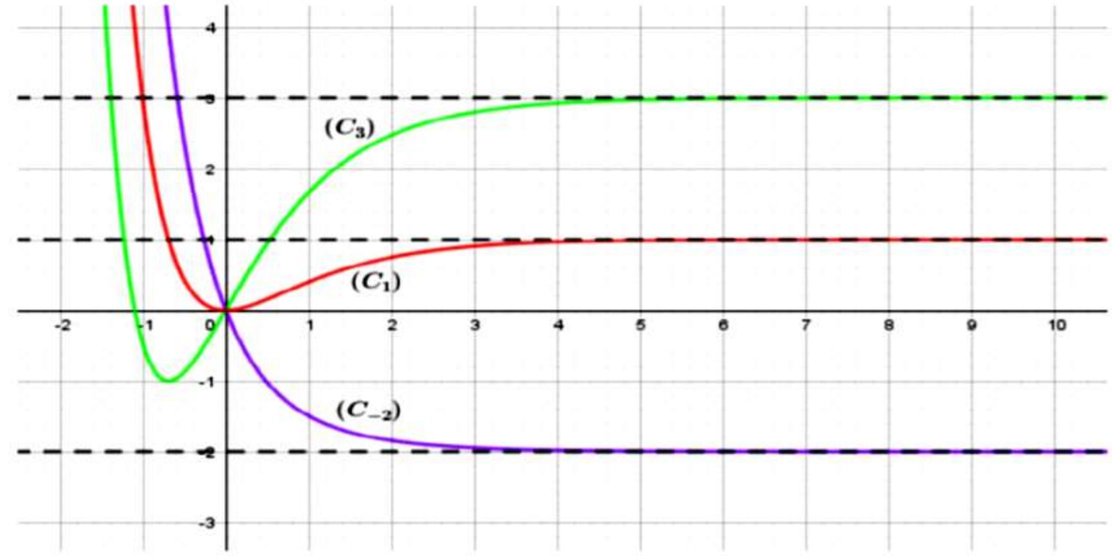
0.5

لما $m\leq -1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$ ↘	m

لما $m\rangle -1$

x	$-\infty$		$ln(\frac{2}{1+m})$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	$f(ln\frac{2}{1+m})$	↗	m

0.5	0.5	3) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_2}) و (C_{m_1}) لتدرس اشارة الفرق : $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=e^{-2x}-(1+m_2)e^{-x}+m_2-e^{-2x}+(1+m_1)e^{-x}-m_1$ أي $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=-(m_2-m_1)e^{-x}+m_2-m_1$ وبالتالي $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=(m_2-m_1)(1-e^{-x})$ بما أن $m_2\rangle m_1$ أي $m_2-m_{11}\rangle 0$ فان اشارة الفرق تتبع اشارة $1-e^{-x}$ وبالتالي الوضعية تكون 1- لما $x\in]-\infty;0[$ المنحنى (C_{m_2}) يقع تحت المنحنى (C_{m_1}) 2- لما $x=0$ المنحنى (C_{m_2}) يقطع المنحنى (C_{m_1}) في النقطة $O(0,0)$ 3- لما $x\in]0;+\infty[$ المنحنى (C_{m_2}) يفع فوق المنحنى (C_{m_1})
0.5	0.25 0.25	4) الانشاء : يمكن الاعتماد على الدراسة السابقة في انشاء المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) 
0.5	0.25 0.25	5) كتابة كل x_m من و y_m بدلالة m للدالة f_m قبمة حدية محلية معناه $f_m(x)=0$ وحسب الأسئلة السابقة وجدنا أن لهذه المعادلة حلولا لما $m\rangle -1$ لدينا $f_m(x)=0$ أي أن $x_m=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ ومنه $y_m=f(x_m)=f\left(\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)\right)=e^{-2\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)}-(1+m)e^{-\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)}+m=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-\frac{(m+1)^2}{2}+m$ اذا $y_m=\frac{(m+1)^2-2(m+1)^2+4m}{4}=\frac{-(m+1)^2+4m}{4}=\frac{-m^2-2m+1+4m}{4}=\frac{-(m^2-2m+1)}{4}$ ومنه $y_m=\frac{-(m-1)^2}{4}$ إيجاد معادلة مستقلة عن m للمنحنى (p) لما يمسح m لمجال $]-1;+\infty[$ نعلم أن $x_m=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ فإن $e^{x_m}=\frac{2}{m+1}$ وبالتالي $m+1=\frac{2}{e^{x_m}}$ أي $m=2e^{-x_m}-1$ وبتعويض m في y_m نجد $y_m=\frac{-(2e^{x_m}-1-1)^2}{4}=\frac{-(2e^{x_m}-2)^2}{4}=\frac{-4(e^{x_m}-1)^2}{4}$

		و بالتالي نحصل على معادلة للمنحنى (p) هي $y=-(e^x-1)$ لما يمسح m المجال $]-1;+\infty[$

النقطة		عناصر الإجابة
		الموضوع الثاني 2024
		التمرين الأول: (04 نقاط)
1.5	0.5	نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: (E) .... $7x-5y=11$ 1) أ) الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $7x=5y+11$ ومنه $7x\equiv 1[5]$ ومنه $2x\equiv 1[5]$ ومنه $6x\equiv 3[5]$ إذن $x\equiv 3[5]$
	0.5	ب) استنتاج حلول المعادلة (E): لدينا $x\equiv 3[5]$ معنها $x=5k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في (E) نجد: $y=7k+2$ إذن $k\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(5k+3;7k+2)$
	0.5	ج) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$ من المعادلة (E) نستنتج أن $PGCD(x;y)$ يقسم 11 إذن $PGCD(x;y)=11$ معناه: $\begin{cases}x\equiv 0[11]\\y\equiv 0[11]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}7k+2\equiv 0[11]\\5k+3\equiv 0[11]\end{cases}$ ومنه $2k\equiv -10[11]$ ومنه: $k\equiv 6[11]$ معناه : $k=11k'+6$ بالتعويض نجد: $k'\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(55k'+33;77k'+44)$.
1.25	0.5	أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11
	0.5	(الجدولان أدناه)
	0.25	ب) 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11 معناه: $5^n+7^{2023}\equiv 0[11]$ لدينا: $2023=202\times 10+3$ إذن: $5^n+2\equiv 0[11]$ ومنه : $5^n\equiv 9[11]$ إذن: $k\in\mathbb{N}$ $n=10k+8$
1.25	0.25	2) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر من 8، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}^{10}$ أ) التحقق : لدينا أن $10\equiv -1[11]$ ومنه $10^3\equiv(-1)^3[11]$ إذن: $10^3\equiv -1[11]$

بواقي القسمة الاقليدية لـ: 7^n على 11

n	10k	10k+1	10k+2	10k+3	10k+4	10k+5	10k+6	10k+7	10k+8	10k+9
الباقي	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

بواقي القسمة الاقليدية لـ: 5^n على 11

n	5k	5k+1	5k+2	5k+3	5k+4
الباقي	1	5	3	4	9

0.5 ب) العدد N باقي قسمته على 11 هو 4 معناه: $b \equiv a+5[11]$ إذن: $(a;b)=(1;6)$ أي $N=1016$

0.5 ج) العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11: $N=\overline{844}^{11}$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

1) حساب احتمال الحدثين A و B

0.5 $$p(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$$

0.5 $$p(B)=\frac{C_2^1\times C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

(2

0.25 • تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X: لدينا $X(\Omega)=\{1;2;3\}$.

$p(X=1)=p(A)=\frac{11}{120}$ ،

$p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$ ،

$p(X=2)=\frac{79}{120}$

0.75

x	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

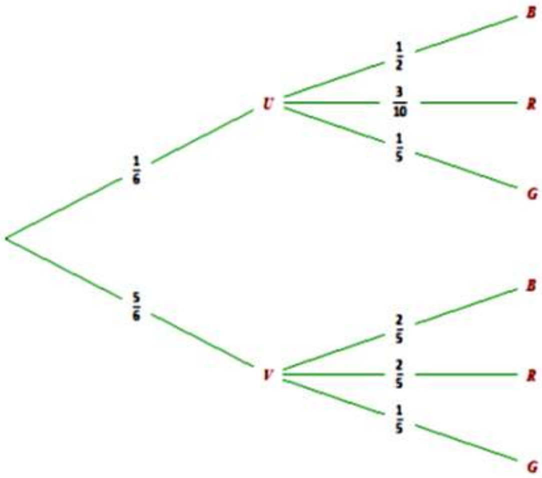
• حساب الأمل الرياضياتي:

0.5 $$E(X)=\frac{11}{120}\times(1)+\frac{79}{120}\times(2)+\frac{30}{120}\times(3)=\frac{259}{120}\simeq 2,16$$

• حساب التباين:

0.5 $$V(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i(x_i)^2-(E(X))^2=(\frac{11}{120}\times(1)^2+\frac{79}{120}\times(2)^2+\frac{30}{120}\times(3)^2)-(2,16)^2=4,97-4,66$$

$\simeq 0,31$



0.25 • تبيين أن $p(B)=\frac{5}{12}$:

$$p(B)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

0.75 • حساب احتمال ان تكون الكرة المسحوبة من الكيس V علما انها بيضاء

V هي الحدث سحب كرة من الكيس

$$P_B(V)=\frac{p(B\cap V)}{P(B)}=\frac{1/3}{5/12}=\frac{4}{5}$$

التمرين الثالث: (6 نقاط)

0.5 **I.** لدينا f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{2\alpha x}{2\sqrt{1+\alpha x^2}}=\frac{\alpha x}{\sqrt{1+\alpha x^2}}$

ولدينا من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $\alpha x\geq 0$ و $\sqrt{1+\alpha x^2}\succ 0$ ومنه $f'(x)$ موجبة على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

0.25

.II

.1

أ. لدينا: $u_0=0$ ومنه $0\le u_0\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ اذن الخاصية محققة من أجل $n=0$ 0.25

- نفرض أن: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ونبين أن $0\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

لدينا: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $f(0)\le f(u_n)\le f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ولدينا $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)=\sqrt{1+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ و $f(0)=1$ و $1\succ0$ 0.75

ومنه $0\le f(u_n)\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ وبالتالي $0\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

ب. لدينا(من أجل $n\ne0$) : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+\alpha u_n^2}-u_n=u_n\left(\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\alpha}-1\right)$ 0.25

ولدينا: $u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\frac{1}{u_n^2}\ge1-\alpha$ وبالتالي : $\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\alpha}-1\ge0$ ولدينا $u_n\ge0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\ge0$ اذن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، نستنتج أنها متقاربة 0.5

لدينا مما سبق $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\lim u_n=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ 0.25

التمرين الرابع: (6 نقاط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+2-\ln x$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجال فإن الدالة متزايدة تماما على المجال
- بما أن الدالة سالبة على المجال فإن الدالة متناقصة تماما على المجال
- ومنه جدول التغيرات:

2) الحساب: $g(1)=0$ انطلاقا من جدول التاغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

(c_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}\left(x+e+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right)=e$$

التفسير البياني: النقطة $\Omega\left(0;\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (c_f)

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

وبما أن النقطة $\Omega\left(0;\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (c_f) فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$

---

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{\frac{2}{x}x-\ln\left(x^2\right)}{x^2}\right)=\frac{-g\left(x^2\right)}{2x^2}$

ت) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجالين فإن الدالة متزايدة تماما على المجالين
- ومنه جدول التغيرات:

---

3) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ(c_f): لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{\ln(|x|)}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ(c_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ). $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}\right)=-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}$

---

4) أ) لإثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (c_f) يوازيان (Δ) يكفي حل المعادلة $f'(x)=-\frac{1}{2}$.

$\frac{x^2+2-\ln x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$ ومنه $\ln x^2=-2$ إذن $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

$(T):y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}e$ و $(T'):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}e$

ب) بين أن (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2<\alpha<2,1$ و $-0,5<\beta<-0,4$

أرسم كل من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الجزائر شرق

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي **دورة: ماي 2024**

الشعبة : رياضيات

إختبار في مادة : الرياضيات **المدة: 04 سا**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $Z_p=10$ و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي Ω مركز الدائرة (Γ). نعتبر النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب $Z_A=5+5i$ ، $Z_B=1+3i$ و $Z_C=8-4i$.

1) بين أن النقط C,B,A تنتمي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).

2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $Z_D=2+2i$. بين ان النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC).

II. من اجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}$ علما أن $\overline{z}$ يرمز إلى مرافق z.

1) بين أن النقط O ، M و M' على استقامة واحدة.

2) ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x=2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z.

أ) تحقق أن: $z+\overline{z}=4$.

ب) عبر عن $z'+\overline{z'}$ بدلالة z و $\overline{z}$ ، ثم استنتج أن : $5\left(z'+\overline{z'}\right)=z'\overline{z'}$.

ج) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M' في الشكل .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) تحقق أن $5^6\equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016}\equiv 1[7]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=1+5+5^2+\cdots+5^n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=5^{n+1}-1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

جـ) بين أن $4S_{2015}\equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم , نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(5 , -4)$ حل للمعادلة (E)
ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـــ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$.

1) بيّن أنّ : $e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n و θ .

3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.

أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n|\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $1\,cm$).

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$

ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

جـ) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).

4) ارسم (d) , (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 2$ و $x = 0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2\times 2019^{6n+4}+2017^{4n+2}$ على 7 .

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $343x-648y=76 \quad .....(E)$.

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟ .

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d=76$.

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي: $P(z)=z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(3-2\sqrt{3}\right)z+6$.

أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z)=(z+2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$.

أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\overline{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}$.

3) أ) أكتب على الشكل الأسي العدد : $L=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.

ب) استنتج أن A صورة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

د) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$

1) أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ثم عين أساس المتتالية q.

2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$

4) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .

ب) عين باقي القسمة الاقليدية لـلعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5.

ج)نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+\ldots+\ln 4^n\right]$

- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $f_n(x)=\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $1cm$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f_n'(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـــ : $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1) أكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ و $0\le x\le 1$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\le f_n(x)\le\frac{1}{(1+x)^n}$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]\le I_n\le\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) أ) إعتمادا على السؤال (II/1) بيّن أنّ : $I_n+nI_{n+1}=1-\frac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إستنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

ج) أحسب بـــ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

المـوسم الدراسي: 2024 / 2023

الحل المفصل للبكالوريا التجريبي في مـادة الرياضيـات

للسـنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

الموضــــــــــــــــــوع الأول

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط)	الأعداد المركبة	التنقيط
I) 1-) بما أن $\Omega A=\lvert 5i\rvert=5$ و $\Omega B=\lvert -4+3i\rvert=5$ و $\Omega C=\lvert 3-4i\rvert=5$ اذن النقط A , B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات القطر [O P] .		0.75
* إنشاء الشكل : تمثيل النقط : Ω , A , B و C و الدائرة (Γ)		0.25
2-) لدينا من جهة $\overrightarrow{BC}\binom{7}{-7}$ و $\overrightarrow{DB}\binom{-1}{1}$ اذن $\overrightarrow{BC}=-7\overrightarrow{DB}$ و منه $D\in(BC)$ و من جهة ثانية : $\overrightarrow{OD}\,.\overrightarrow{BC}=0$ أي $(OD)\perp(BC)$ نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)		0.75
II) 1-) نفرض أن $M(x\,,y)$ نعلم أن $(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{OM'})=arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)$ علما أن $Z'=\frac{20}{\bar{Z}}$ و بالتالي : $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)=arg\left(\frac{20}{Z\bar{Z}}\right)$ حيث : $Z\bar{Z}'=x^2+y^2$ أي $Z\bar{Z}\in\mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}}\in\mathbb{R}_*^+$ اذن $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)=2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : O , M , M ' على استقامة واحدة		0.25 0.75
2-)-أ) بما أن $M\in(\Delta)$ فإن : $Z=2+iy$ ومنه $\bar{Z}=2-iy$ بالجمع نجد : $Z+\bar{Z}=4$		0.25
ب) لدينا : $Z'+\bar{Z}'=\frac{20}{\bar{Z}}+\frac{20}{Z}=\frac{20Z+20\bar{Z}}{Z\bar{Z}}=\frac{20(Z+\bar{Z})}{Z\bar{Z}}=\frac{80}{Z\bar{Z}}$		0.5
*) حسب الجواب السابق : $5(Z'+\bar{Z}')=5\left(\frac{80}{Z\bar{Z}}\right)=\frac{400}{Z\times\bar{Z}}=\frac{20}{Z}\times\frac{20}{\bar{Z}}$ اذن $5(Z'+\bar{Z})=Z'\times\bar{Z}'$		0.5
ج) من جهة حسب الجواب II – 1) النقط O , M و M ' في استقامية و منه $M'\in(OM)$ من جهة ثانية : $\Omega M'=\lvert Z'-5\rvert$ (علما أن $Z\times\bar{Z}=\lvert Z\rvert^2$. و بالتالي $\Omega M'^2=(Z'-5)\overline{(Z'-5)}$ أي $\Omega M'^2=Z'\bar{Z}'-5(Z'+\bar{Z}')+25$ و بما أن $Z'+\bar{Z}'=4$ و $Z'\times\bar{Z}'=5(Z'+\bar{Z}')$ نحصل على : $\Omega M'^2=25$ أي $\Omega M'=5$ و منه $M'\in(\Gamma)$. و بالتالي M ' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .		01

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)	الأعداد و الحساب	التنقيط

-1 $5^6 = 15625$ $5^6 \equiv 1\ [7]$ ندرس بواقي قسمة 5^n على 7 $5^0 \equiv 1[7]$,$5^1 \equiv 5[7]$,$5^2 \equiv 4[7]$ $5^3 \equiv 6[7]$,$5^4 \equiv 2[7]$,$5^5 \equiv 3[7]$ $5^6 \equiv 1[7]$ دورية و دورها $k = 6n$ $5^6 \equiv 1[7]$ $5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$ $2016 = 6 \times 336 = 6n$	0.25 0.25 0.25
-2 $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ ... + 5^n$ أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1}$ لذلك نحسب $S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \ldots 5^n$ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$ $S_n = 1\left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$ و منه $4S_n = 5^{n+1} - 1$ لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$ تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ يوجد (5, -4) بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه S_n 5^n , أوليان فيما بينهما	0.25 0.25 0.25
ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$ لدينا $4S_n \equiv a\ [7]$ نضرب في 2 $8S_n \equiv 2a\ [7]$ $8 \equiv 1\ [7]$ ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$ العكس : بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\ S_n \equiv a\ [7]$ لدينا $S_n \equiv 2a\ [7]$ نضرب في العدد 4 $4S_n \equiv 8a\ [7]$ $8a \equiv a\ [7]$ $4\ S_n \equiv a\ [7]$ ي	0.25 0.25

جـ) بين أن : $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه

$$4\,S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$$

0.25

$$5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$$

$$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$$

استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

لدينا حسب ما سبق:

$$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$$

0.25

فان

$$S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$$

ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0

د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n

معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$

$$5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$$

0.5

$$5^{n+1} \equiv 1\ [7]$$

$$5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$$

$n + 1 = 0, \quad n = -1,$ مرفوضة -1

و هو المطلوب $n + 1 = 6, \quad n = 5$,

$$S_n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

01

3- حلول المعادلة (E) هي :

$(x, y) = (KS_n + 5\ , -K \times 5^n - 4)$, $K \in \mathbb{Z}$

التنقيط	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) الأعداد المركبة + المتتاليات

01

1- $e^{i\theta} + 1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2})}[e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})}] = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})}$

2- نضع $z_n = ae^{ib}$ حيث a عدد حقيقي و $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ومنه $u_n = \arg(z_n) = b$ ومن جهة اخرى لدينا

0.75

$u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n + |z_n|) = \arg(a(e^{ib} + 1)) = \arg(2a\cos(\frac{b}{2})e^{i\frac{b}{2}}) = \frac{b}{2} = \frac{u_n}{2}$ وبالتالي u_n متتالية هندسية

اساسها $\frac{1}{2}$

0.25

- $u_n = \theta \times (\frac{1}{2})^n$

0.5

3- ا) $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}} = z_n + |z_n| - (\overline{z_n} + |z_n|) = z_n - \overline{z_n} = v_n$

- نستنتج ان v_n متتالية ثابتة وان $v_n=v_0=z_0-\overline{z_0}=2i\sin(\theta)$	0.5
ب) لدينا مما سبق $v_n=z_n-\overline{z_n}=2i\sin(\theta)$ لكن $z_n=\lvert z_n\rvert e^{i\theta\times(\frac{1}{2})^n}$ وبالتالي $z_n-\overline{z_n}=\lvert z_n\rvert(2i\times\sin(\theta\times(\frac{1}{2})^n))=2i\times\sin(\theta)$ اي $\lvert z_n\rvert(\sin(\frac{\theta}{2^n}))=\sin(\theta)$	01

حل التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x)=e^{x-2}-1$ 0.25

جدول التغيرات: 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↗

0.25

2) اشارة : $g(x)\geq 0$ 0.25

II.

1) أ) النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$ 0.25

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$ 0.25

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$$ 0.25

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى (d) 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

2) حساب المشتقة: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x-2}}$ 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25

3) أ) معناه نحل المعادلة: $f(x)=0$ 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x)=0$ 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d) هي: 0.5

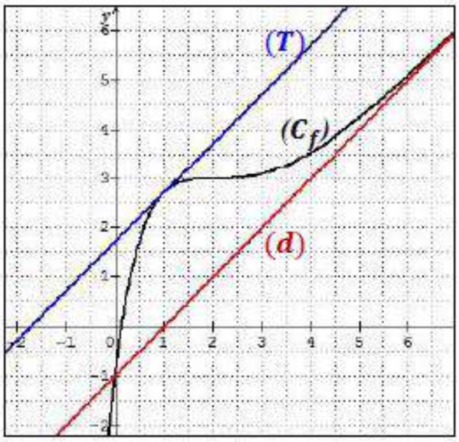
$$y=x-1+e$$

5) التمثيل البياني

0.5

0.25

0.25



5) المناقشة البيانية: $f(x)=x+m$

$m<-1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا

$m=-1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم

$-1<m<e-1$ حلين موجبين تماما 0.5

$m=e-1$ حلا واحدا موجبا

$m=e-1$ ليس لها حلول

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع:

$U(x)=x$ و $V'(x)=e^{2-x}$ 0.5

$H(x)=(-x-1)e^{2-x}$

ب) حساب A:

$$A=\int_0^2 (f(x)-y)dx$$

$$A=\int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}}dx=\int_0^2 xe^{2-x}\,dx$$ 0.5

$$A=[H(x)]_0^2$$

$$A=H(2)-H(0)$$

$$A=(e^2-3)\,cm^2$$

الموضـــــــــــــــــــــوع الثاني

محاور الموضوع	عناصــــر الإجـــــابة	العلامـــــة مجزأة	العلامـــــة كاملة
التمرين الأول	1)أ) بواقي قسمة 3^n على 7 .		04 ن
	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} n= & 6k & 6k+1 & 6k+2 & 6k+3 & 6k+4 & 6k+5 \\ \hline 3^n\equiv & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{array}$	0.5 ن	
	ب) $2019\equiv 3[7]$ ومنه $2019^{6n+4}\equiv 4[7]$		
	$2017\equiv 1[7]$ ومنه $2017^{4n+2}\equiv 1[7]$		
	إذن $2\times 2019^{6n+4}+2017^{4n+2}\equiv 2[7]$.	0.5 ن	
	2) أ) $PGCD(343;648)=1$ و 1 يقسم 76 ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.	0.25 ن	
	ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).	0.75 ن	
	$(x;y)=(648k+4;343k+2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.		
	3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).		
	أ) d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $343x-648y$ أي d يقسم 76	0.5 ن	
	ومنه $d\in\{1;2;4;19;38;76\}$.		
	ب) $d=76$ معناه $\begin{cases}648k+4\equiv 0[76]\\343k+2\equiv 0[76]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}40k+4\equiv 0[76]\\39k+2\equiv 0[76]\end{cases}$		
	و منه $k\equiv 74[76]$ أي $k\equiv 76\alpha+74$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.	0.5 ن	
	ومنه $(x;y)=(49248\alpha+47956;26068\alpha+25384)$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.		
	4) $\begin{cases}\lambda=\beta\times 7^3+7^2+\alpha\times 7+\beta\\\lambda=\alpha\times 5^4+5^3+\alpha\times 5^2+\alpha\times 5+\beta\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda=344\beta+7\alpha+49\\\lambda=655\alpha+\beta+125\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$		
	أي $\begin{cases}343\beta-648\alpha=76\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$ ومنه $(\alpha;\beta)=(2;4)$.	0.75 ن	
	كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6: $\lambda=1439=\overline{01355}^{6}$.	0.25 ن	
التمرين الثاني	1) $P(z)=z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(3-2\sqrt{3}\right)z+6$.	0.25 ن	05 ن
	أ) $P(-2)=0$.	0.5 ن	

		. $P(z)=(z+2)\left(z^2-\sqrt{3}z+3\right)$ ب) $P(z)=0$ تكافئ $(z+2=0)$ أو $\left(z^2-\sqrt{3}z+3=0\right)$. $z+2=0$ يكافئ $z=-2$. $z^2-\sqrt{3}z+3=0$ $\Delta=-9=(3i)^2$ ، $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.	
	0.5 ن	مجموعة الحلول: $S=\left\{-2;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$ 2) $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$.	
	0.75 ن	أ) كتابة كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2e^{\pi i}$.	
	0.25 ن	الاستنتاج: لدينا $\lvert z_A\rvert=\lvert z_B\rvert=\lvert z_B\rvert=2$ أي $OA=OB=OC=2$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .	
	0.5 ن	ب) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n\in\mathbb{R}$ معناه $e^{2ni\frac{\pi}{3}}\in\mathbb{R}$ ومنه $2n\frac{\pi}{3}=k\pi$ و منه $2n=3k$ ونجد $n=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$.	
	0.5 ن	ج) $\bar{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $z=ke^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم $[OE)$ باستثناء النقطة O حيث $z_E=-1+i\sqrt{3}$.	
	0.5 ن	3) أ) كتابة على الشكل الأسي العدد : $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$: $L=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$	
	0.25 ن	ب) لدينا $z_A-z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_C)$ ومنه A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	
	0.5 ن	ج) طبيعة المثلث ABC : لدينا $\begin{cases}CB=CA\\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ ومنه ABC متقايس الأضلاع .	
	0.5 ن	د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ ومنه $z_D=z_C-z_B+z_A$ أي $z_D=-2+2i\sqrt{3}$.	

التمرين الثالث :	04.5 نقطة
لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$	
1) حساب u_2 ، u_1 و u_3 : لدينا : $u_1\times u_3=u_2^2$ لان u_2 هو الوسط الهندسي للحدين u_1 و u_3. ومنه : $u_2^2=256$ يكافئ $u_2=16$ أو $u_2=-16$ وبالتالي $u_2=16$ (لان حدود المتتالية موجبة)	
وبالتالي لدينا : $\begin{cases} u_1+32+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+u_3=68 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ إذن u_1 و u_3 هما حلي للمعادلة $x^2-68x+256=0$ حساب المميز $\Delta=(-68)^2-4\times256=3600$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{68-60}{2}=4$ و $x_1=\dfrac{68+60}{2}=64$ **بما أن المتتالية متزايدة فان $u_1=4$ و $u_3=64$**	3×0.25
حساب الأساس q: $q=\dfrac{16}{4}=4$	0.25
2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n: لدينا : $u_n=u_1\times q^{n-1}=4\times4^{n-1}=4^n$ أي $u_n=4^n$	0.25
3) حساب كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$ بدلالة n: لدينا : $S_n=u_1\times\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)=4\times\left(\dfrac{1-4^n}{1-4}\right)=-\dfrac{4}{3}(1-4^n)=\dfrac{4}{3}\times4^n-\dfrac{4}{3}$	
$S_n=\dfrac{4}{3}\times4^n-\dfrac{4}{3}$	0.5
▪ **حساب الجداء :** $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n=4\times4^2\times...\times4^n=4^{1+2+...+n}$ أي $P_n=4^{\frac{n}{2}(1+n)}$	0.5
4) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n : لدينا : $7^0\equiv1[5]$ $7^1\equiv2[5]$ $7^2\equiv4[5]$ $7^3\equiv3[5]$ $7^4\equiv1[5]$ إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P=4$ من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :	2×0.5

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3

ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية لـلعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5: لدينا : $2016\equiv1[5]$ ومنه $2016^{1436}\equiv1^{1436}[5]$ أي $2016^{1436}\equiv1[5]$ و $49^{2n+1}\equiv(7^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $49^{2n+1}\equiv7^{4n+2}[5]$ أي $49^{2n+1}\equiv4[5]$ وكذلك لدينا : $5n-3\equiv-3[5]$ ومنه $5n-3\equiv2[5]$ وبالتالي : $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv1+4+2[5]$ أي $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv2[5]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5 هو 2	0.5
ج) حساب S_n' بدلالة n: $S_n'=\frac{1}{\ln2}\left[\ln4+\ln4^2+...+\ln4^n\right]=\frac{1}{\ln2}\ln\left(4\times4^2\times...\times4^n\right)$ أي $S_n'=\frac{1}{\ln2}\times\ln P_n=\frac{1}{\ln2}\times\ln4^{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{1}{\ln2}\times\ln(4)^{\frac{1}{2}\times(n^2+n)}$ ومنه : $S_n'=\frac{1}{\ln2}\times(n^2+n)\times\ln2=n^2+n$ أي $S_n'=n^2+n$	0.5
▪ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv0[5]$: $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv0[5]$ يعني $n^2+n+4n^2+7^{4n}\equiv0[5]$ ومنه $n+5n^2+1\equiv0[5]$ أي $n\equiv-1[5]$ ومنه $n\equiv4[5]$ وبالتالي $n\equiv5\alpha+4\ ,\ (\alpha\in\mathbb{N})$	0.25

<table>
<tr><th>تصحيح التمرين الرابع (07 نقاط)</th><th>الدوال</th><th>التنقيط</th></tr>
<tr><td colspan="2">-I
1-أ) حساب النهايات:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f_n(x)=+\infty$</td><td>2x0.25</td></tr>
<tr><td colspan="2">ب) حساب المشتقة $f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n-e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="2">لدينا المقدار $1+x+n>0$ لان $x>-1$ ومنه المشتقة سالبة تماما</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="2">ج)
<table><tr><td>x</td><td>-1 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'_n(x)$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f_n(x)$</td><td>$\searrow$</td></tr></table></td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="2">-2
بما ان جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة نضع $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ وبالتالي
$\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)}=\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2}\Leftrightarrow(1+x_0)(x_0)=0$ لكن $x\neq-1$ ومنه $x_0=0$ والنقطة هي $A(0,1)$</td><td>0.5</td></tr>
</table>

-3

01

أ) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (c_1) و (c_2) :

$f_1(x)-f_2(x)=$

$$\frac{e^{-x}}{(1+x)}-\frac{e^{-x}}{(1+x)^2}\Leftrightarrow e^{-x}[\frac{x}{(1+x)^2}]$$

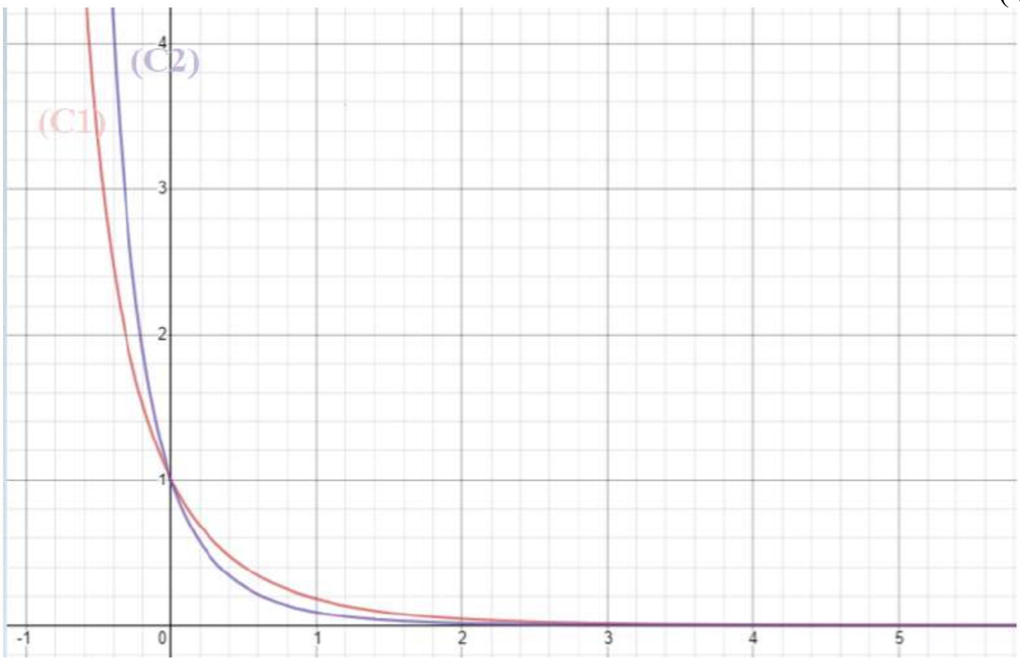
ومنه من اجل $x<0$ (c_2) فوق (c_1)

ومن اجل $x=0$ (c_2) و (c_1) منطبقان

ومن اجل $x>0$ (c_1)فوق (c_2)

ب)

0.5



II-

-1

لدينا مما سبق

0.5

$$f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n-e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f'_n(x)=-\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}-\frac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}}=-(f_n(x)+n\times f_{n+1}(x))$$

$$f'_n(x)=-(f_n(x)+n\times f_{n+1}(x))$$

-2

0.25

أ) لدينا $I_{n+1}-I_n=\int_0^1[f_{n+1}(x)-f_n(x)]dx<0$ لان $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ من اجل $x>0$

0.25

وبالتالي تكامل دالة سالبة هو عدد سالب ومنه I_n متناقصة

ب) إستنتاج ان I_n متقاربة

-3

0.25

أ) $0\le x\le 1\Leftrightarrow e^{-1}\le e^{x}\le 1\Leftrightarrow\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\le f_n(x)\le\frac{1}{(1+x)^n}$

0.25	ب) مما سبق $\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(1+x)^n}dx \le \int_0^1 f_n(x)dx \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n}dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{1-n}[(1+x)^{1-n}]_0^1 \le I_n \le \frac{1}{1-n}[(1+x)^{1-n}]_0^1$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n-1}[1-\frac{1}{2^{n-1}}] \le I_n \le \frac{1}{n-1}[1-\frac{1}{2^{n-1}}]$
0.5	ج) بإستعمال الحصر نجد النهاية $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ -4 أ)
0.5	$f'_n(x) = -(f_n(x) + n\times f_{n+1}(x)) \Leftrightarrow \int_0^1 f'_n(x).dx = -\int_0^1 [f_n(x) + nf_{n+1}(x)]dx$ $\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{2^n} - 1 = -(I_n + n.I_{n+1}) \Leftrightarrow I_n + n.I_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$
0.25	ب) $\lim_{n\to+\infty} n.I_n = 1$
0.25	ج) حساب مساحة الحيز

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تقرت

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي

ثانوية : الحسن بن الهيثم النزلة

دورة: ماي 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة :4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل العدد 0 ، وخمس كريات سوداء تحمل العدد -3 ، وكريتين حمراوتين تحملان العدد α (حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$) ، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينـها عند اللمس

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد

1. أحسب إحتمال الأحداث الأتية : A : " الحصول على كريتين من نفس اللون "
B : " الحصول على كريتين جداء الأعداد المسجلة عليها معدوم " ، C : " سحب كريتين حمراوين على الأكثر "
2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ، مجموع العددين المسجلين على الكريتين
عرف قانون إحتمال للمتغير العشوائي X
3. بين أن : $E(X) = \frac{2}{5}\alpha - 3$
4. عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي α حتى يكون $E(X) > 0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z) = z^3 - 8$

1. تحقق أن : $z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$
2. إستنتج كل حلول المعادلة $P(z) = 0$

II- نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللواحق

$z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2$ على الترتيب

1. أكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي
2. إستنتج أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة (يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها)
3. بين أن : $z_A{}^{2023} = 2^{2022} z_A$ ، ثم إستنتج مايلي : $(z_A{}^{2023} + z_B{}^{2023} + z_C{}^{2023})$
4. أكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسي
5. إستنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين الثالث: (04 نقاط)

❶ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (E) ... $3x - 2y = 1$

❷ أ/ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E)

ب/ إستنتج أن العددان $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما

❸ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n + 1$ و $21n + 4$

أ/ عين القيم الممكنة للعدد d

ب/ بين أنه إذا كان $d = 13$ فإن $n \equiv 6[13]$

❹ من أجل كل عدد طبيعي nحيث $n \geq 2$ نضع $A = 21n^2 - 17n - 4$ ، $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

أ/ بين أن العددين A و B يقبلان في $\mathbb{Z}$ القسمة على $n - 1$

ب/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$.

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❷ أحسب $g(0)$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

II- f الدالة المعرفة على المجال$]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ،(C_f)تمثيلها البياني في معلم $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ أحسب النهايتين$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$و$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ/ إستنتج أنه إذا كان $x \in [0; 4]$ فإن : $f(x) \in [0; 4]$

❸ أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ)

❹ أرسم (Δ) و (C_f)

III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ بإستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1، u_2 و u_3

❷ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

❸ أ/ بين أن (u_n) متناقصة ، ثم إستنتج أنها متقاربة

ب/ أحسب نهاية u_n

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء

ويحتوي صندوق U_2 على 3 كرات حمراء و كرية سوداء و كرية بيضاء

أولا : نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع 3 كرات من الصندوق U_1

❶ شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية

❷ أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، A : " الحصول على 3 كرات حمراء " B : " الحصول على كرية حمراء على الأقل "

ثانيا : نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2

❶ علما أن الكرة المسحوبة من U_2 سوداء ما هو إحتمال سحب كرية حمراء على الأقل

❷ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ برر أن قيم X هي 0 و 1

ب/ أحسب الأمل الرياضي ، ثم إستنتج $E(1444X + 2023)$

جـ/ أحسب $P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0)$

❸ نضيف n كرة سوداء إلى الصندوق U_1 و n كرة حمراء إلى الصندوق U_2

نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2

لتكن الحادثة C : " الحصول على كرتين من نفس اللون " . عين قيمة n حتى يكون $P(C) = \frac{3}{7}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{2^n+3n-1}{2}$ ، $v_n = \frac{2^n-3n+1}{2}$ على الترتيب

❶ أحسب الحدود u_0 و u_1 و u_2 ، v_0 ، v_1 ، v_2

❷ لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = u_n - v_n$

أ/ أثبت أن (w_n) متتالية حسابية معينا أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب المجموع $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_{10}$

❸ لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $t_n = u_n + v_n$

أ/ أثبت أن (t_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب المجموع $S' = t_0 + t_1 + \cdots + t_{10}$

❹ ليكن : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ ، $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$

أ/ تحقق أن : $S = S_1 - S_2$ ، و $S' = S_1 + S_2$

ب/ إستنتج قيمة كل من S_1 و S_2

التمرين الثالث: (05 نقاط)

❶ أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7

ب/ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2 \times 2019^{6n+4}$ على 7

❷ نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (E) ... $343x - 648y = 76$

أ/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

❸ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E)

أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d

ب/ عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$

❹ λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي التعداد 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ، جد العددين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x + e^x$

❶ أدرس إتجاه تغير الدالة g

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.57 < \alpha < -0.56$

❸ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x - xe^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

❷ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❸ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = e^{1-x}g(x-1)$

ب/ إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha+1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;\alpha+1]$

جـ/ شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

❺ أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha+1) = -0.4$)

❻ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $x = e^{m-1+x}$ حلين متمايزين

III- λ عدد حقيقي موجب تماما

❶ بإستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{1-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0

❷ أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$

الحل المفصل لبكالوريا التجريبية
شعبة رياضيات

الموضوع الأول :

التمرين الأول

$3B$: $0, 0, 0$

$5N$: $-3, -3, -3, -3, -3$

$2R$: α, α

عدد الحالات الممكنة للسحب

$C_{10}^{2} = \boxed{45}$

① حساب احتمال الأحداث التالية

* الحادثة A معناه سحب إما (R,R) أو (N,N) أو (B,B)

$$P(A) = \frac{C_3^2 + C_5^2 + C_2^2}{45} = \boxed{\frac{14}{45}}$$ (0,25)

* الحادثة B معناه سحب إما $(0,0)$ أو $(0,\bar{0})$

$$P(B) = \frac{C_3^1 C_7^1 + C_3^2}{45} = \boxed{\frac{24}{45}}$$ (0,25)

* الحادثة C معناه سحب إما $(\bar{R},\bar{R})$ أو $(R,\bar{R})$ أو (R,R)

$$P(C) = \frac{C_2^2 + C_2^1 C_8^1 + C_2^0 C_8^2}{45} = \boxed{1}$$ (0,25)

② قيم المتغير العشوائي X هي

$$X = \{0, -6, -3, \alpha, \alpha-3, 2\alpha\}$$ (0,25)

عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{45} = \boxed{\frac{3}{45}}$$ (0,25)

$$P(X=-6) = \frac{C_5^2}{45} = \boxed{\frac{10}{45}}$$ (0,25)

$$P(X=-3) = \frac{C_3^1 C_5^1}{45} = \boxed{\frac{15}{45}}$$ (0,25)

$$P(X=\alpha) = \frac{C_3^1 C_2^1}{45} = \boxed{\frac{6}{45}}$$ (0,25)

$$P(X=\alpha-3) = \frac{C_5^1 C_2^1}{45} = \boxed{\frac{10}{45}}$$ (0,25)

$$P(X=2\alpha) = \frac{C_2^2}{45} = \boxed{\frac{1}{45}}$$ (0,25)

(0,25) x_i	0	-3	-6	α	2α	$\alpha-3$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{10}{45}$

③ بين أن $E(X) = \frac{2}{5}\alpha - 3$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i P_i$$

$$= \frac{0\times 3 + (-3)(15) + (-6)(10) + 6\alpha + 2\alpha + (\alpha-3)10}{45}$$ (0,25)

$$= \frac{18\alpha - 135}{45} = \frac{18\alpha}{45} - 3 = \boxed{\frac{2}{5}\alpha - 3}$$

و . هـ . م

④ عين أصغر قيمة لـ α بحيث $E(X) > 0$

$$\frac{2}{5}\alpha - 3 > 0$$

$$\frac{2}{5}\alpha > 3$$

$$\alpha > \frac{15}{2}$$

$$\alpha \in \left]\frac{15}{2} ; +\infty\right[$$

بما أن α عدد طبيعي فإن

$$\boxed{\alpha = 8}$$

(0,25)

التمرين الثاني

I) ① التحقق

$$(z-2)(z^2+2z+4) = z^3+2z^2+4z-2z^2-4z-8$$
$$= z^3-8 \quad (0,25)$$

و . هـ . م

② استنتاج حلول $P(z)=0$ (0,75)

$z^3-8=0$ تكافئ $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

أي $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

أي $\boxed{z=2}$ أو $\boxed{z=-1-\sqrt{3}i}$ أو $\boxed{z=-1+\sqrt{3}i}$

II) ① كتابة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي

$$z_A = -1+\sqrt{3}i$$

$$|z_A| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

نضع $Arg(z_A)=\theta$ ومنه

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

ومنه

$$\boxed{z_A = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}} \quad (0,5)$$

بما أن $z_B = \overline{z_A}$ فإن

$$\boxed{z_B = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}} \quad (0,25)$$

نلاحظ أن z_C هو عدد حقيقي موجب

ومنه

$$\boxed{z_C = 2e^{2\pi i}} \quad (0,25)$$

② استنتاج أن A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة

لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C|$

أي $OA = OB = OC$ (0,5)

ومنه نستنتج أن النقاط A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$

③ تبيين أن

$$z_A^{2023} = 2^{2022} z_A$$

$$z_A^{2023} = \left(2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{2023}$$

$$= 2^{2023} \times e^{\frac{4046\pi}{3}i}$$

$$= (2)^{2023} \times e^{\left(\frac{4044\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)i}$$

$$= (2)^{2023} \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 2^{2022} \times 2 \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 2^{2022} \cdot z_A \quad (0,75)$$

و . هـ . م

استنتاج $z_A^{2023} + z_B^{2023} + z_C^{2023}$ (0,75)

لدينا

$$\boxed{z_A^{2023} = 2^{2022} z_A} \;\cdots ①$$

وبما أن $z_B = \overline{z_A}$ فإن

$$\boxed{z_B^{2023} = 2^{2022} z_B} \;\cdots ②$$

لدينا أيضا

$$\boxed{z_C^{2023} = 2^{2023}} \;\cdots ③$$

$$Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3}$$

و منه ABC متقايس الأضلاع

التمرين 3

① حل في Z^2 المعادلة (E) 0,5

واضح أن (1;1) حل لـ (E)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases}$$

بالطرح نجد $3(x-1) = 2(y-1)$

$3 \mid 2(y-1)$ لكن $PGcd(3;2) = 1$

و منه حسب غوص فإن $3 \mid y-1$

$y - 1 = 3K$

$\boxed{y = 3K + 1}$

$2 \mid 3(x-1)$ لكن $PGcd(3;2) = 1$

و منه حسب غوص فإن $2 \mid x-1$

$x - 1 = 2K$

$\boxed{x = 2K + 1}$

$(x;y) = \{(2K+1 ; 3K+1)\}$ $K \in \mathbb{Z}$

② أ) تبيين أن $(14n+3 ; 21n+4)$ حل 0,25

$3x - 2y = 3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$

و . هـ . م

ب) إستنتاج أن $14n+3$ و $21n+4$ أوليان 0,5

بما أن $(14n+3 ; 21n+4)$ حل لـ (E)

أي $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$

من ① و ② و ③ نجد

$$Z_A^{2023} + Z_B^{2023} + Z_C^{2023} = 2^{2022}(Z_A + Z_C + 2)$$

$$= 2^{2022}(-1+1+2)$$

$$Z_A^{2023} + Z_B^{2023} + Z_C^{2023} = 0$$

④ كتابة L على الشكل الجبري

$$L = \frac{-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i} = \frac{-2\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} \times \frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-6\sqrt{3}i+6}{(3)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{6-6\sqrt{3}i}{12}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$ 0,25

*) كتابة L على الشكل الأسي

$$|L| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

نضع $Arg(L) = \theta_1$ و منه

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \boxed{\theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi} \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$ 0,5

⑤ طبيعة المثلث ABC 0,5

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$$

$$\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

$$AB = AC$$

Scanned by CamScanner

أي أنه يوجد عددان $u=3$ و $v=-2$ يحققان

$$u(14n+3)+v(21n+4)=1$$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددان أوليان فيما بينهما

③ أ) القيم الممكنة للعدد d

$$PGcd(21n+4;2n+1)=d$$

$d|2n+1$ و $d|21n+4$ إذن $d|(2n+1)(21)$ و $d|(21n+4)(-2)$

$$d|13$$

(0,5)

ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 أو 13

ب) بين أنه إذا كان $d=13$ فإن $n\equiv 6[13]$

$$PGcd(2n+1;21n+4)=13$$

$$\begin{cases}2n+1\equiv 0\,[13]\\ 21n+4\equiv 0\,[13]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2n+1\equiv 0\,[13]\\ 8n+4\equiv 0\,[13]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2n\equiv 12\,[13]\\ 8n\equiv 9\,[13]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2n\equiv 12\,[13]\\ 8n\equiv 48\,[13]\end{cases}$$

بالطرح

$$6n\equiv 36\,[13]$$

$$\boxed{n\equiv 6\,[13]}$$

(0,75)

لأن $PGcd(6;13)=1$

④ أ) بين أن A و B يقبلان القسمة على $n-1$

$$A=(n-1)(21n+4)$$

(0,5)

$$B=(n-1)(28n^2+20n+3)$$

ب) تعيين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B

$$PGcd(A;B)=PGcd\big((n-1)(21n+4);(n-1)(28n^2+20n+3)\big)$$

$$=(n-1)\times PGcd(21n+4;28n^2+20n+3)$$

$$=(n-1)\times PGcd\big(21n+4;(14n+3)(2n+1)\big)$$

بما أن $21n+4$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما حسب السؤال 2، ب فإن

$$PGcd(A;B)=(n-1)PGcd(21n+4;2n+1)$$

ومن السؤال ③ ⓐ وجدنا أن القيم الممكنة لـ $PGcd(21n+4;2n+1)$ هي 1 أو 13 ومنه نستنتج

$PGcd(A;B)=(n-1)\times 13$ إذا كان $n=13K+6$

$PGcd(A;B)=(n-1)\times 1$ إذا كان $n\neq 13K+6$

(1)

التمرين الرابع

$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

① تغيرات الدالة g

$\lim\limits_{x \to -1^{>}} x^2 + 2x + \ln(x+1) = \boxed{-\infty}$

لأن

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^{>}} x^2 + 2x = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^{>}} \ln(x+1) = -\infty \end{cases}$ 0,25

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2x + \ln(x+1) = \boxed{+\infty}$

لأن

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$

g تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$

و دالتها المشتقة هي

$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$

$= \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$ 0,25

بما أن $2(x+1)^2 + 1 > 0$ فإن إشارة المشتق من إشارة المقام

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	

g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ 0,25

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

حساب $g(0)$ و إستنتاج إشارة $g(x)$

$g(0) = 0^2 + 2\times 0 + \ln(0+1) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

0,25

II

$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

① حساب النهايات 0,5

$\lim\limits_{x \to -1^{>}} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \boxed{+\infty}$ ($\ln(x+1) \to -\infty$، $x+1 \to 0^{+}$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \boxed{+\infty}$ ($\frac{\ln(x+1)}{x+1} \to 0$)

② أ) بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ 0,5

$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$= 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

و هو م

ب) إتجاه تغير الدالة f

بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه

f متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ 0,25

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$	

(0,2)

ج) إستنتاج أن $f(x)\in[0;4]$ (0,1)

$x\in[0;4]$ معناه $0\le x\le 4$

وبما أن f متزايدة تماما على $[0;4]$

فإن $f(0)\le f(x)\le f(4)$

$0\le f(x)\le 4$

أي أن $f(x)\in[0;4]$

و. هـ. م

3) أ) بين أن $(\Delta): y=x$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$$ (0,1)

ومنه $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-x=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن

$x+1>0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $-\ln(x+1)$

$-\ln(x+1)\ge 0$

$\ln(x+1)\le 0$

$x+1\le 1$ (0,1)

$x\le 0$

x	-1		0	
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)

III

$$\begin{cases}u_0=4\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

2) برهن بالتراجع أن $0\le u_n\le 4$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=4$ ومنه

$0\le u_0\le 4$ (0,1)

ومنه $P(0)$ محققة

* نفرض $P(n)$ ونبرهن $P(n+1)$

لدينا $0\le u_n\le 4$

وبما أن f متزايدة على $[0;4]$

$f(0)\le f(u_n)\le f(4)$

$0\le u_{n+1}\le 4$

ومنه $P(n+1)$ محققة

و. هـ. م

3) أ) بين أن (u_n) متناقصة

لدينا مما سبق $f(x)-x\le 0$

من أجل كل $x\in[0;4]$

ومنه إذا كان $u_n\in[0;4]$

$f(u_n)-u_n\le 0$ (0,2)

إذن $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

* بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة (0,2)

3) ب) حساب نهاية u_n

الدالة f مستمرة على المجال $[0;4]$

وبما أن (u_n) متقاربة فإن

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=l$$ (0,1)

$$\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=l$$

$$f(\ell) = \ell$$

$$\ell - \frac{\ln(\ell+1)}{\ell+1} = \ell$$

$$-\frac{\ln(\ell+1)}{\ell+1} = 0$$

$$-\ln(\ell+1) = 0$$

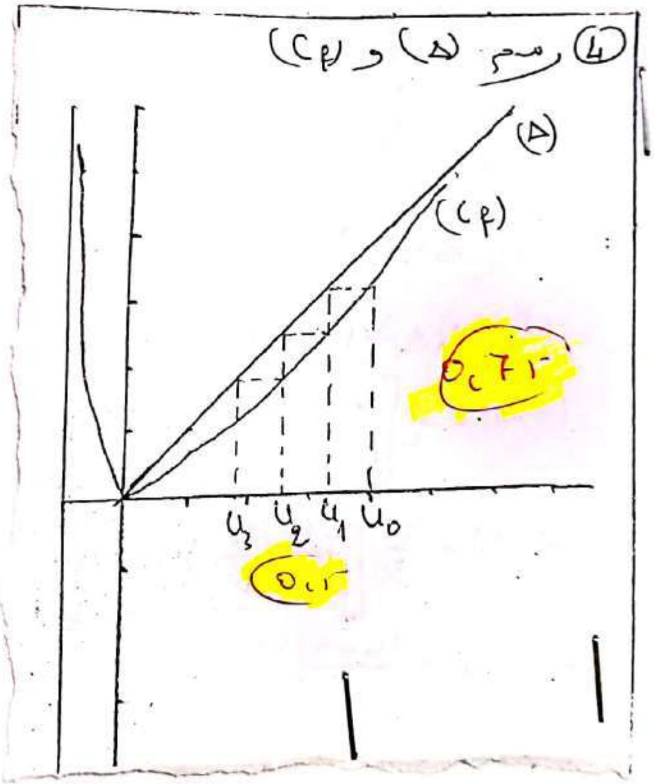
$$\ln(\ell+1) = 0$$

$$\ell + 1 = 1$$

$$\ell = 0$$

و منه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$



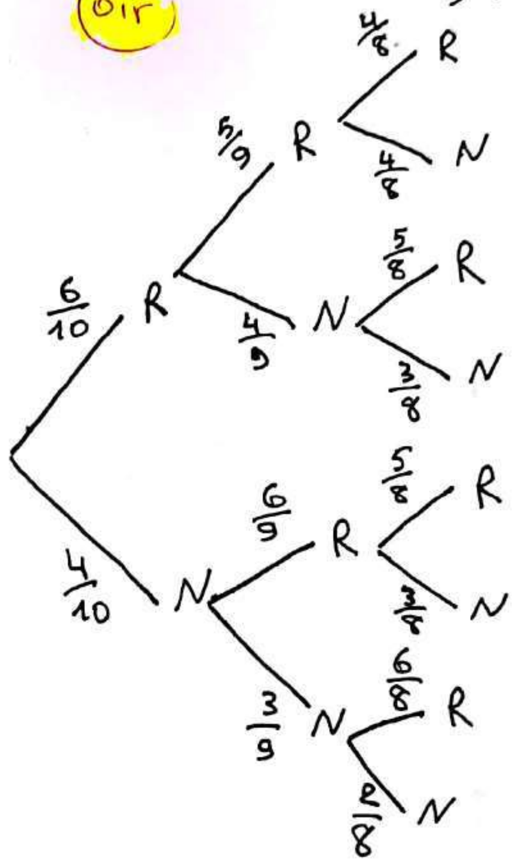
تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول :

U_1 : 6R ، 4N

U_2 : 3R ، 1N ، 1B

① شجرة الإحتمالات (0,5)



② حساب P(A) (0,25)

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

حساب P(B) (0,25)

$\overline{B}$: " عدم سحب أي كرة حمراء "

$$P(\overline{B}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720}$$

نعلم أن

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$
$$= 1 - \frac{24}{720} = \boxed{\frac{696}{720}}$$

ثانيا : عدد الحالات الممكنة

$$C_{10}^{2} \times C_{5}^{1} = \boxed{225}$$

① علما أن الكرة من U_2 سوداء ما احتمال سحب كرية حمراء على الأقل

E : " سحب كرة سوداء من U_2 "

D : " سحب كرية حمراء على الأقل "

$$P_E(D) = \frac{P(E \cap D)}{P(c)}$$

$$P(E) = \frac{C_1^1}{C_5^1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$E \cap D$: " سحب كرية سوداء من U_2 و سحب كرية حمراء على الأقل "

$(\underbrace{R.N}_{U_1}.\underbrace{N}_{U_2})$ أو $(\underbrace{R.N}_{U_1}.\underbrace{N}_{U_2})$

$$P(E \cap D) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} + \frac{C_6^2}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1}$$
$$= \frac{24}{225} + \frac{15}{225} = \boxed{\frac{39}{225}}$$

ومنه

$$P_E(D) = \frac{\frac{39}{225}}{\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{13}{15}}$$ (0,5)

③ أ) برر أن قيم X هي 0 و 1 (0,25)

الحادثة (X=0) معناه عدم سحب أي كرية بيضاء

الحادثة (X=1) معناه سحب كرية بيضاء

عرفنا قانون الاحتمال

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}\times\frac{C_4^1}{C_5^1} = \boxed{\frac{4}{5}}$$ 0,25

$$P(X=1) = \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2}\times\frac{C_1^1}{C_5^1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$ 0,25

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

0,25

ب) حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_i = 0\times\frac{4}{5} + 1\times\frac{1}{5} =$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{5}}$$ 0,25

استنتاج $E(1444X+2023)$

$$E(1444X+2023) = 1444E(X)+2023$$
$$= 1444\times\frac{1}{5}+2023$$
$$= \boxed{2311,8}$$ 0,25

ج) حساب $P\left((\ln x)^2 - \ln x \leq 0\right)$ 0,5

نقوم أولا بحل المتراجحة

$$(\ln x)^2 - \ln x \leq 0$$
$$\ln x(\ln x - 1) \leq 0$$

x	0		1		e^1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x(\ln x-1)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$[1;e]$$

ومنه قيم المتغير التي تنتمي إلى $[1;e]$

هي $x=1$ ومنه

$$P\left((\ln x)^2 - \ln x \leq 0\right) = P(X=1) = \boxed{\frac{1}{5}}$$

3) عين قيمة n بحيث $P(C)=\frac{3}{7}$ 0,25

$$P(C) = \frac{C_6^1}{C_{n+10}^1}\times\frac{C_{n+3}^1}{C_{n+5}^1} + \frac{C_{n+4}^1}{C_{n+10}^1}\times\frac{C_1^1}{C_{n+5}^1}$$

$$= \frac{6}{n+10}\times\frac{n+3}{n+5} + \frac{n+4}{n+10}\times\frac{1}{n+5}$$

$$= \frac{6n+18}{n^2+15n+50} + \frac{n+4}{n^2+15n+50}$$

$$= \frac{7n+22}{n^2+15n+50} = \frac{3}{7}$$

$$3n^2+45n+150 = 49n+154$$

$$3n^2-4n-4=0$$

$$\Delta = (-4)^2-4(3)(-4) = 64 > 0$$

$$\boxed{n_1 = 2}$$

$n_2 = -\frac{2}{3}$ (مرفوض)

التمرين الثاني :

① حساب الحدود

$u_0 = 0 \; ; \; u_1 = 2 \; ; \; u_2 = \frac{9}{2}$ (0,75)

$v_0 = 1 \; ; \; v_1 = 0 \; ; \; v_2 = -\frac{1}{2}$

② 1) إثبات أن (w_n) حسابية (0,25)

$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$= \frac{2^{n+1} + 3(n+1) - 1}{2} - \frac{2^{n+1} - 3(n+1) + 1}{2}$

$= \frac{\cancel{2^{n+1}} + 3n + 3 - 1 - \cancel{2^{n+1}} + 3n + 3 - 1}{2}$

$= \frac{6n + 4}{2} = \boxed{3n+2}$

$\boxed{w_{n+1} = 3n+2}$

لدينا $w_n = u_n - v_n = \frac{2^n + 3n - 1}{2} - \frac{2^n - 3n + 1}{2}$

$= \frac{2^n + 3n - 1 - 2^n + 3n - 1}{2}$

$w_n = \frac{6n - 2}{2} = \boxed{3n-1}$

ومنه

$w_{n+1} - w_n = 3n + 2 - (3n - 1)$

$= 3n + 2 - 3n + 1$

$w_{n+1} - w_n = 3$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها 3

حدها الأول

$w_0 = u_0 - v_0 = 0 - 1 = \boxed{-1}$

$\boxed{w_n = 3n - 1}$

ب) حساب المجموع

$S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$

$S = \frac{11}{2}(w_0 + w_{10}) = \frac{11}{2}(-1 + 29)$

$\boxed{S = 154}$ (0,5)

③ 1) إثبات أن (t_n) هندسية (0,25)

$t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$

$= \frac{2^{n+1} + 3(n+1) - 1}{2} + \frac{2^{n+1} - 3(n+1) + 1}{2}$

$= \frac{2 \times 2^{n+1}}{2} = 2^{n+1}$

$\boxed{t_{n+1} = 2^{n+1}}$

لدينا

$t_n = u_n + v_n = \frac{2 \times 2^n}{2} = \boxed{2^n}$

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \boxed{2}$

ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها 2

حدها الأول $\boxed{t_0 = 1}$

ب) حساب المجموع (0,25)

$S' = 1\left[\frac{2^{11} - 1}{2 - 1}\right] = 2^{11} - 1 = \boxed{2047}$

④ 1) تحقق أن $S' = S_1 - S_2$ (0,25)

$S_1 - S_2 = (u_0 + u_1 + \dots + u_{10}) - (v_0 + v_1 + \dots + v_{10})$

$= (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + \dots + (u_{10} - v_{10})$

$= w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$

$= S$

و . صدام

Scanned by CamScanner

للعدد 3^n على 7 تشكل متتالية دورية دورها 6K

$n=$	6K	6K+1	6K+2	6K+3	6K+4	6K+5
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5

ومنه البواقي هي 5,4,6,2,3,1 (0,25)

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية ل $2\times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2}$ على 7

لدينا
$$2019 \equiv 3 [7]$$
ومنه
$$\boxed{2019^{6n+4} \equiv 4 [7]}$$
لدينا أيضا
$$2017 \equiv 1 [7]$$
$$2017^{4n+2} \equiv 1^{4n+2} [7]$$
$$\boxed{2017^{4n+2} \equiv 1 [7]}$$
$$2\times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2} \equiv (2\times 4+1) [7]$$
$$\equiv 2 [7]$$
إذن باقي القسمة هو 2 (0,5)

② نبين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

لدينا $PGcd(343;648)=1$

وبما أن 1 يقسم 76 فإن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ (0,25)

$$S_1+S_2 = U_0+U_1+\dots+U_{10}+V_0+V_1+\dots+V_{10}$$
$$=(U_0+V_0)+(U_1+V_1)+\dots+(U_{10}+V_{10})$$
$$=W_0+W_1+\dots+W_{10}$$
$$=S' \quad (0,25)$$
و. هـ. م

ب) استنتاج قيمة كل من S_1 و S_2
$$\begin{cases} S_1-S_2=154 \\ S_1+S_2=2047 \end{cases}$$
بالجمع نجد
$$2S_1 = 2201$$
$$\boxed{S_1 = \frac{2201}{2}} \quad (0,25)$$
بالتعويض نجد
$$\boxed{S_2 = \frac{1893}{2}}$$

التمرين الثالث

① أ) بواقي قسمة 3^n على 7

$n=0$, $3^0 \equiv 1 [7]$

$n=1$, $3^1 \equiv 3 [7]$

$n=2$, $3^2 \equiv 2 [7]$ (0,25)

$n=3$, $3^3 \equiv 6 [7]$

$n=4$, $3^4 \equiv 4 [7]$

$n=5$, $3^5 \equiv 5 [7]$

$n=6$; $3^6 \equiv 1 [7]$

ومنه بواقي القسمة الإقليدية

٢. ب) حل في Z^2 المعادلة E

نلاحظ أن $(4;2)$ حلا لـ (E) ومنه

$$\begin{cases}343x-648y=76\\343(4)-648(2)=76\end{cases}$$

بالطرح نجد $343(x-4)=648(y-2)$

لدينا $343 \mid 648(y-2)$ لكن $PGcd(343;648)=1$

ومنه حسب غوص فإن $343 \mid y-2$

$y-2=343K$

$\boxed{y=343K+2}$

لدينا $648 \mid 343(x-4)$ لكن $PGcd(343;648)=1$

ومنه حسب غوص فإن $648 \mid x-4$ ومنه

$x-4=648K$

$\boxed{x=648K+4}$ 0,75

ومنه $(x;y)=\{(648K+4;343K+2)\}$ $K\in Z$

③ أ) القيم الممكنة للعدد d

$PGcd(x;y)=d$

أي $d \mid x$ و $d \mid y$ أي $d \mid 343x$ و $d \mid 648y$ أي

$d \mid 343x-648y$

$d \mid 76$

$d\in\{1,2,4,19,38,76\}$ 0,5

ب) تعيين $(x;y)$ بحيث $d=76$

$PGcd(x;y)=76$

$x\equiv 0[76]$ و $y\equiv 0[76]$ ومنه

$$\begin{cases}648K+4\equiv 0[76]\\343K+2\equiv 0[76]\end{cases}$$

$$\begin{cases}40K+4\equiv 0[76]\\39K+2\equiv 0[76]\end{cases}$$

بالطرح نجد $K+2\equiv 0[76]$

$K\equiv -2[76]$

$\boxed{K\equiv 74[76]}$

$\boxed{K=76\alpha+74}$ 0,75

$(x;y)=\{49248\alpha+47956\,;\,26068\alpha+25384\}$ $\alpha\in N$

④ إيجاد α و β

$\lambda=\overline{\beta1\alpha\beta}^{7}=\beta\times7^3+1\times7^2+\alpha\times7^1+\beta\times7^0$

$=\boxed{344\beta+7\alpha+49}$ 0,25

$\lambda=\overline{\alpha1\alpha\alpha\beta}^{5}=\alpha\times5^4+1\times5^3+\alpha\times5^2+\alpha\times5^1+\beta\times5^0$

$=\boxed{655\alpha+\beta+125}$ 0,25

$344\beta+7\alpha+49=655\alpha+\beta+125$

$343\beta-648\alpha=76$

$\alpha=343K+2$

$\beta=648K+4$

لكن $0<\alpha<5$ و $0<\beta<5$ ومنه

$\boxed{\alpha=2}\ ;\ \boxed{\beta=4}$ 0,25

كتابة λ في النظام العشري

$\lambda=655(2)+4+125$ 0,25

$\boxed{\lambda=1439}$ = ~~[illegible]~~

II

$f(x) = x - xe^{1-x}$

① حساب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x(1-e^{1-x}) = \boxed{+\infty}$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{x}{e^x} \times e^1 = \boxed{+\infty}$

② بيين أن $(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f)

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{x}{e^x} e^1\right] = 0$

ومنه $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ 0,25

الوضع النسبي:

$f(x) - x = -xe^{1-x}$

لدينا مهما يكن $x \in R$ فإن $e^{1-x} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$ 0,25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	+	0	−
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)

③ أ) بيين أن: $f'(x) = e^{1-x} g(x-1)$

$f'(x) = 1 - e^{1-x} - e^{1-x}(-x)$

$= 1 - e^{1-x} + xe^{1-x}$ 0,25

$= e^{1-x}(e^{x-1} - 1 + x)$

$= e^{1-x} \times g(x-1)$

و. هـ. م

كتابة λ في النظام ذي الأساس 6

$$\begin{array}{l} 1439 = 6 \times 239 + \boxed{5} \\ 239 = 6 \times 39 + \boxed{5} \\ 39 = 6 \times 6 + \boxed{3} \\ 6 = 6 \times 1 + \boxed{0} \\ 1 = 6 \times 0 + \boxed{1} \end{array}$$

0,5

$1439 = \overline{10355}^{6}$

التمرين الرابع

$g(x) = x + e^x$

① اتجاه تغير الدالة g 0,25

الدالة g قابلة للإشتقاق على R

$g'(x) = 1 + e^x > 0$

ومنه g متزايدة تماما على R

② بيين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-0,57; -0,56]$ و 0,25

$$\begin{cases} g(-0,57) = -0,004 \\ g(-0,56) = +0,01 \end{cases} \quad g(-0,57) \times g(-0,56) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,57 < \alpha < -0,56$

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

0,25

Scanned by CamScanner

ب) استنتاج إتجاه التغير (0,5)

$f'(x) = e^{1-x} g(x-1)$

بما أن $e^{1-x} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x-1)$

* $g(x-1) \geq 0$ من أجل كل $x-1 \geq \alpha$

أي $x \geq \alpha+1$ ومنه

f متزايدة تماما على $[\alpha+1;+\infty[$

* $g(x-1) \leq 0$ من أجل $x-1 \leq \alpha$

أي $x \leq \alpha+1$ ومنه .

f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha+1]$

ج) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$\alpha+1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha+1)$	$\nearrow +\infty$

(0,25)

4) معادلة المماس (T) عند $x_0 = 1$

$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\boxed{(T) : y = x-1}$ (0,25)

5) حساب $f(-1)$ (0,25)

$f(-1) = e^2 - 1 \simeq 6{,}38$

6) تعيين قيم m بيانيا

$e^{m-1+x} = x$

$e^m \times e^{-1+x} = x$ (0,5)

$e^m = \frac{x}{e^{-1+x}}$

$e^m = x e^{1-x}$

$-e^m = -x e^{1-x}$

$x - e^m = x - xe^{1-x}$

$f(x) = x - e^m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم $y = x - e^m$

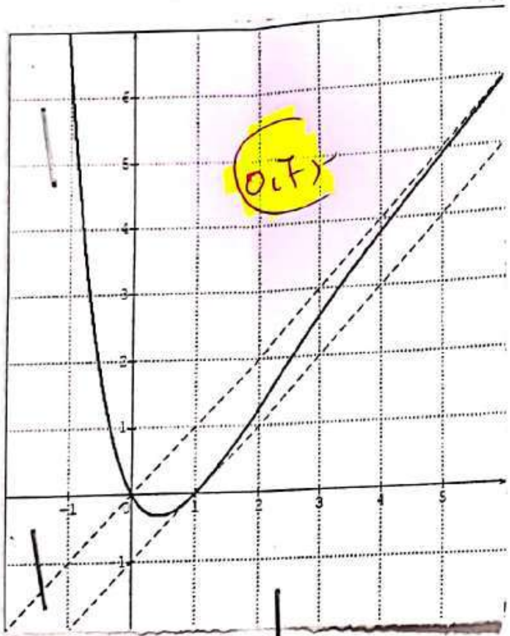
يكون للمعادلة حلين متمايزين إذا كان

$-1 < -e^m < 0$

$0 < e^m < 1$

$m \in]-\infty ; 0)$

الإنشاء :



III) التكامل بالتجزئة

$\int_0^x t e^{1-t} dt = \left[-te^{1-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{1-t} dt$

$= \left[-te^{1-t}\right]_0^x + \left[-e^{1-t}\right]_0^x$

$= \left[(-t-1)e^{1-t}\right]_0^x$

$\boxed{= (-x-1)e^{1-x} + e}$ (0,75)

2) $A(\lambda) = \int_0^\lambda (x - f(x))dx = \int_0^\lambda x e^{1-x} dx$

$\boxed{A(\lambda) = (-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e}$ (0,5)

الشعبة : رياضيات
المدة : 04 ساعات و30 د

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات
دورة ماي 2024

ثانوية : بوعزيز ربيعة (الياسمين)

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقط)

صندوق يحتوي على سبع كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1- ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1- ، 2 ، 3- . لا نميز بينهما باللمس .

1) نسحب من الصندوق بطريقة عشوائية ثلاث كرات في أن واحد ، نعتبر الحوادث A ، B و C الآتية :
A : " الحصول على ثلاث كريات أرقامها تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 2 ".
B : " الحصول على ثلاث كريات من لونين مختلفين ".
C : " الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها موجب ".
بين أن $P(A)=\frac{1}{10}$ ، ثم أحسب $P(B)$ و $P(C)$.

2) بين أن $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$ ، ثم أستنتج $P_A(B)$. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

3) نسحب الكريات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد ا الكريات المسحوبة .
أ) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3;4\}$.
ب) بين أن : $P[X=3]=\frac{7}{120}$ ، ثم عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
ج) احسب احتمال الحادثة $\left[\ln^2 X+3\ln X<4\right]$.

التمرين الثاني : (04 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على N حيث : $u_0=1$ و $u_1=\frac{1}{2}$ و $u_{n+2}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{16}u_n$.

و (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$.

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=v_0+4.v_1+4^2.v_2+\ldots\ldots+4^{n-1}.v_{n-1}$.
أ) أحسب T_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{n+1}{4^n}$.
ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) و أحسب نهايتها .

3) ليكن المجموع : $S_n=\frac{3}{u_0}+\frac{6}{u_1}+\frac{9}{u_2}+\ldots\ldots+\frac{3(n+1)}{u_n}$.
أكتب S_n بدلالة n ، ثم تحقق أن : $S_n=\frac{1-v_n}{v_n}$.

4) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .
ب) أحسب باقي قسمة كل من العددين S_{2024} و $\left(S_{2022}\right)^{1444}$ على 7.
ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق أن : $S_{3n}+4^{2n}\times u_n^2\equiv 4\,[7]$.

التمرين الثالث : (05 نقط)

1) نعتبر المعادلة (E) .... $305x-16y=594$ ذات المجهولين الصحيحين x و y.

أ) تحقق أن العددين 16 و 305 أوليان فيما بينهما ، ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) عين قيمة x حتى تكون الثنائية $(x;x-1)$ حلا للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلول المعادلة (E).

ج) عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2-y<545$.

2) أ) استنتج حلول المعادلة (E')...... $305x-16y=883$.

ب) N عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta1\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 و يكتب $\overline{\alpha104\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 حيث α و β عددان طبيعيان .

عين α و β ، ثم أكتب N في النظام العشري

3) أ) بين أن العدد 193 أولي ، ثم عين قواسم الموجبة للعدد 579 .

ب) ABC مثلث حيث $BC=l$ ، $AB=k$ و $AC=\sqrt{N-1444}$ حيث l و k عددان طبيعيان .

عين الثنائيات (l,k) حتى يكون المثلث ABC قائم في A.

4) نضع : $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$.

عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $13m-2d=579$.

التمرين الرابع : (07 نقط)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على R ب : $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ) أحسب $g'(x)$ ؛ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g'.

ب) بين أنه من أجل كل x من R ؛ $g'(x)>0$.

2) أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1,38;-1,37[$ يحقق أن : $g(\alpha)=0$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على R ب : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

و (C_f) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{I},\vec{J})$ حيث الوحدة $2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن ؛ $f'(x)=\dfrac{xe^x\times g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$.

ب) بين أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[\alpha;0]$.

ج) شكل جدول تغيراتها . (تعطى $f(\alpha)\approx0,3$)

3) بين أن : $y=\dfrac{2e}{e-1}x-\dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) أ) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) .

ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(e-1)f(x)=2ex+m$.

5) أ) بين أنه من أجل $x\in[\alpha;-1]$: $\dfrac{e^x-1}{e^x-x}<f(x)<x^2$. (نقبل أنه من أجل كل $x\in R$: $e^x>x$)

ب) A مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\alpha$ و $x=-1$.

بين أن : $\ln\left(\dfrac{2+2e^{-1}}{\alpha^2-\alpha}\right)<\text{A}<-\dfrac{1}{3}\left(\alpha^3+1\right)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقط)

يحتوي صندوق على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء متماثلة لا نفرق بينهما باللمس .
نرمي نردا غيرمزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .
إذا ظهر رقم مضاعف لعدد 3 ، نضيف كرة بيضاء الى الصندوق و نسحب عشوائيا كريتين في أن واحد.
و إذا ظهر رقم ليس مضاعف لعدد 3 ، نضيف كرة سوداء الى الصندوق و نسحب كريتين على التوالي دون إرجاع.

1) نضع أن : A " يظهر رقم مضاعف لعدد 3 "
B "الحصول على كريتين بيضاوتين" ، C "الحصول على كريتين سوداوتين" ، D "الحصول على كريتين مختلفتي اللون"
أ) انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
ب) بين أن : $P(B)=\dfrac{11}{42}$ و $P(D)=\dfrac{47}{84}$ ، ثم استنتج $P(C)$.

2) أ) أحسب احتمال الحادثة M " سحب كرية بيضاء على الأقل ".
ب) أحسب $P_M\left(\overline{A}\right)$ احتمال ظهور رقم ليس مضاعف لعدد 3 علما أننا سحبنا كرية بيضاء على الأقل.

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان التي تحملها الكريات المسحوبة .
Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.
نعرف المتغير العشوائي T حيث $T=X+Y$.
أ) برر أن قيم المتغير العشوائي T هي $\{1\ ;\ 3\}$.
ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي T ، ثم احسب الانحراف المعياري $\delta(T)$.

التمرين الثاني : (04 نقط)

1) أ) عين الجذران التربيعيان للعدد المركب i .
ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $\left(Z^2-i\right)\left(Z^2-\sqrt{3}Z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب
$Z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ و $Z_C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
أكتب العدد ين Z_A و Z_B على الشكل الأسي ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق أن : $\left(Z_A\right)^n=\left(Z_B\right)^n$.

3) أ) عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overline{OA};\overline{OB}\right)$ ، ثم استنتج أن B هي صورة A بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .
ب) نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|Z|=\left|\overline{Z}-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right|$.
عين طبيعة المجموعة (Γ) ، ثم عين صورتها بالدوران r .

4) أ) نعتبر العدد المركب $L=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. بين أن $L^2=Z_C$ ، ثم عين الطويلة و عمدة للعدد المركب L^2 .
ب) عين الطويلة و عمدة للعدد المركب L ، ثم استنتج أن $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$.

التمرين الثالث : (05 نقط)

1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.
ب) استنتج رقم الأحاد للعدد $\left(1447^{1446}+2023^{2024}\right)$.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن ، $2023n\times1999^n+1447^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}\,[10]$.
ب) عين قيم العدد الطبيعي n حيث n فردي و $2023n\times1999^n+1447^{2n+1}\equiv 2\,[10]$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 2n^2 - 2$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N ب : $v_n = u_n + n^2 + n$.

بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 ، ثم عين عبارة v_n و u_n بدلالة n.

4) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $2 \times 3^n > n + 1$.

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

5) نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن ، $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

أ) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

بين إن : $S_n = \dfrac{1}{3}\left(3^{n+2} - n^3 - 3n^2 - 2n - 3\right)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3S_{4n} + 4\left(n^3+1\right) - 2n(n+1) \equiv 0[10]$.

التمرين الرابع : (07 نقط)

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ ب : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ؛ ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ) بين إن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$.

(II) f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ ب : $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

و (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

1) أ) بين أن $\lim\limits_{x \to^{>} -1} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ؛ ثم فسر النتيجتين هندسيا

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$.

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ ؛ ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أرسم المنحنى (C_f). (نقبل أن $f(\alpha) \approx 3,16$) .

3) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة جد ، $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

4) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ ب : $k(x) = \dfrac{e}{1-|x|} + \dfrac{\ln(1-|x|)}{(|x|-1)^2}$ و (C_k)منحناها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أن الدالة k زوجية .

ب) بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ؛ ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k) .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $k(x) = m$.

انتهى بالتوفيق

التمرين (01) (04 نقاط)

الكيس: $(3, 3, 2, 2, -1, -1, -1)\ 7B$; $(-3, 2, -1)\ 3R$

1) عدد الحالات الكلية: $C_{10}^3 = 120$ (0,25)

$$P(A) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1}{120} \quad \{-3, -1, 1\},\ \{-1, 1, 3\}$$

(0,5) $$P(A) = \frac{4+8}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

(0,5) $$P(B) = \frac{C_7^2 \times C_3^1 + C_7^1 \times C_3^2}{120} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$$

(0,5) $$P(C) = \frac{C_7^3 + C_7^1 \times C_3^2}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

2) $$P(A \cap B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{120}$$

(0,25) $$P(A \cap B) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

(0,25) $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

ب) لدينا $P_A(B) \neq P(B)$

(0,25) ج) لدينا $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$

إذن الحادثتان A و B غير مستقلتان

تصحيح الموضوع (01)

3) أ)

$X = 1 \longleftarrow B$

(0,25) $X = 2 \longleftarrow R$ ثم B

$X = 3 \longleftarrow R$ ثم R ثم B

$X = 4 \longleftarrow R$ ثم R ثم R ثم B

إذن $X = \{1, 2, 3, 4\}$ (0,5)

ب) (0,25) $$P(X=3) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{120}$$

(0,25) $$P(X=1) = \frac{7}{10}$$

(0,25) $$P(X=2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

(0,25) $$P(X=4) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} = \frac{1}{120}$$

ج) (0,25) $P\left[\ln^2 x + 3\ln x - 4 < 0\right]$

المتراجحة محققة من أجل $x = 1$ و $x = 2$

(0,25) $$P\left[\ln^2 x + 3\ln x - 4 < 0\right] = P(X=1) + P(X=2) = \frac{14}{15}$$

التمرين (02) (04 نقاط)

1) (0,25) $$V_{n+1} = U_{n+2} - \frac{1}{4} U_{n+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} U_{n+1} - \frac{1}{16} U_n - \frac{1}{4} U_{n+1}$$

(0,5) $$V_{n+1} = \frac{1}{4} U_{n+1} - \frac{1}{16} U_n = \frac{1}{4}\left(U_{n+1} - \frac{1}{4} U_n\right)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n$$

إذن (V_n) م.هـ أساسها $\frac{1}{4}$

(0,25) $$V_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

2) $$T_n = V_0 + 4V_1 + 4^2 V_2 + \dots + 4^{n-1} V_{n-1}$$

أ) (0,5) $$4^{n-1} V_{n-1} = 4^{n-1} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}$$

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$$

$$T_n = \left(U_1 - \frac{1}{4} U_0\right) + 4\left(U_2 - \frac{1}{4} U_1\right) + 4^2\left(U_3 - \frac{1}{4} U_2\right) + \dots + 4^{n-1}\left(U_n - \frac{1}{4} U_n\right)$$

(0,5) $$T_n = \cancel{U_1} - \frac{1}{4} U_0 + \cancel{4U_2} - \cancel{U_1} + \cancel{4^2 U_3} - \cancel{4U_2} + \dots + 4^{n-1} U_n - \cancel{4^{n-2} U_{n-1}}$$

$$T_n = -\frac{1}{4} U_0 + 4^{n-1} U_n$$

$$\frac{n}{4} = -\frac{1}{4} + 4^{n-1} U_n$$

$$4^{n-1} U_n = \frac{n+1}{4} \Rightarrow U_n = \frac{n+1}{4^n}$$

ج) $$U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{4^{n+1}} - \frac{n+1}{4^n} = \frac{-3n-2}{4^{n+1}}$$

0.25 $U_{n+1}-U_n=-\frac{3n+2}{4^{n+1}}<0$

إذن (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

0.25 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{4^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e^{n\ln(4)}}=\frac{n\ln(4)}{e^{n\ln(4)}}\times\frac{n+1}{n\ln(4)}$ نهاية شهيرة $\frac{1}{\ln 4}$

$=0$

③ $S_n=\frac{3}{u_0}+\frac{6}{u_1}+\frac{9}{u_2}+\dots+\frac{3(n+1)}{u_n}$

0.25 $\frac{3(n+1)}{u_n}=3(n+1)\times\frac{4^n}{n+1}=3\times4^n$ م.ه

0.25 $S_n=3\times\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=4^{n+1}-1$

0.25 $\frac{1-V_n}{V_n}=\frac{1}{V_n}-1=4^{n+1}-1=S_n$

④ أ) الدور هو 3 ; من أجل كل $k\in\mathbb{N}$

0.25 $4^{3k}\equiv1[7]$, $4^{3k+1}\equiv4[7]$, $4^{3k+2}\equiv2[7]$

ب) $S_{2024}\equiv4^{2025}-1[7]$

0.25 $\equiv4^{3k}-1[7]$

$S_{2024}\equiv0[7]$

إذن باقي قسمة S_{2024} على 7 هو 0

$S_{2022}^{1444}\equiv(4^{2023}-1)^{1444}[7]$

$S_{2022}^{1444}\equiv(4^{3k+1}-1)^{1444}[7]$

$S_{2022}^{1444}\equiv3^{1444}[7]$

$S_{2022}^{1444}\equiv(-4)^{1444}[7]$

0.25 $S_{2022}^{1444}\equiv4^{3k+1}[7]$

$S_{2022}^{1444}\equiv4[7]$

إذن باقي قسمة S_{2022}^{1444} على 7 هو 4

ج) $S_{3n}+4^{2n}U_n^2\equiv4[7]$

$4^{3n+1}-1+(n+1)^2\equiv4[7]$

0.25 $4-\cancel{1}+n^2+2n+\cancel{1}\equiv4[7]$

$n^2+2n\equiv0[7]$

$n(n+2)\equiv0[7]$

$n\equiv0[7]$ أو $n+2\equiv0[7]$

0.25 $n=7k$ أو $n=7k+5$ $(k\in\mathbb{Z})$

(ح) يمكننا استعمال جدول مع كل الحالات

التمرين (03) (05 نقاط)

1) $305x-16y=594 \dots (E)$

أ)

16	19	الحاصل
1	16	305
0	$\boxed{1}$	الباقي

0.25 نلاحظ أن $PGCD(305,16)=1$ و 1 يقسم 594 إذن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

(الصفحة 02)

ج) $305x-16(x-1)=594$

0.25 $289x=578\Rightarrow x=2$

ومنه الحل الخاص هو $(2,1)$

$305x-16y=305(2)-16(1)$

$305(x-2)=16(y-1)$

16 يقسم $305(x-2)$ و 16 أولي مع 305 حسب غوص 16 يقسم $(x-2)$

0.25 $x=16k+2 \Leftarrow x-2=16k$

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد

$y=305k+1$

$(x,y)=(16k+2;305k+1)$ $(k\in\mathbb{Z})$

ج) $x^2-y<545$

$(16k+2)^2-(305k+1)<545$

$256k^2-241k-542<0$

0.25 $k=2$ أو $k=-\frac{271}{256}\approx-1,05$

$k\in\{-1,0,1\}$

0.25 $(x,y)\in\{(-14,-304);(2,1);(18,306)\}$ 0.25

2) أ) $305x-16y=883 \dots (E')$

$305x-16y=594+289$

$305x-16y=594+305-16$

0.25 $305(x-1)-16(y-1)=594$

تابع للتمرين (03)

من السؤال ① لدينا
$\begin{cases} x-1 = 16k+2 \\ y-1 = 305k+1 \end{cases}$

0,25 $(x,y) \in \{(16k+3\,;\,305k+2)\}$ $(k\in\mathbb{Z})$

ب) $N = \overline{1\alpha\beta1\alpha}^{4} = \overline{\alpha104\alpha}^{5}$ ، $0<\alpha<4$ ، $0\le\beta<4$

0,25 $321\alpha + 16\beta + 1028 = 626\alpha + 145$

$305\alpha - 16\beta = 883$

$\alpha = 16k+3$ و $\beta = 305k+2$

0,25 ومنه لما $\beta = 2$ و $\alpha = 3$

0,25 $N = 2023$

3) ج) $\sqrt{193} \simeq 13,89$

0,25 بما العدد 193 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من 13 أي 193 أولي

$579 = 3\times193$

0,25 $D_{579} = \{1, 3, 193, 579\}$

ج) $AC = \sqrt{579}$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

0,25 $k^2 + 579 = l^2 \Rightarrow l^2 - k^2 = 579$

$(l-k)(l+k) = 579$ مع $l-k < l+k$

0,5 $\begin{cases} l-k=1 \\ l+k=579 \end{cases}$ أو $\begin{cases} l-k=3 \\ l+k=193 \end{cases}$

$\begin{cases} l=290 \\ k=289 \end{cases}$ أو $\begin{cases} l=98 \\ k=95 \end{cases}$

تابع تصحيح الموضوع (01)

4) $13m - 2d = 579$

0,25 $13a'b' - 2 = \dfrac{579}{d}$

$d=1$: $13a'b' = 581$ ، $a'b' = \dfrac{581}{13}$ مرفوض

$d=3$: $13a'b' = 195$ ، $a'b' = 15$

$(a',b') \in \{(1,15),(15,1),(3,5),(5,3)\}$

0,5 $(a,b) \in \{(3,45),(45,3),(9,15),(15,9)\}$

$d=193$: $13a'b' = 5$ ، $a'b' = \dfrac{5}{13}$ مرفوض

$d=579$: $13a'b' = 3$ ، $a'b' = \dfrac{3}{13}$ مرفوض

إذن $(a,b) \in \{(3,45),(45,3),(9,15),(15,9)\}$

التمرين (04) (07 نقاط)

I) $g(x) = 2e^x - x^2 - x$

1) أ) 0,25 $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$

0,25 $g''(x) = 2e^x - 2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
تغيرات $g'(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

0,25

ب) لدينا $g'(x) \ge 1$; $x\in\mathbb{R}$ ومنه $g'(x) > 0$; $x\in\mathbb{R}$

0,25

2) 0,25 $g(-1,38) = -0,021$ و $g(-1,37) = 0,0013$

0,25 g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,38\,;-1,37]$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

ب)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

0,25

II) $f(x) = \dfrac{x^2e^x}{e^x - x}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

1) 0,5

0,25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \dfrac{x^2}{1-\frac{x}{e^x}} = +\infty$

0,25 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim \dfrac{x^2e^x}{e^x - x} = 0$

0,25 ومنه (محور الفواصل) مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

2) أ) $f'(x) = \dfrac{(x^2+2x)e^x(e^x-x) - x^2e^x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$

0,5 بعد الحسابات نجد

$f'(x) = \dfrac{xe^x\,g(x)}{(e^x-x)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $x\times g(x)$

0,25

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن f متزايدة على المجالين $]-\infty,\alpha]$ و $[0,+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[\alpha,0]$

ج)

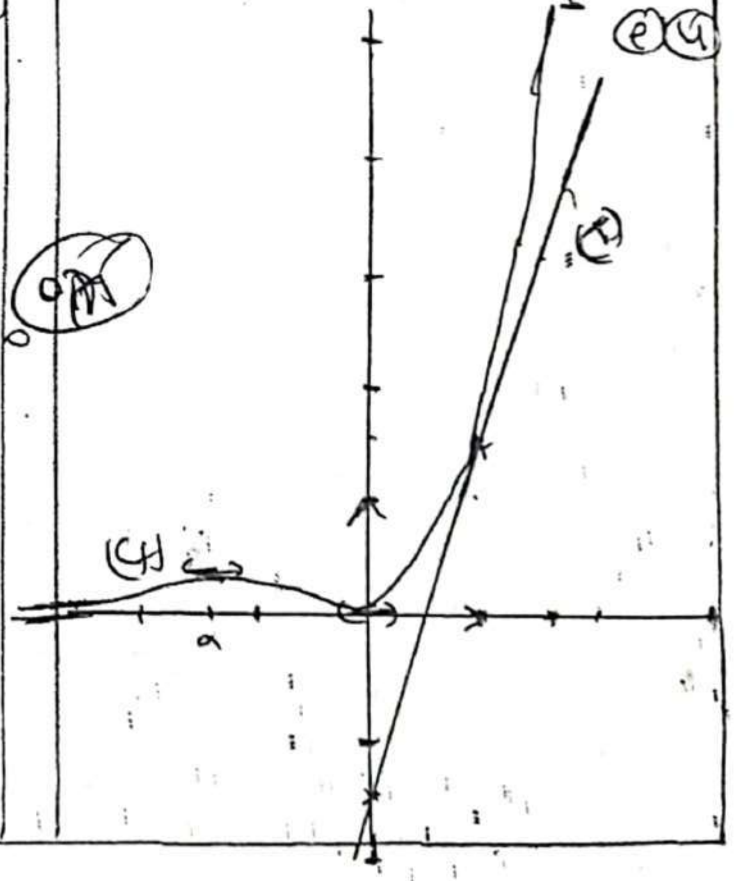
x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)\simeq 0,12$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(3) $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T): y = \frac{2e}{e-1}(x-1) + \frac{e}{e-1}$

$(T): y = \frac{2e}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$

(4) (e)



ب) $f(x) = \frac{2e}{e-1}x + \frac{m}{e-1}$

حلول هذه المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم الذي معادلته $y = \frac{2e}{e-1}x + \frac{m}{e-1}$ الموازي لـ (T)

أ) إذا كان $\frac{m}{e-1} < -\frac{e}{e-1}$ أي $m < -e$ المعادلة لا تقبل حلول

ب) إذا كان $\frac{m}{e-1} = -\frac{e}{e-1}$ أي $m = -e$ المعادلة تقبل حلا واحدا

ج) $m > -e$ المعادلة تقبل حلين

(5) $\frac{e^x-1}{e^x-x} < f(x) < x^2 \quad x\in[\alpha,-1]$

$f(x) - x^2 = \frac{x^3}{e^x-x>0} < 0$

لدينا $x\in[\alpha,-1]$: $x^3<0$

ومنه $f(x) < x^2$ ... (1)

$f(x) - \frac{e^x-1}{e^x-x} = \frac{(x^2-1)e^x+1}{e^x-x>0} > 0$

لدينا $x\in[\alpha,-1]$ أي $x^2-1>0$ و $e^x>0$

وبالتالي $(x^2-1)e^x+1>0$

ومنه $f(x) > \frac{e^x-1}{e^x-x}$ ... (2)

إذن من (1) و (2) أي

لدينا $x\in[\alpha,-1]$: $\frac{e^x-1}{e^x-x} < f(x) < x^2$

الصفحة 04

د) $A = \int_\alpha^{-1} f(x)\,dx$

$\frac{e^x-1}{e^x-x} < f(x) < x^2$

باستعمال خواص التكامل أي

$\int_\alpha^{-1} \frac{e^x-1}{e^x-x}dx < \int_\alpha^{-1} f(x)\,dx < \int_\alpha^{-1} x^2\,dx$

$[\ln(e^x-x)]_\alpha^{-1} < A < \left[\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^{-1}$

$\ln(e^{-1}+1) - \ln(e^\alpha-\alpha) < A < -\frac{1}{3} - \frac{\alpha^3}{3}$

$\ln\left(\frac{e^{-1}+1}{e^\alpha-\alpha}\right) < A < -\frac{1}{3}(\alpha^3+1)$

لدينا $g(\alpha)=0$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha^2+\alpha}{2}$

$\ln\left(\frac{e^{-1}+1}{e^\alpha-\alpha}\right) = \ln\left(\frac{e^{-1}+1}{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}\right)$

$= \ln\left[\frac{e^{-1}+1}{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}}\right] = \ln\left[\frac{2+2e^{-1}}{\alpha^2-\alpha}\right]$

$\ln\left(\frac{2+2e^{-1}}{\alpha^2-\alpha}\right) < A < -\frac{1}{3}(\alpha^3+1)$

انتهى

التمرين (01) (04 نقاط)

1) أ) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(\bar{A})=\frac{2}{3}$

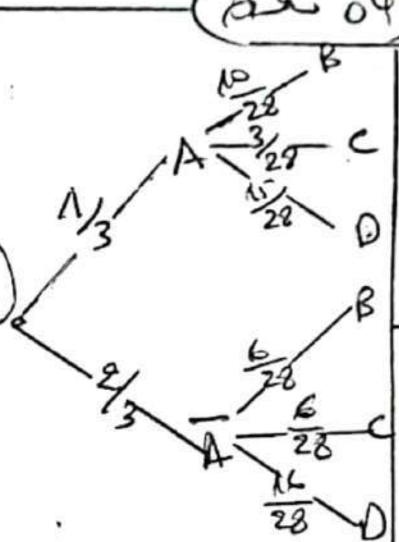
$P_A(B)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}$

$P_A(C)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$

$P_{\bar{A}}(B)=\frac{A_4^2}{A_8^2}=\frac{12}{56}$

$P_{\bar{A}}(C)=\frac{A_4^2}{A_8^2}=\frac{12}{56}$

(01)



ب) $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$

(0,1) $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{10}{28}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{28}=\frac{11}{42}$

$P(D)=P(A\cap D)+P(\bar{A}\cap D)$

(0,1) $P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{15}{28}+\frac{2}{3}\times\frac{16}{28}=\frac{47}{84}$

(0,1) $P(C)=1-(P(B)+P(D))=\frac{5}{28}$

2) أ) $M=B\cup D$

(0,2) $P(M)=P(B)+P(D)=\frac{69}{84}=\frac{23}{28}$

ب) (0,2) $P_M(\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{44}{84}}{\frac{69}{84}}=\frac{44}{69}$

3) أ) $T=X+Y$

(0,5) $T=1+0=1 \leftarrow \{N,N\}$

$T=2+1=3 \leftarrow \{N,B\}$

$T=1+2=3 \leftarrow \{B,B\}$

تصحيح الموضوع (02)

$T=\{1;3\}$

ب) (0,2) $P(T=1)=P(C)=\frac{5}{28}$

$P(T=3)=P(M)=\frac{23}{28}$

$E(T)=\frac{74}{28}=\frac{37}{14}$

(0,2) $V(T)=\frac{212}{28}-\left(\frac{37}{14}\right)^2=\frac{115}{196}$

$\sigma(T)=\sqrt{V(T)}=\frac{\sqrt{115}}{14}\simeq 0,77$

التمرين (02) (04 نقاط)

(1) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \text{--- (1)} \\ 2xy=1 & \text{--- (2)} \\ x^2+y^2=1 & \text{--- (3)} \end{cases}$

بالجمع (1) و (3) نجد $x^2=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

بالتعويض في (2)

من أجل $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ نجد $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

من أجل $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ نجد $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب هما

$L_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$L_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$\boxed{\text{الصفحة 01}}$

ج) $i=\frac{1}{2}(2i)$

$i=\frac{1}{2}(1+i)^2$

$i=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2$

ومنه الجذران التربيعيان هما

$L_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $L_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

د) $(z^2-i)(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$

$z^2=i$ أو $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ أو $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$\Delta=-1=i^2$

$\sqrt{\Delta}=i$

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

2) $|z_A|=1$

$\begin{cases}\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\alpha)=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

(01) $z_A=e^{i\pi/6}$, $z_B=\bar{z}_A=e^{-i\pi/6}$

$(z_A)^n=(z_B)^n$ يعني $e^{in\pi/6}=e^{-in\pi/6}$

ومنه $\frac{n\pi}{6}=-\frac{n\pi}{6}+2k\pi$

$\frac{n\pi}{3}=2k\pi$ أي $n=6k$ $(k\in\mathbb{N})$

3) أ) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\arg(z_B)-\arg(z_A)=-\frac{\pi}{3}$

$1447^{1446}+2023^{2024} \equiv ?\ [10]$ (ج)

$1447^{1446}+2023^{2024} \equiv 7^{1446}+3^{2024}\ [10]$

$1447^{1446}+2023^{2024} \equiv (-3)^{1446}+3^{2024}\ [10]$

$1447^{1446}+2023^{2024} \equiv 3^{4k+2}+3^{4k}\ [10]$

$1447^{1446}+2023^{2024} \equiv 9+1\ [10] \equiv 0\ [10]$

إذن رقم آحاد العدد $(1447^{1446}+2023^{2024})$ هو 0 (0.25)

$2023m\times1999^{m}+1447^{2n+1} \equiv (m-1)3^{2n+1}\ [10]$

$2023m\times1999^{m}+1447^{2n+1} \equiv 3m\times9^{m}+(-3)^{2n+1}\ [10]$

$\equiv 3m\times3^{2m}-3^{2n+1}\ [10]$

$\equiv m3^{2n+1}-3^{2n+1}\ [10]$

$2023m\times1999^{m}+1447^{2n+1} \equiv (m-1)3^{2n+1}\ [10]$

(ب) $2023m\times1999^{m}+1447^{2n+1} \equiv 2\ [10]$ و $n=2k+1$

$(m-1)3^{2n+1} \equiv 2\ [10]$ و $n=2k+1$

$2k\times3^{4k+3} \equiv 2\ [10]$; $n=2k+1$

$14k \equiv 2\ [10]$

$2k \equiv 1\ [5] \Rightarrow k \equiv 3\ [5]$

$k=5l+3$ أي

$n=2(5l+3)+1$ ومنه

$n=10l+7 \ / \ l\in\mathbb{N}$

(3)

$V_{n+1}=U_{n+1}+(n+1)^2+n+1$

$V_{n+1}=3U_n+2n^2-2+n^2+2n+1+n+1$

$V_{n+1}=3U_n+3n^2+3n=3V_n$

$|L^2|=|Z_c|=1$

(0.25) $\arg(L^2)=\arg(Z_c)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$|L^2|=1$ أي $|L|^2=1$ (ج)

$|L|=1$

$\arg(L^2)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

(0.25) $2\arg(L)=\frac{\pi}{8}+2k\pi$

$\arg(L)=\frac{\pi}{8}+k\pi$: $\frac{\pi}{8}$ لما k زوجي ، $\frac{9\pi}{8}$ لما k فردي

بما أن $Re(L)>0$ و $Im(L)>0$ فإن

$\arg(L)=\frac{\pi}{8}$

$\tan(\frac{\pi}{8})=\frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}$

(0.25) $\tan(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$

$\tan(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{\sqrt{2+\sqrt2}}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}$

$\tan(\frac{\pi}{8})=\frac{2-\sqrt2}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=\sqrt2-1$

التمرين (03) (05 نقاط)

1) أ) بواقي قسمة 3^n على 10

الدور هو 4

(0.5) $3^{4k}\equiv1\ [10]$, $3^{4k+1}\equiv3\ [10]$

$3^{4k+2}\equiv9\ [10]$; $3^{4k+3}\equiv7\ [10]$

الصفحة 02

(1أ) $(\vec{OA},\vec{OB})=-\frac{\pi}{3}$ و $OA=OB$ فإن

(0.25) B صورة A بالدوران r مركزه O

(0.25) وزاويته $(-\frac{\pi}{3})$

(2ب)

$\frac{Z_B}{Z_A}=e^{-i\pi/3}$

$Z_B=e^{-i\pi/3}Z_A$

إذن B صورة A بالدوران r الذي زاويته $-\frac{\pi}{3}$

(ب) $|z|=|\bar{z}-\frac{\sqrt3}{2}+i\frac{1}{2}|$

$|Z_M|=|\overline{Z_M}-\frac{\sqrt3}{2}-i\frac{1}{2}|$

(0.25) $|Z_M|=|Z_M-Z_A|$

$OM=MA$

إذن (Γ) هي محور القطعة $[OA]$

(0.25) صورة (Γ) بالدوران r هو محور صورة القطعة $[OA]$ بالدوران r وهي القطعة $[OB]$

(4أ) $L=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

$L^2=\frac{2+\sqrt2}{4}-\frac{2-\sqrt2}{4}+i\frac{\sqrt2}{2}$

(0.25) $L^2=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}=Z_c$

تابع للتمرين (03)

ب) (V_n) هندسية أساسها $q=3$

0.25 $V_n = V_0 \times q^n = 2\times 3^n$

0.25 $U_n = V_n - n^2 - n = 2\times 3^n - n^2 - n$

4) أ) برهان بالتراجع أنه لكل $n\in\mathbb{N}$:

$2\times 3^n > n+1$

المرحلة 1 : نتحقق من أجل $n=0$

$2\times 3^0 > 0+1$ أي $2>1$ (محققة)

0.25 المرحلة 2 : نفرض أن $2\times 3^n > n+1$ من أجل n

ونبرهن أن $2\times 3^{n+1} > n+2$

لدينا فرضا أن $2\times 3^n > n+1$

0.25 بالضرب $\times 3$ نجد أن $2\times 3^{n+1} > 3n+3$

ومن الواضح أن $3n+3 > n+2$

إذن بالتعدي أن $2\times 3^{n+1} > n+2$

إذن لكل $n\in\mathbb{N}$: $2\times 3^n > n+1$

ب) $U_{n+1} - U_n = 2U_n + 2n^2 - 2$

$U_{n+1} - U_n = 4\times 3^n - \cancel{2n^2} - 2n + \cancel{2n^2} - 2$

$U_{n+1} - U_n = 2(2\times 3^n - n - 1) > 0$

0.25 (لأن حسب ما سبق $2\times 3^n > n+1$)

ومنه (U_n) متزايدة تماما

---

5) $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$S_n = (V_0 + V_1 + \dots + V_n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$

0.25 $- (1+2+3+\dots+n)$

$S_n = 2\times \dfrac{3^{n+1}-1}{3-1} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2}$

0.25 $S_n = 3^{n+1} - 1 - n(n+1)\left[\dfrac{2n+1}{6} + \dfrac{1}{2}\right]$

$S_n = 3^{n+1} - 1 - n(n+1)\times \dfrac{n+2}{3}$

0.25 $S_n = \dfrac{1}{3}\left[3^{n+2} - 3 - n(n+1)(n+2)\right]$

$S_n = \dfrac{1}{3}\left[3^{n+2} - n^3 - 3n^2 - 2n - 3\right]$

ج) $\underbrace{3S_{4n} + 4(n^3+1) - 2n(n+1)}_{A} \equiv 0\,[10]$

$A = 3^{4n+2} - 64n^3 - 48n^2 - 8n - 3 + 4n^3 + 4 - 2n^2 - 2n\,[10]$

0.25 $A \equiv 10 - 60n^3 - 50n^2 - 10n\,[10]$

$A \equiv 10[1 - 6n^3 - 5n^2 - n]\,[10]$

$A \equiv 0\,[10]$

التمرين (04) (07 نقاط)

I) $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$

$D_g =]-1,+\infty[$

0.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = -\infty$

0.25 $g'(x) = e + \dfrac{2}{x+1}$: لكل $x\in]-1,+\infty[$

(الصفحة (03))

---

2) $g'(x) > 0$: لكل $x\in]-1,+\infty[$

0.25 g دالة متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$

x	-1	α	$+\infty$
تغيرات $g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) ب) $g(-0{,}34) = -0{,}06$ و $g(-0{,}33) = 0{,}02$

0.25 بما أن g دالة متزايدة ومستمرة على $[-0{,}34;-0{,}33]$ وأن $g(-0{,}34)\times g(-0{,}33) < 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}34 < \alpha < -0{,}33$

ج) 0.25

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$, $]-1,+\infty[$

1) أ) 0.25 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim \dfrac{1}{x+1}\left[e + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = -\infty$

0.25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$2\times$ (0.25)

$x=-1$ مقارب عمودي لـ (C_f) ، $y=0$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ج) $f'(x) = -\dfrac{e}{(x+1)^2} + \dfrac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$

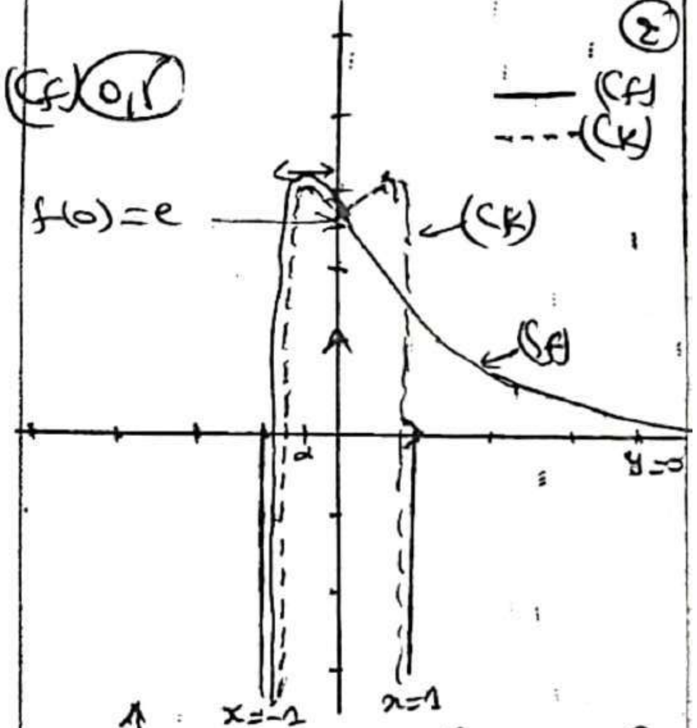
0.5 $f'(x) = \dfrac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3} = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

ج) استنتاج جدول تغيرات $f(x)$ لأن $f'(x) = -g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$

(0,1)

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات $f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha) \simeq 3{,}16$	↘	0

د) (0,1) (C_f)



3) هـ) نضع أن: $I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$

(0,25) $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ v' = \frac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x+1} \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$

$I = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx$

(0,25) $I = \left[\frac{-\ln(x+1)-1}{x+1}\right]_0^1$

(0,25) $I = \frac{-\ln(2)-1}{2} + 1 = \frac{-\ln(2)+1}{2}$

و) $S' = \int_0^1 f(x)\,dx$

$S' = \int_0^1 \frac{e}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$

(0,25) $S' = \left[e\ln(x+1)\right]_0^1 + \frac{-\ln(2)+1}{2}$

(0,25) $S' = e\ln(2) + \frac{-\ln(2)+1}{2}$

$S' = \frac{(2e-1)\ln(2)+1}{2}$

ي) $K(x) = \frac{e}{1-|x|} + \frac{\ln(1-|x|)}{(|x|-1)^2}$

$K(x) = f(-|x|)$ $\quad]-1,1[$

أ) لدينا $x \in]-1,1[$ ، $-x \in]-1,1[$

$K(-x) = K(x)$

إذا K دالة زوجية

(0,25) ب) من أجل $x \in]-1,0[$: $K(x) = f(x)$

(C_K) ينطبق على (C_f) في المجال $]-1,0]$

(0,25) ثم نكمل الرسم في المجال $[0,1[$

الصفحة (04)

بالتناظر المحور بالنسبة لمحور التراتيب لأنها دالة زوجية

ونرسم (C_K) أنظر الأشكال السابقة (0,25)

ج) $K(x) = m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_K) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$ (المستقيم الأفقي)

(0,1) $m < e$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة

$m = e$ حلين مختلفين في الإشارة، وحل معدوم

$e < m < f(\alpha)$ يوجد حلين موجبين وحلين سالبين

$m = f(\alpha)$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة

$m > f(\alpha)$ لا يوجد حلول

انتهى

أتمنى لكم النجاح في البكالوريا إن شاء الله

كوكب النُّخبة في مــادة الرياضيات - بكالوريا 2025 -

مواضيع تدريبية خاصة مِنْ إعداد الأستاذ علالو محمد

،، خاص بشعبة ريــاضيات ،،

الجزء الثاني 02

{ 05 } مواضيع تحضيرية

مرفقة بالتصحيح المفصل

تحت شعار

تعب المُراجعة أفضَل مِنْ ألمِ السُّقُوط

المنصة العلمية : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

➢ **التمرين الأول (05نقط) :**

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+2}-4$ و $2^{4n+3}-8$ و $2^{4n+4}-6$ من مضاعفات 10

3) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{n} على 10

4) استنتج رقم آحاد العدد A بحيث ؛ $A=\left(1962^{1954}+1954^{1962}-2024^{1012}\right)^{2025}$

5) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{2}\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv\left(4n^{2}+7n+5\right)[10]$

ب. استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث : $n^{2}\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv 0[10]$

➢ **التمرين الثاني (04 نقاط) :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\sin x$

1) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f^{(4)}(x)+4f(x)=0$ ، يشير $f^{(4)}$ إلى المشتق من الرتبة الرابعة للدالة f على $\mathbb{R}$

2) استنتج F دالة اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,dx$

أ. أحسب u_0

ب.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\left(e^{-\pi}+1\right)\dfrac{e^{-2n\pi}}{2}$

جـ. بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها ، هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك

4) n عدد طبيعي غير معدوم

أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$

ب. أحسب بدلالة n الجداء P_n بحيث : $P_n=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$

➢ **التمرين الثالث (04 نقط) :**

(D_1) و (D_2) حجري نرد سداسيي الأوجه، بحيث أوجه (D_1) تحمل: 0 ، 0 ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$

و أوجه (D_2) تحمل : 0 ، 0 ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$

نلقي الحجرين (D_1) و (D_2) في آن واحد ، و لتكن α و β الأعداد التي يحملها كل وجه من (D_1) و (D_2) على الترتيب

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل رمية ، العدد الحقيقي $\sin(\alpha+\beta)$

1) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

2) احسب أمله الرياضياتي ، و عين تباينه

3) أحسب $p\left(X\geq-\frac{1}{2}\right)$ و $p\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq X\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

➢ التمرين الرابع (07 نقط) :

(I) α عدد حقيقي، g_α هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g_\alpha(x)=x^2-1+\alpha\ln x$. و ليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) بين أن المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيتها

2) أدرس حسب قيم α تغيرات الدالة g_α

3) في حالة $\alpha<0$ ، نعتبر النقطة $\omega_\alpha(x_\alpha;y_\alpha)$ بحيث $g'(x_\alpha)=0$

بين أن مجموعة النقط ω_α لما يمسح α المجال $]-\infty;0[$ هي جزء من منحنى (Γ) يطلب تعيين معادلة له.

4) نفرض أن $\alpha=1$ ، و نضع $g_1=g$

أ. أنجز جدول تغيرات الدالة g

ب. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

(II) f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\frac{\ln x}{x}$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني فيالمعلم السابق

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا

2) أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له (Δ)

جـ. أدرس الوضع النسبي لكل من (C_f) و (Δ)

3) أ. بين انه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

ب.استنتج اتجاه تغير الدالة، ثم أنجز جدول تغيراتها

جـ. أرسم (Δ) و المنحنى (C_f)

4) احسب بـ cm^2 : المساحة S ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=e$ و $y=-x+1$

5) نعتبر الدالة h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=|x|-1-\frac{\ln|x|}{|x|}$. وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ.بين أن محور التراتيب محور تناظر للمنحنى (C_h) ، ثم أنشئ المنحنى (C_h) مع توضيح كيفية الإنشاء

ب.عين بيانيا ،حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة $e^{h(x)}=|m|$

انتهى

تصحيح الموضوع 01

✓ **التمرين الأول :**

1) **الطريقة الأولى :** نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

أ.من أجل $n=0$: $2^1 \equiv 2[10]$ صحيحة لأن $2^1-2=0$ ؛ مضاعف للعدد 10

ب.ليكن n عدد طبيعي كيفي :

لنفرض أن $2^{4n+1} \equiv 2[10]$ و لنبرهن أن $2^{4(n+1)+1} \equiv 2[10]$ أي أن $2^{4n+5} \equiv 2[10]$

لدينا $2^{4n+5} = 2^{4n+1} \times 2^4$ ، بما أن فرضا $2^{4n+1} \equiv 2[10]$ و $2^4 \equiv 6[10]$

فإن $2^{4n+1} \times 2^4 \equiv (2\times 6)[10]$ أي أن $2^{4n+5} \equiv 2[10]$

من أ و ب ينتج أنه أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

الطريقة الثانية: بما أن $2^4 \equiv 1[5]$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(2^4\right)^n \equiv 1[5]$ أي أن $2^{4n} \equiv 1[5]$

ومنه $2^{4n} \times 2 \equiv 2[2\times 5]$ وعليه $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n:

أ. $2^{4n+1} \equiv 2[10]$ و $2^1 \equiv 2[10]$ إذن $2^1 \times 2^{4n+1} \equiv 4[10]$ ومنه $2^{4n+2} \equiv 4[10]$

وعليه $2^{4n+2}-4$ مضاعف للعدد 10

ب. $2^{4n+2} \equiv 4[10]$ و $2^1 \equiv 2[10]$ إذن $2^1 \times 2^{4n+2} \equiv (2\times 4)[10]$ ومنه $2^{4n+3} \equiv 8[10]$

وعليه $2^{4n+3}-8$ مضاعف للعدد 10

جـ. $2^{4n+3} \equiv 8[10]$ و $2^1 \equiv 2[10]$ إذن $2^1 \times 2^{4n+3} \equiv (2\times 8)[10]$ ومنه $2^{4n+4} \equiv 6[10]$

وعليه $2^{4n+4}-6$ مضاعف للعدد 10

3) تعين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية لعدد 2^n على 10 :

من ما سبق نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k:

$2^{4k+1} \equiv 2[10]$ ، $2^{4k+2} \equiv 4[10]$ ، $2^{4k+3} \equiv 8[10]$ و $2^{4k+4} \equiv 6[10]$

حالة خاصة: $2^0 \equiv 1[10]$

4) استنتاج رقم آحاد العدد A :

تذكير : رقم آحاد أي عدد طبيعي N هو باقي قسمته على 10

لدينا : $1962 \equiv 2[10]$ إذن $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[10]$

بما أن $1954 = 4(488)+2$ فإن $1962^{1954} \equiv 4[10]$ و $1954 \equiv 4[10]$ فإن $1954^{1962} \equiv \left(2^2\right)^{1962}[10]$

أي أن $1954^{1962} \equiv 2^{3924}[10]$ و بما أن $3924 = 4(980)+4$ فإن $1954^{1962} \equiv 6[10]$ و $2024 \equiv 4[10]$

أي أن $2024 \equiv 2^2[10]$ فإن $2024^{1012} \equiv 2^{2024}[10]$ وبما أن $2024 = 4(505)+4$ فإن $2024^{1012} \equiv 6[10]$

عليه $A \equiv 4^{2025}[10]$ أي أن $A \equiv \left(2^{2025}\right)^2[10]$ وبما أن $2025 = 4(506)+1$ فإن $A \equiv (2)^2[10]$

أي أن $A \equiv 4[10]$ بالتالي رقم آحاد العدد A هو 6

5) أ. نبين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv \left(4n^2+7n+5\right)[10]$

لدينا $8 \equiv -2[10]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n: $8^{4n+2} \equiv 2^{4n+2}[10]$ إذن $8^{4n+2} \equiv 4[10]$

ومنه $n^2 \times 8^{4n+2} \equiv 4n^2[10]$.

$6 \equiv -4[10]$ ومنه $6^{2n+1} \equiv -\left(2^2\right)^{2n+1}[10]$ أي أن $6^{2n+1} \equiv -2^{4n+2}[10]$

ومنه $6^{2n+1} \equiv -4[10]$ ينتج $9n \times 6^{2n+1} \equiv -6n[10]$ ، كذلك $9 \equiv -1[10]$ ومنه $9^{2n} \equiv 1[10]$

ينتج $n \times 9^{2n} \equiv n[10]$ و بالتالي $n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv \left(4n^2 + 7n + 5\right)[10]$

ب. استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث: $n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv 0[10]$

لتعيين قيم n بحيث $n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv 0[10]$ يكفي تعين قيم n

بحيث $4n^2 + 7n + 5 \equiv 0[10]$ لأن $n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv \left(4n^2 + 7n + 5\right)[10]$

بما كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل $n = 10k + r$ مع $k \in \mathbb{N}$ و $r \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

لنضع $B = 4n^2 + 7n + 5$ ، الجدول التالي يلخص بواقي قسمة B على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$[10]$
$4n^2 \equiv$	0	4	6	6	4	0	4	6	6	4	$[10]$
$7n \equiv$	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	$[10]$
$B \equiv$	5	6	5	2	7	0	1	0	7	2	$[10]$

وعليه $4n^2 + 7n + 5 \equiv 0[10]$ إذا وفقط إذا كان $n \equiv 5[10]$ أو $n \equiv 7[10]$ و بالتالي

$n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv 0[10]$ إذا وفقط إذا كان $n \equiv 10\alpha + 5$ أو $n \equiv 10\alpha + 7$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

✓ <u>**التمرين الثاني**</u> :

1) نبين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$:

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$
- الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(-\cos x - \sin x)$

ومنه $f''(x) = -2e^{-x}\cos x$

- الدالة f'' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f^{(3)}(x) = 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x$

ومنه $f^{(3)}(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$

- الدالة $f^{(3)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f^{(4)}(x) = -2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x}(-\sin x + \cos x)$

ومنه $f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\sin x$

و عليه $f^{(4)}(x) + 4f(x) = -4e^{-x}\sin x + 4e^{-x}\sin x$ أي أن $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$

2) استنتاج F دالة اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x)$

وعليه $F(x)=-\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$ و بالتالي $F(x)=-\frac{1}{4}\left[2e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]$ ومنه $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,dx$

أ. حساب u_0 :

إن $u_0=\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ ومنه $u_0=\left[F(x)\right]_0^{\pi}$ إذن $u_0=F(\pi)-F(0)$ بعد الحساب نجد :

$$u_0=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$$

ب.نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\left(e^{-\pi}+1\right)\frac{e^{-2n\pi}}{2}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,dx$ ومنه $u_n=\left[F(x)\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$

إذن $u_n=-\frac{1}{2}e^{-(2n+1)\pi}\left(\cos(2n+1)\pi+\sin(2n+1)\pi\right)+\frac{1}{2}e^{-(2n)\pi}\left(\cos(2n)\pi+\sin(2n)\pi\right)$

وبما أن $\cos(2n+1)\pi=-1$ و $\cos(2n)=1$ و $\sin(2n+1)\pi=0$ و $\sin(2n)\pi=0$

فإن $u_n=\frac{1}{2}e^{-(2n+1)\pi}+\frac{1}{2}e^{-(2n)\pi}$ ومنه $u_n=\frac{1}{2}e^{-(2n)\pi}\times e^{-\pi}+\frac{1}{2}e^{-(2n)\pi}$ نجد أن $u_n=\left(e^{-\pi}+1\right)\frac{e^{-2n\pi}}{2}$

جـ. نبين أن المتتالية (u_n) هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\left(e^{-\pi}+1\right)\frac{e^{-2(n+1)\pi}}{2}$ ومنه $u_{n+1}=\frac{\left(e^{-\pi}+1\right)e^{-2(n)\pi}}{2}\times e^{-2\pi}$

إذن $u_{n+1}=u_n\times e^{-2\pi}$ وعليه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=e^{-2\pi}$

* بما أن $0<e^{-2\pi}<1$ فإن (u_n)متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) أ. حساب بدلالة n المجموع S_n بحيث : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$

إن S_n هو مجموع n حد متتابع من المتتالية الهندسية (u_n) و عليه $S_n=u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

ومنه $S_n=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)\left(\frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right)$ أي أن $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{\left(1-e^{-\pi}\right)\left(e^{-\pi}+1\right)}\right)\left(1-e^{-2n\pi}\right)$

نجد أن $S_n=\frac{1-e^{-2n\pi}}{2\left(1-e^{-\pi}\right)}$

ب. حساب بدلالة n الجداء P_n بحيث : $P_n=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$

لدينا $P_n=u_0\times q^0\times u_0\times q^1\times u_0\times q^0\times\ldots\times u_0\times q^{(n-1)}$

ومنه $P_n=(u_0)^n\times q^{0+1+2...+(n-1)}$ و بما أن $0+1+2...+(n-1)=\frac{n}{2}(n-1)$

فإن $P_n=\left(\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\right)^n\times\left(e^{-2\pi}\right)^{\frac{n}{2}(n-1)}$ أي أن $P_n=\frac{(e^{-\pi}+1)^n}{2^n}\times e^{-\pi n(n-1)}$

✓ **التمرين الثالث :**

1) تعيين قيم المتغير العشوائي X : نستعن بالجدول التالي الذي يمثل $\sin(\alpha+\beta)$ من أجل كل α و β ناتج عن التجربة

$\alpha \backslash \beta$	0	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$

ومنه مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\left\{-1;\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2};0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$

تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$p(X=-1)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ ، $p\left(X=\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ ، $p\left(X=\frac{-1}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ ، $p(X=0)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$p\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ ، $p\left(X=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ ، $p(X=1)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

الجدول التالي يلخص النتائج المحصل عليها :

$(X=x_i)$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2) حساب الأمل الرياضياتي :

لدينا $E(X)=\left((-1)\times\frac{1}{9}\right)+\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{9}\right)+\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{9}\right)+\left(0\times\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{9}\right)+\left(1\times\frac{2}{9}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{1}{6}$

- **حساب التباين:** إن $V=E(X^2)-(E(X))^2$

لدينا $E(X^2)=\left((-1)^2\times\frac{1}{9}\right)+\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{9}\right)+\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{9}\right)+\left(0^2\times\frac{1}{9}\right)+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{9}\right)+\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{9}\right)+\left((1)^2\times\frac{2}{9}\right)$

ومنه $E\left(X^2\right)=\frac{7}{12}$ إذن $V=\frac{7}{12}-\frac{1}{36}$ ومنه $V=\frac{5}{9}$

3) أ. حساب $p\left(X\geq -\frac{1}{2}\right)$: $p\left(X\geq -\frac{1}{2}\right)=p\left(X=-\frac{1}{2}\right)+p\left(X=0\right)+p\left(X=\frac{1}{2}\right)+p\left(X=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+p\left(X=1\right)$

ومنه $p\left(X\geq -\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}$ أي أن $p\left(X\geq -\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{9}$

ب. حساب $p\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\leq X\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **:**

$$p\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\leq X\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=p\left(X=\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+p\left(X=\frac{-1}{2}\right)+p\left(X=0\right)+p\left(X=\frac{1}{2}\right)+p\left(X=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ومنه $p\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\leq X\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}$ أي أن $p\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\leq X\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}$

✓ **التمرين الرابع :**

(I) 1) نبين أن المنحنيات (C_α) تمر من نقطة ثابتة ω :

نعتبر α و β عددان حقيقيان بحيث $\alpha\neq\beta$ ، نعتبر $M\left(x;y\right)$ نقطة من المستوي

$M\in\left(C_\alpha\right)\cap\left(C_\beta\right)$ تكافئ $x\in\left]0;+\infty\right[$ و $g_\alpha\left(x\right)=g_\beta\left(x\right)$

لدينا $g_\alpha\left(x\right)=g_\beta\left(x\right)$ تكافئ $x^2-1+\alpha\ln x=x^2-1+\beta\ln x$

ومنه $g_\alpha\left(x\right)=g_\beta\left(x\right)$ تكافئ $(\alpha-\beta)\ln x=0$ وعليه $M\in\left(C_\alpha\right)\cap\left(C_\beta\right)$ تكافئ $x\in\left]0;+\infty\right[$ و $(\alpha-\beta)\ln x=0$

بما أن $\alpha\neq\beta$ فإن $M\in\left(C_\alpha\right)\cap\left(C_\beta\right)$ تكافئ $x\in\left]0;+\infty\right[$ و $\ln x=0$ ، نجد أن $x=1$

و بالتالي المنحنيات (C_α) تمر من النقطة الثابتة $\omega(1;0)$ ، لأن $g_\alpha(1)=0$

2) دراسة تغيرات الدالة g_α :

أ. حساب النهايات :

* إذا كان $\alpha=0$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g_\alpha\left(x\right)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha\left(x\right)=+\infty$

* إذ اكان $\alpha<0$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g_\alpha\left(x\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}+\alpha\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

* إذ اكان $\alpha>0$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g_\alpha\left(x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha\left(x\right)=+\infty$

ب. الدالة g_α قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0;+\infty\right[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق عليه هما :

$x\mapsto x^2-1$ و $x\mapsto\alpha\ln x$ و لدينا من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$: $g'_\alpha\left(x\right)=2x+\frac{\alpha}{x}$

إذن من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$: $g'_\alpha\left(x\right)=\frac{2x^2+\alpha}{x}$

بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'_\alpha\left(x\right)$ من إشارة $2x^2+\alpha$ وعليه :

- إذا كان $\alpha=0$ فإن من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$: $2x^2>0$ وبالتالي من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$: $g'_\alpha\left(x\right)>0$
  وعليه الدالة g_α متزايدة تماما على $\left]0;+\infty\right[$

- إذا كان $\alpha<0$ فإن $2x^2+\alpha=0$ تكافئ $x^2=\frac{-\alpha}{2}$ و بما أن $x\in\left]0;+\infty\right[$ فإن $2x^2-\alpha=0$ تكافئ $x=\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$

وإشارة $g'_{\alpha}(x)$ تعطى على النحو التالي :

x	0 $\qquad \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ $\qquad +\infty$
$g'_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

وعليه الدالة g_{α} متناقصة تماما على المجال $\left]0;\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{\frac{-\alpha}{2}};+\infty\right[$

- إذا كان $\alpha > 0$ فإن $2x^2+\alpha > 0$ وبالتالي من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'_{\alpha}(x) > 0$
وعليه الدالة g_{α} متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

جـ. جدول التغيرات :

- إذا كان $\alpha = 0$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $+$
$g_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $-1 \nearrow +\infty$

- إذا كان $\alpha < 0$:

x	0 $\qquad \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ $\qquad +\infty$
$g'_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$g_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $+\infty \searrow \beta \nearrow +\infty$

مع $\beta = g_{\alpha}\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\right)$

- إذا كان $\alpha > 0$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $+$
$g_{\alpha}(x)$	$\|\|$ $-\infty \nearrow +\infty$

4) لما $\alpha < 0$: $g'(x) = 0$ تكافئ $x = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ ومنه $x_{\omega} = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ و $y_{\omega} = g_{\alpha}\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\right)$ أي أن $y_{\omega} = \frac{-\alpha}{2} - 1 + \alpha \ln\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\right)$

5) و بما أن $\ln\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)$ فإن $y_{\omega} = \frac{-\alpha}{2} - 1 + \frac{\alpha}{2}\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)$ و بما أن $x_{\omega} = \sqrt{\frac{-\alpha}{2}}$ فإن $(x_{\omega})^2 = \frac{-\alpha}{2}$

و عليه $y_{\omega} = (x_{\omega})^2 - 1 - (x_{\omega})^2 \ln\left((x_{\omega})^2\right)$ وبالتالي لما يمسح α المجال $]-\infty;0[$ فإن النقط ω_{α} تنتمي إلى منحن (Γ) معادلته $y = x^2 - 1 - 2x\ln x$

6) نفرض أن $\alpha = 1$، و نضع $g_1 = g$

أ. أنجاز جدول تغيرات الدالة g **:**

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $+$
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty \nearrow +\infty$

ب. إن $g(1) = 0$ ، بما أن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $g(1) = 0$ فإن إشارة $g(x)$ تعطى

على النحو التالي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

(II)

1) لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-x+1) = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

ومنه المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

2) أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

ب. بما أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x) = -x+1+\dfrac{\ln x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

فإن المنحني (C_f) يقبل عند مستقيم مقارب مائل (Δ) بحيث $y = -x+1$ معادلة ديكارتية له

جـ. دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لنعين إشارة $f(x)-(-x+1)$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)-(-x+1) = \dfrac{\ln x}{x}$

و بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f(x)-(-x+1)$ من إشارة $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(-x+1)$	||	$-$	0	$+$	

ينتج لما $x \in]0;1[$: (C_f) يقع أعلى (Δ)

لما $x \in]1;+\infty[$: (C_f) يقع أسفل (Δ)

لما $x = 1$: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$

3) أ. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$ هما :

$x \mapsto -x+1$ و $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = -1+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

أي أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-(x^2-1+\ln x)}{x^2}$ ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$

ب. بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

و عليه تعطى إشارة على النحو التالي :

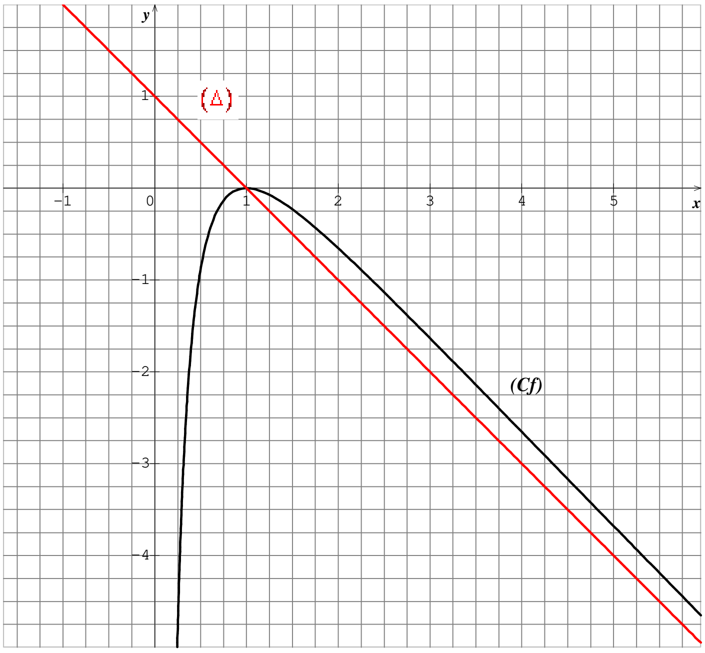
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	

ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

جـ . رسم (Δ) و المنحني (C_f):



4) إن $S=4A\ cm^2$ مع $A=\int_1^e \left(f(x)-(-x+1)\right)\,dx$

لدينا $A=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ ومنه $A=\int_1^e \frac{1}{x}\times \ln x\,dx$ أي أن $A=\int_1^e u'(x)\times u(x)\,dx$ مع $u(x)=\ln x$

ومنه $A=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$ أي أن $A=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{1}{2}$ وعليه $S=2\ cm^2$

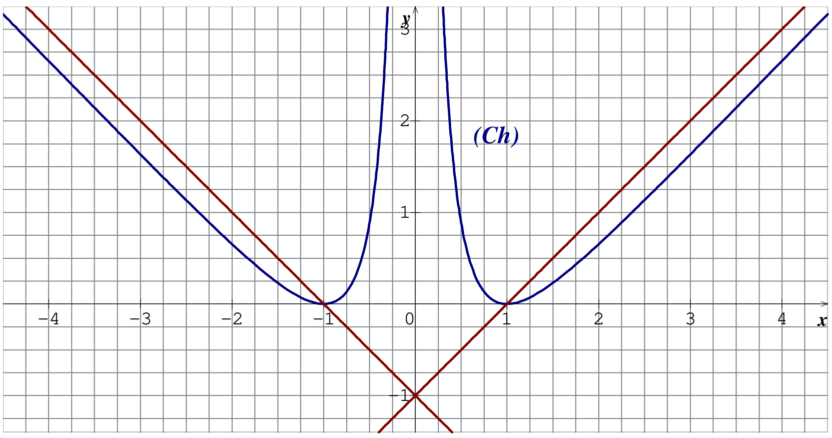
5) أ. بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $h(-x)=h(x)$

(لأن $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر ومن أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ $|-x|=|x|$)) وعليه h دالة زوجية

و بالتالي محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C_h)

إنشاء (C_h)**:** من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $h(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}=-f(x)$

ومنه في المجال $]0;+\infty[$ ، (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ثم نكمل الرسم إلى المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب



ب. $e^{h(x)}=|m|$ تكافئ $h(x)=\ln|m|$ ،بوضع $t=\ln|m|$ نجد $h(x)=t$

إن حلول المعادلة $h(x)=t$ هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) و المستقيم ذو المعادلة $y=t$ و بالتالي:

لما $t<0$ معناه $\ln|m|<0$: المعادلة لا تقبل حلول

لما $t=0$ معناه $\ln|m|=0$: للمعادلة حلين مضاعفين مختلفان في الإشارة

لما $t>0$ معناه $\ln|m|>0$: للمعادلة حلين موجبان معا و حلين سالبان معا

ينتج؛ لما $0<|m|<1$: المعادلة لا تقبل حلول

لما $|m|=1$: للمعادلة حلين مضاعفين مختلفان في الإشارة

لما $|m|>1$: للمعادلة حلين موجبان معا و حلين سالبان معا

<u>الخلاصة:</u> لما $-1<m<1$: المعادلة لا تقبل حلول

لما $m=-1$ أو $m=1$: للمعادلة حلين مضاعفين مختلفان في الإشارة

لما $m<-1$ أو $m>1$: للمعادلة حلين موجبان معا و حلين سالبان معا

<u>انتهى</u>

➢ التمرين الأول(04 نقاط) :

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

1) أ. بين أنه من أجل كل x من المجال $[1;e]$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$

ب. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2) أ. احسب u_1 عن طريق المكاملة بالتجزئة

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_{n+1} = e-(n+1)u_n$

جـ. استنتج قيمة كل من : u_2 و u_3

3) أ. بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n \geq 0$

ب. استنتج تقارب (u_n)

جـ . بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+1)u_n \leq e$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $4u_2+5u_3+\ldots+(n+2)u_n = n\times e - 2 - u_{n+1}$

➢ التمرين الثاني(05 نقاط) :

n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$. يضم كيس U_1 ، n كرة بيضاء اللون و 3 كرات سوداء اللون و يضم كيس U_2 كرتين من اللون الأبيض و كرة ذات سوداء اللون (لا نفرق بين الكرات عند اللمس)

نعتبر التجربة العشوائية (E) التالية :

نسحب عشوائيا كرة من U_1 و نضعها في U_2 ، ثم نسحب كرة من U_2 و نضعها في U_1 "

و ليكن الحدثين A و B التاليين :

A : " بعد التجربة (E) يبقى عدد الكرات في الكيسين كما كان قبل القيام بالتجربة (E) "

B : " بعد التجربة (E) الكيس U_2 يضم كرة واحدة بيضاء فقط "

1) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة العشوائية

2) بين أن احتمال الحدث A هو : $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

3) أحسب $p(B)$ احتمال الحدث B

4) يقوم لاعب بدفع 100 دينار و يقوم بالتجربة السابقة (E) و ليكن المتغير العشوائي X المعرف كما يلي :

- إذا بقي في الكيس U_2 كرة واحدة بيضاء فقط فإنه يتحصل على $2n$ دينار
- إذا بقي في الكيس U_2 كرتين من اللون الأبيض فإنه يتحصل على n دينار
- إذا بقي في الكيس U_2 ثلاث كرات من اللون الأبيض فإنه يخسر ما دفعه

أ. عين قيم المتغير العشوائي X

ب. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

جـ. عين بدلالة n ، الأمل الرياضياتي $E(X)$ ، ثم عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي حتى تكون اللعبة مربحة

➢ التمرين الثالث(04 نقط) :

1) أ. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 12 وذلك من اجل قيم n التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2} \equiv 4[12]$ و $2^{2n+3} \equiv 8[12]$

2) u_0 و q عددان طبيعيا غير معدومان، (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

عين u_0 و q بحيث: u_0 و q أوليان فيما بينهما و $2{u_0}^2 = u_1 + u_2$

3)

أ. عين عبارة u_n بدلالة n، ثم عين الأعداد الطبيعية n و التي من أجلها يكون $u_n < 10^3$

ب. عين بدلالة n المجموع S_n التالي: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$

جـ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1؛ $S_n \equiv 9[12]$

التمرين الرابع(07 نقاط) :

f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $[-4;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2\ln(1-2x) & ; x \in [-4;0] \\ f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) & ; x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = 1\ cm$

1) أ. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، وبين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$. ما ذا تستنتج ؟

ب. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

جـ. عين معادلتي المماسين (T_1) و (T_2) للمنحني (C_f) عند المبدأ

2) أ. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1+e^{-x})$

جـ. استنتج أن المنحني (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب مائل (Δ)، يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

د. أدرس الوضع النسبي لكل من (C_f) و (Δ)

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

4) أ. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجال $[-4;+\infty[$.

ب.تحقق أن أحد الحلين معدوم والآخر α حيث $-1,73 < \alpha < -1,72$

جـ. أرسم المماسين (T_1) و (T_2) و المستقيم (Δ)و المنحني (C_f)

5) أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة عين في المجال $[-4;0]$ الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \ln(1-2x)$ حيث $H(-1) = 0$

ب. أحسب بـ cm^2 ، المساحة S ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلتها :

$x = -4$ ، $x = 0$ و $y = x - \ln 2$

6) m عدد حقيقي غير معدوم، g_m الدالة العددية المعرفة على المجال $[-4;0]$ بـ: $g_m(x) = 1 + mf(x)$

نسمي (C_m) المنحنى الممثل للدالة g_m

بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيين إحداثيات كل منهما

انتهى

✓ التمرين الأول: (الكفاءات المستهدفة : توظيف الحساب التكاملي في المتتاليات العددية)

1) أ. من أجل كل عدد حقيقي x : $(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}=(\ln x)^n(1-\ln x)$

بما أن $x\in[1;e]$ فإن $0\le\ln x\le 1$ ومنه $1-\ln x\ge 0$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(\ln x)^n\ge 0$

ينتج أنه من أجل x من $[1;e]$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}\ge 0$

ب. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، لدينا : $u_n=\int_1^e(\ln x)^n\,dx$ إذن $u_{n+1}=\int_1^e(\ln x)^{n+1}\,dx$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\int_1^e(\ln x)^{n+1}\,dx-\int_1^e(\ln x)^n\,dx$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\int_1^e\left[(\ln x)^{n+1}-(\ln x)^n\right]dx$

وبما أن من أجل x من $[1;e]$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(\ln x)^{n+1}-(\ln x)^n\le 0$ فإن $\int_1^e\left[(\ln x)^{n+1}-(\ln x)^n\right]dx\le 0$

تذكير: a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$ و f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$:

إذا كان من أجل كل x من المجال $[a;b]$ ؛ $f(x)\le 0$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx\le 0$

وعليه $u_{n+1}-u_n\le 0$ ينتج أن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة تماما

2) أ. حساب u_1 : لدينا $u_1=\int_1^e\ln x\,dx$ ، لنستعمل التكامل بالتجزئة :

نضع $u(x)=\ln x$ ، نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$ و $v'(x)=1$ نجد $v(x)=x$ ومنه $u_1=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}\,dx$

أي أن $u_1=[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx$ إذن $u_1=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e$ وعليه $u_1=[x\ln x-x]_1^e$ بعد التعويض نجد

$u_1=1$

ب. نبين انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$:

لدينا $u_{n+1}=\int_1^e(\ln x)^{n+1}\,dx$ ، لنستعمل التكامل بالتجزئة :

نضع $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ ، نجد $u'(x)=(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$ و $v'(x)=1$ نجد $v(x)=x$

ومنه $u_{n+1}=\left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-\int_1^e x\times(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n\,dx$ أي أن

$$u_{n+1}=\left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-\int_1^e x\times(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n\,dx$$

ينتج $u_{n+1}=\left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-(n+1)\int_1^e(\ln x)^n\,dx$ ومنه $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$

جـ. استنتاج قيمة u_2 و u_3 :

اعتمادا على من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$ ، نجد :

$u_2=e-2u_1$ أي أن $u_2=e-2$ و $u_3=e-3u_2$ أي أن $u_3=e-3(e-2)=6-2e$

3) أ. بما أن $x\in[1;e]$ فإن $\ln x\geq 0$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $(\ln x)^n\geq 0$

و عليه $\int_1^e (\ln x)^n\,dx\geq 0$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n\geq 0$

ب. بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل (من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n\geq 0$) فإنها متقاربة

جـ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $(n+1)u_n\leq e$:

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$ فإن $(n+1)u_n=e-u_{n+1}$

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_{n+1}\geq 0$

فإن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $e-u_{n+1}\leq e$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $(n+1)u_n\leq e$.

- استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $0\leq u_n\leq \frac{e}{n+1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

4) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $4u_2+5u_3+...+(n+2)u_n=n\times e-2-u_{n+1}$:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$ إذن :

$u_2=e-2$ ، $u_3=e-3u_2$ ، $u_4=e-4u_3$ ، $u_5=e-5u_4$ ،...، $u_n=e-nu_{n-1}$ ، $u_{n+1}=e-(n+1)u_n$

بجمع أطراف المساويات طرفا إلى طرف نجد :

$$u_2+u_3+u_4+...+u_n+u_{n+1}=e-2+e-3u_2+e-4u_3+...+e-nu_{n-1}+e-(n+1)u_n$$

ومنه $4u_2+5u_3+6u_4+...+(n+1)u_{n-1}+(n+2)u_n+u_{n+1}=(e+e+e+...+e+e)-2$

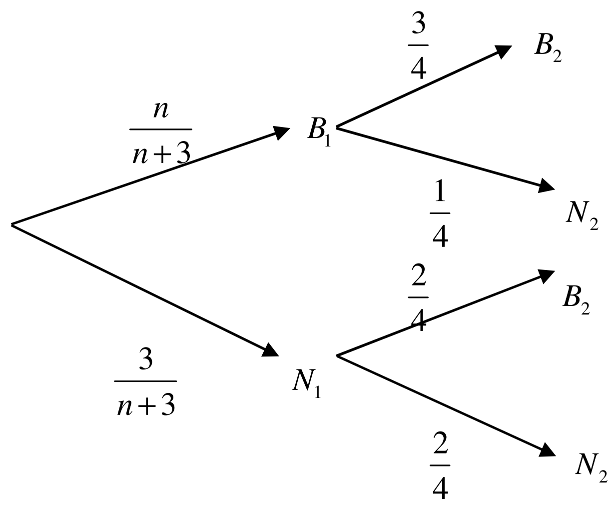
إذن $4u_2+5u_3+6u_4+...+(n+2)u_n=n\times e-2-u_{n+1}$

✓ **التمرين 02 :**

نعتبر الأحداث التالية: B_1 " سحب كرة بيضاء من U_1 " ، B_2 " سحب كرة بيضاء من U_2 "

N_1 " سحب كرة سوداء من U_1 " ، N_2 " سحب كرة بيضاء من U_2 "

1) شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة :



2) لنبين أن $p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$:

الحدث A يعني :

(نسحب كرة بيضاء من U_1 لنضعها في U_2 ثم نسحب كرة بيضاء من U_2 لنضعها في U_1)

أو (نسحب كرة سوداء من U_1 لنضعها في U_2ثم نسحب كرة سوداء من U_2 لنضعها في U_1)

و بالتالي احتمال الحدث A هو : $p(A)=p(B_1\cap B_2)+p(N_1\cap N_2)$

ومنه $p(A)=\left(\frac{n}{n+3}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}\right)$ أي أن $p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

3) حساب $p(B)$:

الحدث B يعني : (نسحب كرة سوداء من U_1 لنضعها في U_2 ثم نسحب كرة بيضاء من U_2 لنضعها في U_1)

و بالتالي احتمال الحدث B هو : $p(B)=p(N_1\cap B_2)=\frac{3}{2(n+3)}$

4) أ .قيم المتغير العشوائي X هي : $2n-100$ ، $n-100$ ، -100

ب. لدينا $p(X=2n-100)=p(B)=\frac{3}{2(n+3)}$

- الحدث $(X=n-100)$ يعني:

(سحب كرة بيضاء من U_1 ووضعها في U_2 ثم سحب كرة بيضاء من U_2 ووضعها في U_1)

أو (سحب كرة سوداء من U_1 ووضعها في U_2 ثم سحب كرة سوداء من U_2 ووضعها في U_1)

و بالتالي: $p(X=n-100)=p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

- الحدث $(X=-100)$ يعني:

(سحب كرة بيضاء من U_1 ووضعها في U_2 ثم سحب كرة سوداء من U_2 ووضعها في U_1)

و بالتالي $p(X=-100)=p(B_1\cap N_2)=\frac{n}{4(n+3)}$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

-100	$n-100$	$2n-100$	$(X=x_i)$
$\frac{n}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$	$\frac{3}{2(n+3)}$	$p(X=x_i)$

جـ. حساب بدلالة n ، الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=\left[(2n-100)\times\frac{3}{2(n+3)}\right]+\left[(n-100)\times\frac{3(n+2)}{4(n+3)}\right]+\left[(-100)\times\frac{n}{4(n+3)}\right]$$

ومنه : $E(X)=\frac{3n^2-382n-1200}{4(n+3)}$

- تكون اللعبة مربحة إذا وفقط إذا كان $E(X)>0$ معناه $3n^2-382n-1200>0$

$3n^2-382n-1200>0$ إذا وفقط إذا كان $n\in\left]-\infty;\frac{191-\sqrt{40081}}{3}\right[\cup\left]\frac{191-\sqrt{40081}}{3};+\infty\right[$

و بما n عدد طبيعي فإن $E(X)>0$ معناه $n>\frac{191+\sqrt{40081}}{3}$ ومنه أصغر عدد طبيعي n

الذي من أجله تكون اللعبة مربحة هي $n=131$ لأن $\frac{191+\sqrt{40081}}{3}\simeq 130,40$

✓ **التمرين03:**

1) أ. من أجل $n=0$: $2^0\equiv 1[12]$ ، من أجل $n=1$: $2^1\equiv 2[12]$ ، من أجل $n=2$: $2^2\equiv 4[12]$ ، من أجل $n=3$:
$2^3\equiv 8[12]$

من أجل $n=4$: $2^4\equiv 4[12]$ و من أجل $n=5$: $2^5\equiv 8[12]$

ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ **(نوظف الاستدلال بالتراجع)**

(1) من أجل $n=0$: $2^2\equiv 4[12]$ محققة

(2) ليكن n عدد طبيعي معطى ؛ لنفرض أن $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و لنبرهن $2^{2n+4}\equiv 4[12]$

لدينا $2^{2n+4}=2^{2n+2}\times 2^2$ ، بما أن فرضا $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و $2^2\equiv 4[12]$ فإن $2^{2n+2}\times 2^2\equiv 16[12]$ و بما أن
$16\equiv 4[12]$

فإن $2^{2n+4}\equiv 4[12]$ و عليه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2}\equiv 4[12]$

- نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+3}\equiv 8[12]$: **(نوظف البرهان بالاستنتاج)**

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و $2^1\equiv 2[12]$ فإن $2^{2n+2}\times 2^1\equiv 8[12]$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+3}\equiv 8[12]$

2) بما أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q فإن $u_1=u_0\times q$ و $u_2=u_0\times q^2$ و عليه :

$2u_0^2=u_1+u_2$ تكافئ $2u_0^2=u_0\times q+u_0\times q^2$ ومنه $2u_0^2=u_1+u_2$ تكافئ $2u_0=q(1+q)$

ينتج أن q قاسم للعدد $2u_0$ و بما أن u_0 أولي مع q فإنه حسب مبرهنة قوص q قاسم للعدد 2 و بالتالي $q=1$ أو $q=2$

- لما $q=1$ ؛ نجد $2u_0=2$ و عليه $u_0=1$
- لما $q=2$ ؛ نجد $2u_0=6$ و عليه $u_0=3$

3) أ. بما أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=3\times 2^n$

- لدينا $u_n<10^3$ تكافئ $3\times 2^n<10^3$ ومنه $u_n<10^3$ تكافئ $2^n<\frac{10^3}{3}$ و عليه $u_n<10^3$ تكافئ $n<\dfrac{\ln\left(\frac{10^3}{3}\right)}{\ln 2}$

أي أن $n<8{,}38$ و بما أن n عدد طبيعي فإن $n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

ب. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=u_0\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=3(2^n-1)$

جـ. ليكن n عدد طبيعي بحيث $n>1$ ؛ $S_n\equiv 9[12]$ تكافئ $3(2^n-1)\equiv 9[12]$ ومنه $S_n\equiv 9[12]$ تكافئ $2^n-1\equiv 3[4]$

و عليه $S_n\equiv 9[12]$ تكافئ $2^n\equiv 0[4]$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n>1$ ؛ $2^n\equiv 0[4]$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n>1$ ؛ $S_n\equiv 9[12]$

✓ **التمرين04:** : (الكفاءات المستهدفة: دراسة اشتقاقية دالة ، تغيرات دالة و حساب مساحة حيز مستوي)

1) أ. حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{x^2-2\ln(1-2x)}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(x-2\dfrac{\ln(1-2x)}{x}\right)$

إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(x+4\dfrac{\ln(1-2x)}{(-2x)}\right)$. بوضع $-2x=\alpha$ نجد $\lim\limits_{\alpha\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln(1-2x)}{(-2x)}=1$ و عليه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

- نبين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{x}$

إن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x)=\ln(1+e^x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x

$u'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ و بالتالي $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{u(x)-u(0)}{x}=u'(0)$ وعليه $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$

- الاستنتاج : بما أن $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=4$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ بقيم أصغر

وبما أن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ بقيم أكبر

ب. التفسير البياني : المنحني (C_f) يقبل على يسار المبدأ مماسا (T_1) معامل توجيهه $f_G'(0)=4$

و المنحني (C_f) يقبل على يمين المبدأ مماسا (T_2) معامل توجيهه $f_D'(0)=\frac{1}{2}$

جـ. معادلة المماس (T_1) للمنحني (C_f) على يسار المبدأ هي : $y=4x$

معادلة المماس (T_2) للمنحني (C_f) على يسار المبدأ هي : $y=\frac{1}{2}x$

2) أ. حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}\ln(\alpha)=+\infty$

ب. ليكن x من المجال $]0;+\infty[$:

$f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=\ln(1+e^x)-\ln 2$ أي أن $f(x)=\ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)-\ln 2$

ومنه $f(x)=\ln e^x+\ln(e^{-x}+1)-\ln 2$ إذن $f(x)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-x})$

جـ. بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-x})$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=\lim_{\lambda\to-\infty}\ln(1+e^{\lambda})=0$

فإن المنحني (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب مائل (Δ) معرف بالمعادلة الديكارتية $y=x-\ln 2$

د. دراسة الوضع النسبي لكل من (C_f) و (Δ) : لنعين إشارة $f(x)-(x-\ln 2)$

لدينا $f(x)-(x-\ln 2)=\ln(1+e^{-x})$ ، نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $1+e^{-x}>1$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\ln(1+e^{-x})>0$ أي أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-(x-\ln 2)>0$

و بالتالي المنحني (C_f) يقع أعلى المستقيم (Δ)

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

أ.الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-4;0[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق عليه هما :

$x\mapsto x^2$ و $x\mapsto -2\ln(1-2x)$ و من أجل كل x من $]-4;0[$: $f'(x)=2x-2\times\left(\frac{-2}{1-2x}\right)$

أي أن من أجل كل x من $]-4;0[$: $f'(x)=2x+\frac{4}{1-2x}$ ومنه من أجل كل x من $]-4;0[$: $f'(x)=2\left(\frac{-2x^2+x+2}{1-2x}\right)$

من اجل كل x من $]-4;0[$: $1-2x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-2x^2+x+2$

بما أن $-2x^2+x+2=0$ يكافئ $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ أو $x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ و بما أن $\frac{1+\sqrt{17}}{4}\notin]-4;0[$ و $\frac{1-\sqrt{17}}{4}\in]-4;0[$

و عليه إشارة $f'(x)$ تعطى على النحو التالي :

x	-4 $\quad$ x_1 $\quad$ 0
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

مع $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-4;x_1]$ و متناقصة تماما على المجال $[x_1;0[$

أ.الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها تركيب الدالة $u: x \mapsto \frac{1+e^x}{2}$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على المجال $]0;+\infty[$ متبوعة بالدالة $v: x \mapsto \ln x$ القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{\frac{e^x}{2}}{\frac{1+e^x}{2}} = \frac{e^x}{1+e^x}$ بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$

فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- جدول التغيرات :

x	-4		x_1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$16-4\ln 3$	$\searrow$	β	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

مع $\beta = f(x_1) = -1,27$

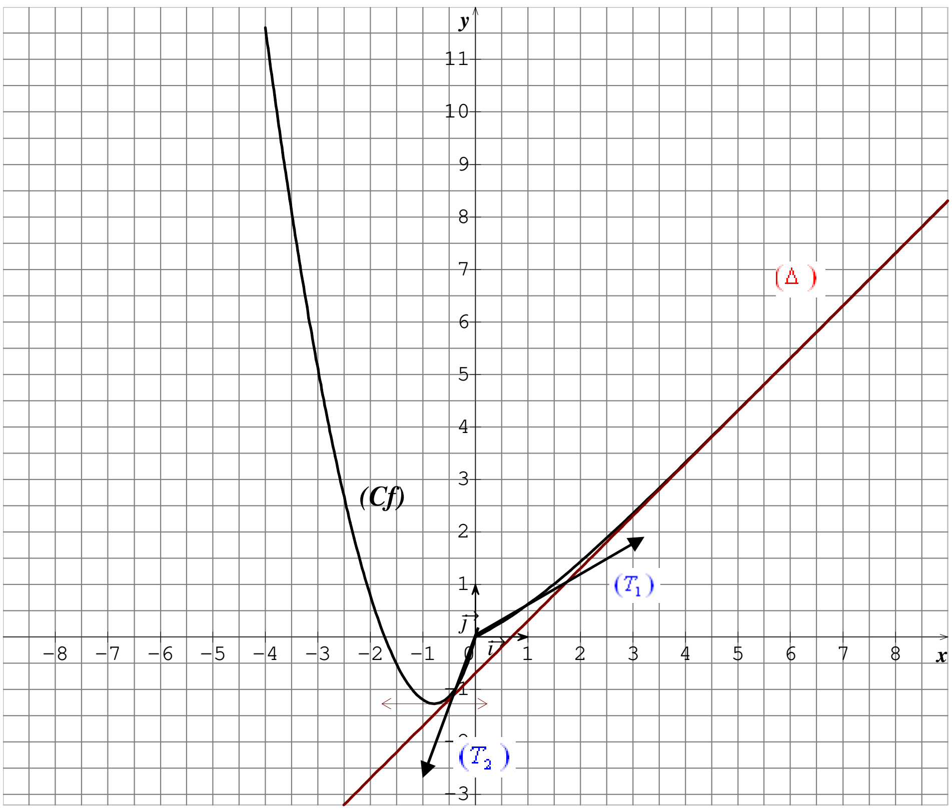
4) أ. بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-4;x_1]$ و $f(-4) > 0$ و $f(x_1) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-4 < \alpha < x_1$

و بما أن بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[x_1;+\infty[$ و $f(x_1) < 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $\alpha' \in]0;+\infty[$

ب. إن $f(0) = 0$ و بما أن $f(-1,73) = 0,002$ و $f(-1,72) = -0,022$ فإن أحد الحلين معدوم و الأخر α حيث $-1,73 < \alpha < -1,72$

جـ. رسم المماسين (T_1) و (T_2) ، المستقيم (Δ_1) و المنحني (C_f) :



6) أ. لدينا $H(x)=\int_{-1}^{x}\ln(1-2t)\,dt$ ، نضع $w(t)=\ln(1-2t)$ نجد $w'(t)=\frac{-2}{1-2t}$ و $n'(t)=1$ نجد $n(t)=t$

وعليه $H(x)=\left[t\times\ln(1-2t)\right]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x}\frac{-2t}{1-2t}\,dt$. من جهة أخرى $\int_{-1}^{x}\frac{-2t}{1-2t}\,dt=\int_{-1}^{x}\frac{1-2t-1}{1-2t}\,dt=\int_{-1}^{x}\left(1-\frac{1}{1-2t}\right)dt$

أي أن $\int_{-1}^{x}\frac{-2t}{1-2t}\,dt=\int_{-1}^{x}1\,dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{-2}{1-2t}\right)dt$ ومنه $\int_{-1}^{x}\frac{-2t}{1-2t}\,dt=\left[t\right]_{-1}^{x}+\frac{1}{2}\left[\ln(1-2t)\right]_{-1}^{x}$

وعليه $H(x)=\left[t\times\ln(1-2t)\right]_{-1}^{x}-\left[t\right]_{-1}^{x}-\frac{1}{2}\left[\ln(1-2t)\right]_{-1}^{x}$ ، بعد التعويض نجد :

$H(x)=x\times\ln(1-2x)+\ln 3-(x+1)-\frac{1}{2}\left(\ln(1-2x)-\ln 3\right)$ ومنه $H(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\times\ln(1-2x)+\frac{3}{2}\ln 3-(x+1)$

و عليه $S=\left(\frac{88}{3}+4\ln 2-4-9\ln 9\right)cm^2$ أي أن $S=\left(\frac{76}{3}+4\ln 2-18\ln 3\right)cm^2$

7) **الطريقة الأولى :** المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(x;y)$ معناه من أجل كل m من $\mathbb{R}^*$: $y=1+mf(x)$

أي أن المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(x;y)$ معناه من أجل كل m من $\mathbb{R}^*$: $f(x)\times m+1-y=0$

ومنه المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(x;y)$ معناه $\begin{cases} f(x)=0 \\ y-1=0 \end{cases}$

حسب السؤال 5 فإن $f(x)=0$ تكافئ ($x=0$ أو $x=\alpha$)

لما $x=0$: $y=1+mf(0)$ و $f(0)=0$ فإن $y=1$ و لما $x=\alpha$: $y=1+mf(\alpha)$ و $f(\alpha)=0$ فإن $y=1$

و بالتالي جميع المنحنيات (C_m) تمر من النقطتين $A(0;1)$ و $A(\alpha;1)$

الطريقة الثانية : نعتبر m و m' من $\mathbb{R}^*$ بحيث $m\neq m'$ ولتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي

$M\in(C_m)\cap(C_{m'})$ يكافئ $x\in[-4;0]$ و $y=1+mf(x)$ و $y=1+m'f(x)$

ومنه $M\in(C_m)\cap(C_{m'})$ يكافئ $x\in[-4;0]$ و $y=1+mf(x)$ و $1+mf(x)=1+m'f(x)$

إذن $M\in(C_m)\cap(C_{m'})$ يكافئ $x\in[-4;0]$ و $y=1+mf(x)$ و $(m-m')f(x)=0$

و بما أن $m\neq m'$ فإن $f(x)=0$. و حسب السؤال 5 فإن $f(x)=0$ تكافئ ($x=0$ أو $x=\alpha$)

و بالتالي جميع المنحنيات (C_m) تمر من النقطتين $A(0;1)$ و $A(\alpha;1)$

انتهى

➢ التمرين الأول (04 نقاط) :

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(n;m)$ التالية: $11n-24m=1 \;...(E)$

1) أ. اشرح لماذا المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب.باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E)

2) عين مجموعة حلول المعادلة (E)

(II) 1) تحقق أن العدد 9 قاسم لكل من $(10^{11}-1)$ و $(10^{24}-1)$

2) بين أنه إذا كانت الثنائية $(n;m)$ حل للمعادلة (E) فإن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

3) بين أن $(10^{11}-1)$ قاسم للعدد $(10^{11n}-1)$ ، ثم استنتج وجود عددان طبيعيان a و b بحيث :

$$(10^{11}-1)a-(10^{24}-1)b=9$$

4) بين أن كل قاسم مشترك للعددين $(10^{11}-1)$ و $(10^{24}-1)$ هو قاسم للعدد 9 ،ثم استنتج $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)$

➢ التمرين الثاني (04 نقاط) :

n عدد طبيعي أكبر من 1

يحتوي صندوق على 3 كريات سوداء و n كرية بيضاء .   (الكريات متماثلة لا نميز بينها باللمس)

نسحب من هذا الصندوق عشوائيا كريتين في آن واحد

(I) احسب بدلالة n احتمال كل حدث من الحوادث التالية :

1) A " سحب كريتين من لونين مختلفين"

2) B " سحب كريتين من نفس اللون "

3) C " سحب على الأقل كرية من اللون الأسود "

(II) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الكريات السوداء المسحوبة

1) عين قيم المتغير العشوائي X ،ثم عرف قانون احتماله

2) احسب بدلالة n الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

3) عين العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X)=1$

4) من أجل قيمة n المعينة ، أحسب $E(1446X+2025)$

➢ التمرين الثالث (05نقاط) :

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}-1$

(I) عين قيم العدد الحقيقي u_0 التي من أجلها تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(II) نفرض أن $u_0\in[-1;0[$:

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\le u_n<0$

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، أحسب نهايتها.

4) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq (u_{n+1}+1) \leq \frac{1}{\sqrt{u_0{}^2+1}}(u_n+1)$

ب. نضع $k=\frac{1}{\sqrt{u_0{}^2+1}}$. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq (u_n+1) \leq k^n(u_0+1)$

جـ. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1)$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq S_n \leq \frac{(u_0+1)\sqrt{u_0{}^2+1}}{1-\sqrt{u_0{}^2+1}}(k^{n+1}-1)$

➢ **التمرين الرابع(07 نقاط) :**

(I) n عدد طبيعي . باستعمال أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^n}=+\infty$ ، برهن أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^2+x+1)e^x$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

3) أ. عين معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة $x_0=\frac{1}{2}$

ب. أرسم المماس (T) و المنحني (C_f)

4) عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2+x+1-me^{-x}=0 \quad \ldots(E)$

(III) a عدد حقيقي سالب ، نعتبر العدد الحقيقي $I_{a,n}$ المعرف بـ : $I_{a,n}=\int_a^0 x^n e^x\,dx$

1) احسب بدلالة a العدد الحقيقي $I_{a,0}$ ، ثم عن طريق المكاملة بالتجزئة أحسب $I_{a,1}$ بدلالة a

2) عن طريق المكاملة بالتجزئة ، برهن أن : $I_{a,n+1}+I_{a,n}=-a^{n+1}\times e^a$ ، ثم استنتج $I_{a,2}$

3) أحسب بـ cm^2 ، المساحة $S(a)$ ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلتها :

$x=a$ ، $x=0$ و $y=0$ ، ثم عين $\lim\limits_{a\to-\infty} S(a)$

انتهى

✓ **التمرين 01 :**

(I)

1) أ. بما أن 11 عدد أولي لا يقسم 24 فإن11 أولي مع 24 و بالتالي المعادلة(E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. لدينا : $24=11\times(2)+2$ و $11=2\times(5)+1$ إذن $11-2\times(5)=1$ و بما أن $2=24-11\times(2)$

فإن $11-(24-11\times2)\times5=1$ ومنه $11\times(11)-24\times(5)=1$ و عليه الثنائية$(11;5)$ حل خاص للمعادلة(E)

2) تعيين حلول المعادلة(E) : $11\times(11)-24\times(5)=1$

لدينا $11n-24m=1$ و $11\times(11)-24\times(5)=1$ ومنه (I)... $11(n-11)=24(m-5)$

و بما أن 11 يقسم$11(n-11)$ فإن 11 يقسم $24(m-5)$ و بما أن 11 أولي مع 24 فإن 11 يقسم $(m-5)$

و بالتالي $m-5=11k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ أي أن $m=11k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بتعويض m في (I) نجد $n=24k+11$ مع $k\in\mathbb{Z}$

و بالعكس : بتعويض m و n في(E) نجد $11(24k+11)-24(11k+5)=1$ محققة من أجل كل k من $\mathbb{Z}$

و عليه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(14k+11;11k+5)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

(II)

1) نتحقق أن العدد 9قاسم لكل من $(10^{11}-1)$ و $(10^{24}-1)$

- الطريقة الأولى: لدينا $10^{11}-1=(10-1)(10^{10}+10^9+...+1)$ أي أن $10^{11}-1=9(10^{10}+10^9+...+1)$
  ومنه9 قاسم للعدد$10^{11}-1$
  كذلك $10^{24}-1=(10-1)(10^{23}+10^{22}+...+1)$ أي أن $10^{24}-1=9(10^{23}+10^{22}+...+1)$
  ومنه9 قاسم للعدد$10^{24}-1$
- الطريقة الثانية: بما أن $10\equiv1[9]$فإن $10^{11}\equiv1[9]$ و $10^{24}\equiv1[9]$ ومنه $10^{11}-1\equiv0[9]$ و $10^{24}-1\equiv0[9]$
  و عليه 9 قاسم لكل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

2) نبين أنه إذا كانت الثنائية $(n;m)$ حل للمعادلة (E) فإن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

تذكير: من أجل كل عدد طبيعي n و كل عدد حقيقي x : $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$

بما أن فرضا$(n;m)$ حل للمعادلة (E) فإن $11n-24m=1$ ومنه $11n=1+24m$ ومنه

$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=(10^{24m+1}-1)-10(10^{24m}-1)$ إذن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=10^{24m+1}-1-10^{24m+1}+10$

و عليه $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

3) نبين أن $(10^{11}-1)$ قاسم للعدد $(10^{11n}-1)$ ، ثم استنتاج وجود عددان طبيعيان a وb بحيث :

$$(10^{11}-1)a-(10^{24}-1)b=9$$

إن $10^{11n}-1=(10^{11})^n-1$ إذن$10^{11n}-1=(10^{11}-1)(10^{11(n-1)}+10^{11(n-2)}+....+1)$ ومنه$(10^{11}-1)$ قاسم للعدد$10^{11n}-1$

كذلك$10^{24m}-1=(10^{24})^m-1$ إذن$10^{24m}-1=(10^{24}-1)(10^{24(m-1)}+10^{24(m-2)}+....+1)$ ومنه$(10^{24}-1)$ قاسم للعدد $10^{24m}-1$

الاستنتاج: بما أن $\left(10^{11}-1\right)$ قاسم للعدد $10^{11n}-1$ فإنه يوجد عدد طبيعي a بحيث $10^{11n}-1=a\left(10^{11}-1\right)$

وبما أن $\left(10^{24}-1\right)$ قاسم للعدد $10^{24m}-1$ فإنه يوجد عدد طبيعي a' بحيث $10^{24m}-1=a'\left(10^{24}-1\right)$

و بما أن $9=\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a و a' بحيث $a\left(10^{11}-1\right)-10a'\left(10^{24}-1\right)=9$

و بوضع $b=10a'$ ينتج وجود عددان طبيعيان a و b بحيث $\left(10^{11}-1\right)a-\left(10^{24}-1\right)b=9$

4) نبين أن كل قاسم مشترك للعددين $\left(10^{11}-1\right)$ و $\left(10^{24}-1\right)$ هو قاسم للعدد 9، ثم استنتاج $PGCD\left(10^{11}-1;10^{24}-1\right)$

نعتبر d قاسم مشترك لكل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ إذن d قاسم لـ $10^{11}-1$ و قاسم لـ $10^{24}-1$ و بالتالي

d قاسم للعدد $\left(10^{11}-1\right)a-\left(10^{24}-1\right)b$ ومنه d قاسم للعدد 9 ينتج أن كل قاسم للعددين $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$

هو قاسم للعدد 9 ، وبما أن 9 قاسم لكل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ فإن كل قاسم للعدد 9 هو قاسم لهما

و عليه $PGCD\left(10^{11}-1;10^{24}-1\right)=9$

✓ **التمرين الثاني:** بما أن السحب يتم في آن واحد فإننا نوظف التوفيقات وعليه عدد الحالات الممكنة هو :

$$C_{n+3}^{2}=\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2(n+1)!} \text{ و عليه } C_{n+3}^{2}=\frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

(I) 1) حساب $p(A)$ حيث A هو الحدث : " الحصول على كريتين من لونين مختلفين"

عدد الحالات المواتية للحدث A هو $C_3^1\times C_n^1=3n$ ومنه $p(A)=\dfrac{3n}{\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}}=\dfrac{6n}{(n+3)(n+2)}$

2) حساب $p(B)$ حيث B هو الحدث : " الحصول على كريتين من نفس اللون"

الطريقة الأولى: عدد الحالات المواتية للحدث B هو $C_3^2+C_n^2=3+\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$ أي أن $C_3^2+C_n^2=3+\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}$

ومنه $C_3^2+C_n^2=3+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+6}{2}$ و عليه $p(B)=\dfrac{\dfrac{n^2-n+6}{2}}{\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}}=\dfrac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$

الطريقة الثانية: الحدث B هو الحدث العكسي للحدث A ومنه $p(B)=1-p(A)$ أي أن $p(B)=1-\dfrac{6n}{(n+3)(n+2)}$

ينتج أن $p(B)=\dfrac{n^2+5n+6-6n}{(n+3)(n+2)}$ ومنه $p(B)=\dfrac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$

3) حساب $p(C)$ حيث C هو الحدث : " الحصول على كرية سوداء على الأقل"

الطريقة الأولى:

عدد الحالات المواتية للحدث C هو $C_3^2+C_3^1\times C_n^1=3+3\dfrac{n!}{1!(n-1)!}$ أي أن $C_3^2+C_3^1\times C_n^1=3+\dfrac{3n(n-1)!}{(n-1)!}$

ومنه $C_3^2+C_3^1\times C_n^1=3+3n$ وعليه $p(C)=\dfrac{3+3n}{\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}}=\dfrac{6n+6}{(n+3)(n+2)}$.

الطريقة الثانية: الحدث العكسي للحدث C هو هو الحدث $\overline{C}$ " الحصول على كريتين من اللون الأبيض"

وعليه $p(C)=1-p(\overline{C})$ و بما أن $p(\overline{C})=\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}}=\dfrac{n^2-n}{(n+3)(n+2)}$ فإن $p(C)=1-\dfrac{n^2-n}{(n+3)(n+2)}$

أي أن $p(C)=\dfrac{n^2+5n+6-n^2+n}{(n+3)(n+2)}=\dfrac{6n+6}{(n+3)(n+2)}$

(II) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الكريات السوداء المسحوبة

1) تعيين قيم المتغير العشوائي X ،ثم تعيين قانون احتماله

قيم المتغير العشوائي X هي : 2 ، 1 ، 0 :

- لنعين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

(1) $p(X=0)=\dfrac{C_n^2}{C_{n+3}^2}$ و بما أن $C_n^2=\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ فإن $p(X=0)=\dfrac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$

(2) $p(X=1)=\dfrac{C_3^1\times C_n^1}{C_{n+3}^2}$ و بما أن $C_3^1\times C_n^1=3n$ فإن $p(X=1)=\dfrac{6n}{(n+3)(n+2)}$

(3) $p(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_{n+3}^2}$ و بما أن $C_3^2=3$ فإن $p(X=2)=\dfrac{6}{(n+3)(n+2)}$

$(X=x_i)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\dfrac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$	$\dfrac{6n}{(n+3)(n+2)}$	$\dfrac{6}{(n+3)(n+2)}$

2) حساب بدلالة n الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

لدينا $E(X)=\left(0\times\dfrac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}\right)+\left(1\times\dfrac{6n}{(n+3)(n+2)}\right)+\left(2\times\dfrac{6}{(n+3)(n+2)}\right)$

ومنه $E(X)=\dfrac{6n+12}{(n+3)(n+2)}$

3) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X)=1$:

$E(X)=1$ إذا وفقط إذا كان $\dfrac{6n+12}{(n+3)(n+2)}=1$ ومنه $E(X)=1$ إذا وفقط إذا كان $n^2-n-6=0$

إن مميز المعادلة $n^2-n-6=0$ هو $\Delta=25$ ومنه الحلين هما $n_1=3$ و $n_2=-2$ و بما أن n عدد طبيعي فإن $E(X)=1$ إذا وفقط إذا كان $n=3$

4) من أجل قيمة n المعينة ، أحسب $E(1446X+2025)$

من أجل $n=3$:الأمل الرياضياتي هو $E(X)=1$ وبما أن $E(1446X+2025)=1446E(X)+2025$
فإن $E(1446X+2025)=3471$

✓ **التمرين الثالث**:

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}-1$

(I)تعيين قيم العدد الحقيقي u_0 التي من أجلها تكون (u_n) متتالية ثابتة:

(u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n$

و بما أن فرضا (u_n) متتالية ثابتة ، فإنه بأخذ $n=0$ نجد $u_1=u_0$

و عليه $\frac{u_0+1}{\sqrt{u_0{}^2+1}}-1=u_0$ ومنه $\frac{u_0+1}{\sqrt{u_0{}^2+1}}=u_0+1$ و عليه $(u_0+1)\left(\frac{1}{\sqrt{u_0{}^2+1}}-1\right)=0$

ينتج أن $u_0+1=0$ أو $\frac{1}{\sqrt{u_0{}^2+1}}-1=0$ إذن $u_0=-1$ أو $\sqrt{u_0{}^2+1}=1$ ومنه $u_0=-1$ أو $u_0{}^2+1=1$

أي أن $u_0=-1$ أو $u_0=0$ و عليه (u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان $u_0=-1$ أو $u_0=0$

(II)نفرض أن $u_0\in[-1;0[$:

1) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\le u_n<0$ (نستعمل الاستدلال بالتراجع)

أ.من أجل $n=0$: $-1\le u_0<0$ محققة لأن فرضا $u_0\in[-1;0[$

ب.من أجل كل عدد طبيعي n كيفي ، نفرض أن: $-1\le u_n<0$ و لنبرهن أن : $-1\le u_{n+1}<0$

بما أن فرضا $-1\le u_n<0$ فإن $0\le u_n+1<1$ و $0<u_n^2\le 1$ إذن $1<u_n^2+1\le 2$

و عليه $1<\sqrt{u_n^2+1}\le\sqrt{2}$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}<1$ ينتج أن $0\le\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}<1$

وبالتالي $-1\le\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}-1<0$ أي أن $-1\le u_{n+1}<0$

من أ و ب نجد أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\le u_n<0$

2) نبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}-1-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}-(u_n+1)$

إذن $u_{n+1}-u_n=(u_n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}-1\right)$ ، بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\le u_n<0$

فإن $0\le u_n+1<1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}<1$ ومنه $u_n+1>0$ و $\frac{1}{\sqrt{u_n{}^2+1}}-1<0$

نجد أن $u_{n+1}-u_n<0$ ينتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها:

- بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد (-1) فإنها متقاربة

- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: بوضع $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ مع l عدد حقيقي و $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f الدالة المعرفة على المجال $]-1;0[$ بـــ : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

بما أن الدالة f مستمرة على المجال $]-1;0[$ فإن l هو حل للمعادلة $f(x) = x$ في المجال $[-1;0[$

$f(x) = x$ تكافئ $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = x$ ومنه $f(x) = x$ تكافئ $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = x+1$

إذن $f(x) = x$ تكافئ $(x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = 0$ ومنه $f(x) = x$ تكافئ $x = -1$ أو $x = 0$

و بما أن $l \in [-1;0[$ فإن $l = -1$

4) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le (u_{n+1}+1) \le \frac{1}{\sqrt{{u_0}^2+1}}(u_n+1)$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1 = \frac{u_n+1}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$. بما أن $0 \le u_n+1 < 1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} < 1$

فإن $0 \le \frac{u_n+1}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$.

لنبرهن أن $(u_{n+1}+1) \le \frac{1}{\sqrt{{u_0}^2+1}}(u_n+1)$:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \le u_n \le u_0 < 0$

ومنه $0 < u_0^2 \le u_n^2 \le 1$ إذن $u_0^2+1 \le u_n^2+1$ و عليه $\sqrt{u_0^2+1} \le \sqrt{u_n^2+1}$ ينتج أن $\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}$

و بما أن $u_n+1 \ge 0$ فإن $\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}(u_n+1) \le \frac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}(u_n+1)$ و بالتالي $(u_{n+1}+1) \le \frac{1}{\sqrt{{u_0}^2+1}}(u_n+1)$

ب. نضع $k = \frac{1}{\sqrt{{u_0}^2+1}}$. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le (u_n+1) \le k^n(u_0+1)$

<u>**الطريقة الأولى**</u> : بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le (u_{n+1}+1) \le k(u_n+1)$

فإن

$$0 \le (u_1+1) \le k(u_0+1)$$
$$0 \le (u_2+1) \le k(u_1+1)$$
$$\vdots$$
$$0 \le (u_n+1) \le k(u_{n-1}+1)$$

ومنه $0 \le (u_1+1)(u_2+1)...(u_n+1) \le k^n(u_0+1)(u_1+1)(u_{n-1}+1)$

ينتج أن $0 \le (u_n+1) \le k^n(u_0+1)$

<u>**الطريقة الثانية**</u> : نستعمل الاستدلال بالتراجع

(1) من أجل $n = 0$: $0 \le (u_0+1) \le k^0(u_0+1)$ أي أن $0 \le (u_0+1) \le (u_0+1)$ محققة

(2) من أجل كل عدد طبيعي n كيفي :

نفرض أن: $0 \le (u_n+1) \le k^n(u_0+1)$ و لنبرهن أن : $0 \le (u_{n+1}+1) \le k^{n+1}(u_0+1)$

بما أن فرضا $0\le (u_n+1)\le k^n(u_0+1)$ و $k>0$ فإن $0\le k(u_n+1)\le k^{n+1}(u_0+1)$

و بما أن $0\le (u_{n+1}+1)\le k(u_n+1)$ فإن $0\le (u_{n+1}+1)\le k^{n+1}(u_0+1)$

و عليه من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le (u_n+1)\le k^n(u_0+1)$

جـ. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن $0\le (u_n+1)\le k^n(u_0+1)$ فإن $-1\le u_n\le k^n(u_0+1)-1$ و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n=0$ لأن $0<k<1$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[k^n(u_0+1)-1\right]=-1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-1$

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)$

نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le S_n\le \dfrac{(u_0+1)\sqrt{u_0^{\,2}+1}}{1-\sqrt{u_0^{\,2}+1}}\left(k^{n+1}-1\right)$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le (u_n+1)\le k^n(u_0+1)$ فإن

$0\le (u_0+1)\le k^0(u_0+1)$

$0\le (u_1+1)\le k(u_0+1)$

.

.

.

$0\le (u_n+1)\le k^n(u_0+1)$

ومنه $0\le S_n\le \left(k^0+k+...+k^n\right)(u_0+1)$

إن $\left(k^0+k+...+k^n\right)$ هو مجموع $n+1$ حد متتابع من متتالية هندسية أساسها k و بالتالي :

$k^0+k+...+k^n=k^0\left(\dfrac{1-k^{n+1}}{1-k}\right)$ أي أن $k^0+k+...+k^n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{u_0^{\,2}+1}}}\left(1-k^{n+1}\right)$

ومنه $k^0+k+...+k^n=\dfrac{\sqrt{u_0^{\,2}+1}}{\sqrt{u_0^{\,2}+1}-1}\left(1-k^{n+1}\right)$ و عليه $0\le S_n\le \dfrac{\sqrt{u_0^{\,2}+1}}{\sqrt{u_0^{\,2}+1}-1}\left(1-k^{n+1}\right)(u_0+1)$

ينتج أن $0\le S_n\le \dfrac{(u_0+1)\sqrt{u_0^{\,2}+1}}{1-\sqrt{u_0^{\,2}+1}}\left(k^{n+1}-1\right)$

✓ التمرين 04:

(I) البرهان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$: ليكن n عدد طبيعي

لنضع $x=-u$ نجد لما $x\to-\infty$ فإن $u\to+\infty$ ولدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=\lim\limits_{u\to+\infty}(-u)^n e^{-u}=\lim\limits_{u\to+\infty}(-1)^n\times\dfrac{u^n}{e^u}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=\lim\limits_{u\to+\infty}(-1)^n\times\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^u}{u^n}\right)}=0$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$

(II) (1 أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

ب. حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و تفسيرها بيانيا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x+xe^x+e^x\right)=0$ ، لأن $\lim_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ مع $n\in\mathbb{N}$

* **التفسير البياني:** المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة ،ثم انجاز جدول تغيراتها :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق عليه هما $u_1: x\mapsto x^2+x+1$ و $u_2: x\mapsto e^x$

ومن أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)=(2x+1)e^x+\left(x^2+x+1\right)e^x$ أي أن $f'(x)=\left(x^2+3x+2\right)e^x$

بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+3x+2

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ وعليه إشارة $f'(x)$ تعطى على النحو التالي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ ، $[-1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-2;-1]$

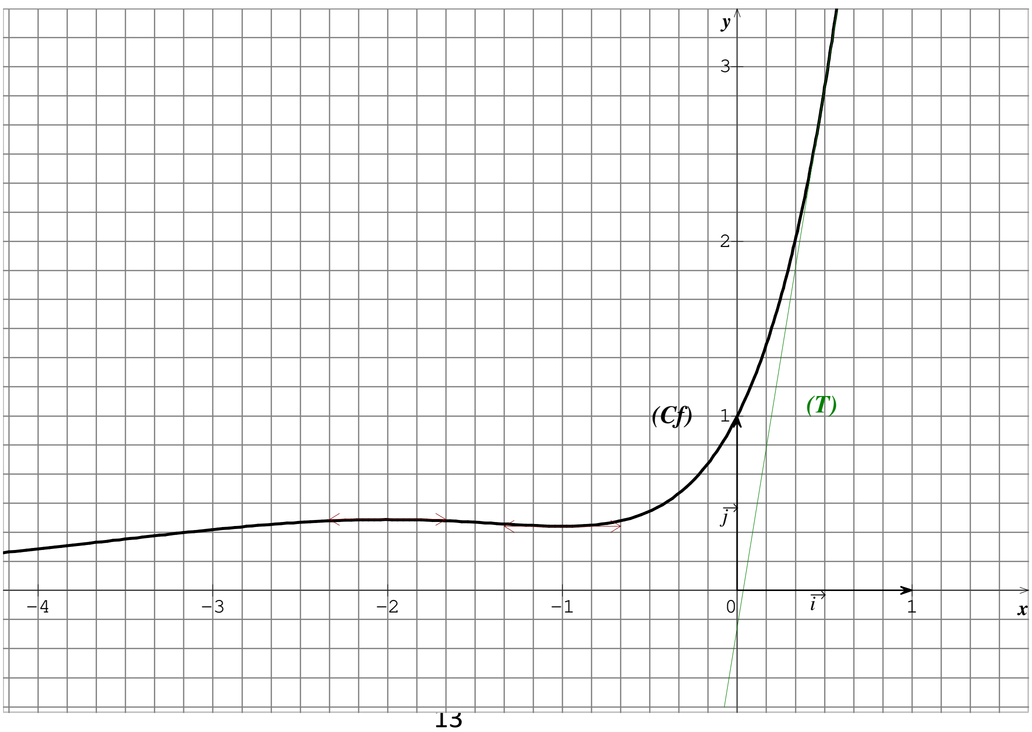
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3e^{-2}$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ .تعيين معادلة للمماس (T) : $(T): y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$ و بما أن $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}\sqrt{e}$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}\sqrt{e}$

نجد أن المعادلة $y=\frac{15}{4}\sqrt{e}\,x-\frac{1}{8}\sqrt{e}$ هي معادلة للمماس (T)

ب. رسم المماس (T)و المنحني (C_f) :



1) لدينا (E) تكافئ $x^2+x+1=me^{-x}$ ومنه (E) تكافئ $(x^2+x+1)e^x=m$ أي أن $f(x)=m$

و بالتالي بيانيا حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم المعرف بالمعادلة $y=m$

وعليه : لما $m\leq 0$: المعادلة (E) لا تقبل حلول

لما $0<m<e^{-1}$ أو $3e^{-2}<m<1$: للمعادلة حل وحيد سالب

لما $m=e^{-1}$ أو $m=3e^{-2}$: للمعادلة حلين سالبين ، أحدهما مضاعف

لما $e^{-1}<m<3e^{-2}$: للمعادلة ثلاثة حلول سالبة

لما $m=1$: للمعادلة حل وحيد معدوم

لما $m>1$: للمعادلة حل وحيد موجب

(III) 1) حساب $I_{a,0}$: لدينا $I_{a,0}=\int_a^0 e^x\,dx$ ومنه $I_{a,0}=\left[e^x\right]_a^0$ ينتج أن $I_{a,0}=1-e^a$

- تعين عن طريق المكاملة بالتجزئة $I_{a,1}$: لدينا $I_{a,1}=\int_a^0 xe^x\,dx$

بوضع : $u(x)=x$ نجد $u'(x)=1$ و $v'(x)=e^x$ نجد $v(x)=e^x$ وعليه:

$I_{a,1}=\left[xe^x\right]_a^0-\int_a^0 e^x\,dx$ ومنه $I_{a,1}=\left[xe^x\right]_a^0-\left[e^x\right]_a^0=\left[(x-1)e^x\right]_a^0$ ينتج أن $I_{a,1}=-1-(a-1)e^a$

2) لنبرهن عن طريق المكاملة بالتجزئة أن $I_{a,n+1}+I_{a,n}=-a^{n+1}\times e^a$:

لدينا $I_{a,n+1}=\int_a^0 x^{n+1}e^x\,dx$ ، بوضع : $u(x)=x^{n+1}$ نجد $u'(x)=(n+1)x^n$ و $v'(x)=e^x$ نجد $v(x)=e^x$

وعليه: $I_{a,n+1}=\left[x^{n+1}e^x\right]_a^0-\int_a^0(n+1)x^ne^x\,dx$ ومنه $I_{a,n+1}=-a^{n+1}e^a-(n+1)\int_a^0 x^ne^x\,dx$

ينتج أن $I_{a,n+1}=-a^{n+1}e^a-(n+1)I_{a,n}$ وعليه $I_{a,n+1}+(n+1)I_{a,n}=-a^{n+1}e^a$

- استنتاج $I_{a,2}$: من أجل $n=2$ نجد $I_{a,2}+2I_{a,1}=-a^2e^a$ ومنه $I_{a,2}=-a^2e^a-2\left(-1-(a-1)e^a\right)$

ومنه $I_{a,2}=2-\left(a^2-2a+2\right)e^a$

1) حساب $S(a)$: لدينا $S(a)=\left(\int_a^0 f(x)\,dx\right)\times 4cm^2$

إن $\int_a^0 f(x)\,dx=\int_a^0\left(x^2+x+1\right)e^x\,dx$ ومنه $\int_a^0 f(x)\,dx=\int_a^0 x^2e^x\,dx+\int_a^0 xe^x\,dx+\int_a^0 e^x\,dx$

إذن $\int_a^0 f(x)\,dx=I_{a,2}+I_{a,1}+I_{a,0}$ أي أن $\int_a^0 f(x)\,dx=2-\left(a^2-2a+2\right)e^a-1-(a-1)e^a+1-e^a$

ومنه $\int_a^0 f(x)\,dx=2-\left(a^2-3a+2\right)e^a$ و بالتالي $S(a)=\left(8-\left(4a^2-12a+8\right)e^a\right)cm^2$

- حساب $\lim_{a\to-\infty} S(a)$: $\lim_{a\to-\infty} S(a)=8cm^2$ ، لأن :

$\lim_{a\to-\infty}\left(4a^2-12a+8\right)e^a=\lim_{a\to-\infty}\left(4a^2e^a-12ae^a+8e^a\right)=0$ ؛ لأن $\lim_{a\to-\infty}a^ne^a=0$ مع $n\in\mathbb{N}$

الموضوع رقم 04

التمرين الأول(05 نقط) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

1) احسب u_2 و u_3

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$

ب. تحقق أنه ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $PGCD(u_n;u_{n+1}) = 1$

3) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ب. عين من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $PGCD(4^{n+1}-1;4^n-1)$

4) (v_n) هي المتتالية العددية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. عين بدلالة n المجموع S_n التالي : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{3n}$

5) أ.عين حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7

ب. عين الأعداد الطبيعية التي من أجلها يكون $9S_n + 8n$ مضاعفا للعدد 7

التمرين الثاني(04 نقط) :

نعتبر (D) قطعة نرد سداسية الشكل، أوجهها الستة مرقمة من 1 إلى 6.

نعتبر p_k احتمال ظهور الرقم k خلال رمية واحدة لقطعة النرد (D) مع $1 \le k \le 6$

1) إذا علمت أن: p_1 ، p_2 ، p_3 ، p_4 ، p_5 و p_6 تشكل بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r و p_1 ، p_2 ، p_4 تشكل بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q

برهن أن : $p_k = \frac{k}{21}$

2) نلقي قطعة النرد (D) مرتان متتاليتان و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل رمية مجموع الرقمين الناتجين

أ. عين قيم المتغير العشوائي X

ب. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

جـ. احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث(04 نقط) :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ بحيث : $\|\vec{u}\| = 2cm$

T هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' لاحقتها z' بحيث :

$$z' = -(\sqrt{3}+i)z - 1 + i(1+\sqrt{3})$$

1) بين أن T تشابه مباشر، يطلب تعيين نسبته k، زاويته θ و مركزه Ω

2) نعتبر النقطة A التي لاحقتها $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

أحسب الطول ΩA و عين قيسا للزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{\Omega A})$

3) نعتبر متتالية النقط (M_n)، المعرفة بـ : $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = T(M_n)$

و لتكن z_n لاحقة النقطة M_n

أ. أنشئ النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 ، مبرزا كيفية الإنشاء

ب .برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(z_n-i)=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0-i)$

جـ .لنضع : $u_n=|z_n-i|$ و $v_n=\theta_n$ مع θ_n هي عمدة للعدد المركب (z_n-i)

بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب و أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساس و الحد الأول لكل منهما

د. عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث : $\Omega M_n \geq 10^2$

هـ. عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكن النقط Ω، A و M_n في استقامية

➢ **التمرين الرابع(07 نقاط) :**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2\,cm$. k عدد حقيقي موجب تماما

(I) نعتبر الدالة العددية f_k للمتغير الحقيقي x المعرفة على$\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x)=x+\dfrac{1-ke^x}{1+ke^x}$

نسمي (C_k) المنحنى الممثل للدالة f_k

(1 أ. تحقق أن الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية : $2y'=(y-x)^2+1 \ ...(E)$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f_k على $\mathbb{R}$

(2 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f_k

(3 أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f_k(x)=x-1+\frac{2}{1+ke^x}\ ...(1) \quad \text{و} \quad f_k(x)=x+1-\frac{2ke^x}{1+ke^x}\ ...(2)$$

ب. استنتج أن المنحنى (C_k) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلة لكل منهما

جـ. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_k) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ')

(II) نفرض أن: $k=1$

(1 أ. تحقق أن الدالة f_1 دالة فردية ، فسر النتيجة بيانيا

ب. بين أن مبدأ المعلم نقطة انعطاف للمنحنى (C_1)

جـ. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_1) في مبدأ المعلم

(2 أنشئ المماس (T) و المنحنى(C_1)

(3 عين بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=m \ ...(E)$

(4 نعتبر الدالة F ، الدالة الأصلية للدالة f_1 على$\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0

أ. بين أن الدالة F دالة زوجية ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$

ب. باستعمال العلاقة (2) ، عين عبارة الدالة F

جـ. احسب بـ cm^2 : المساحة S ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_1)

و المستقيمات ذات المعادلات: $x=0$ ، $x=1$ و $y=0$

انتهى

الشعبة: نهائي رياضيات
الأستاذ : محمدعلالو

تصحيح الموضوع رقم 04

✓ **التمرين الأول :**

❖ **ما يجب أن تعلمه:**

1) الاستدلال بالتراجع : $P(n)$ **خاصية متعلقة بعدد طبيعي** n ، n_0 **عدد طبيعي .**

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ **من أجل كل عدد طبيعي** n **أكبر من أو يساوي** n_0 ، **يكفي :**

1. **نتأكد من صحة الخاصية من أجل** n_0 **أي** $P(n_0)$.
2. **نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي** n **أكبر من أو يساوي** n_0 **(فرضية التراجع)** **و نبرهن صحة الخاصية من أجل** $n+1$

2) مبرهنة بيزو : يكون عددان صحيحان a **و** b **أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان** u **و** v **حيث**

$$au+bv=1$$

3) تعريف متتالية هندسية: نقول أن المتتالية (u_n) **متتالية هندسية حدها الأول** u_0 **و أساسها** q **(حيث** $q\in\mathbb{R}^*$**)**

إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$

4) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية : إذا كانت (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $q\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ **فإن**

S **مجموع حدود متتابعة منها يحسب بـ :** $S=$ **(الحد الأول من المجموع)** $\times\dfrac{1-q^{\text{عددالحدود}}}{1-q}$

1) حساب u_2 و u_3 :

إن $u_2=5u_1-4u_0$ و بما أن $u_0=0$ و $u_1=1$ فإن $u_2=5$

و $u_3=5u_2-4u_1$ و بما أن $u_1=1$ و $u_2=5$ فإن $u_3=21$

2) أ. نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=4u_n+1$: نستعمل الاستدلال بالتراجع

(1) من أجل $n=0$: $u_1=4u_0+1$ محققة ، لأن $u_0=0$ و $u_1=1$

(2) ليكن n عدد طبيعي معطى؛ لنفرض أن $u_{n+1}=4u_n+1$ و لنبرهن أن $u_{n+2}=4u_{n+1}+1$

لدينا $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$ و بما أن فرضا $u_{n+1}=4u_n+1$ فإن $4u_n=u_{n+1}-1$ ومنه $u_{n+2}=5u_{n+1}-(u_{n+1}-1)$

وعليه $u_{n+2}=4u_{n+1}+1$.

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=4u_n+1$.

ب. بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=4u_n+1$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(1)\times u_{n+1}+(-4)\times u_n=1$

وعليه حسب مبرهنة بيزو فإن u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما أي أن $PGCD(u_n;u_{n+1})=1$

3) أ. نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$: نستعمل الاستدلال بالتراجع

(1) من أجل $n=0$: $u_0=\frac{1}{3}(4^0-1)=0$ محققة ، لأن $u_0=0$

(2) ليكن n عدد طبيعي معطى؛ لنفرض أن $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ و لنبرهن أن $u_{n+1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

بما أن $u_{n+1}=4u_n+1$ وفرضا $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$ ، فإن $u_{n+1}=4\times\frac{1}{3}(4^n-1)+1$ ومنه $u_{n+1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-4)+1$

وعليه $u_{n+1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-4+3)$ و بالتالي $u_{n+1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

ب. بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3u_n=4^n-1$ و $3u_{n+1}=4^{n+1}-1$

وعليه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=PGCD\left(3u_{n+1};3u_n\right)$ ومنه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=3\times PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)$

و بما أن $PGCD\left(u_n;u_{n+1}\right)=1$ فإن $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=3$

4) أ. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=u_n+\frac{1}{3}$ إذن $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}$ و بما أن $u_{n+1}=4u_n+1$ فإن $v_{n+1}=4u_n+1+\frac{1}{3}$

وعليه $v_{n+1}=4u_n+\frac{4}{3}$ ومنه $v_{n+1}=4\left(u_n+\frac{1}{3}\right)$ أي أن $v_{n+1}=4v_n$ و بالتالي المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $q=4$

و حدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{3}$ و بما أن $u_0=0$ فإن $v_0=\frac{1}{3}$

ب. إن S_n هو مجموع $\left(3n+1\right)$ حد متتابع من المتتالية الهندسية $\left(v_n\right)$ وعليه $S_n=\frac{v_0}{1-q}\left(1-q^{3n+1}\right)$

ومنه $S_n=\frac{\frac{1}{3}}{-3}\left(1-4^{3n+1}\right)$ أي أن $S_n=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

5) أ . تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7

التخمين : لما $n=0$: $4^0\equiv1[7]$ ، لما $n=1$: $4^1\equiv4[7]$ ، لما $n=2$: $4^2\equiv2[7]$ ، لما $n=3$: $4^3\equiv1[7]$

التعميم: من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k}\equiv1[7]$ ، $4^{3k+1}\equiv4[7]$ ، $4^{3k+2}\equiv2[7]$

ب. تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $9S_n+8n$ مضاعفا للعدد 7 :

$9S_n+8n$ مضاعفا للعدد 7 إذا وفقط إذا كان $9S_n+8n\equiv0[7]$

بما أن $S_n=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$ فإن $9S_n=4^{3n+1}-1$ و بما أن $8\equiv1[7]$ فإن $8n\equiv n[7]$ ومنه $9S_n+8n\equiv\left(4^{3n+1}-1+n\right)[7]$

و عليه يكفي إيجاد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $4^{3n+1}-1+n\equiv0[7]$ ، بما أن حسب التعميم السابق $4^{3n+1}\equiv4[7]$

فإنه يكفي إيجاد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3+n\equiv0[7]$ أي أن $n\equiv-3[7]$ ومنه $n\equiv4[7]$

ينتج أن $n=7\alpha+4$ مع α عدد طبيعي.

✓ **التمرين الثاني :**

❖ **ما يجب أن تعرفه :**

1) تعريف متتالية حسابية : نقول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي)

إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$

2) الوسط الهندسي : إذا كانت a ، b و c أعداد حقيقية متتابعة من متتالية هندسية فإن $b^2=a\times c$

1) بما أن p_1 ، p_2 ، p_3 ، p_4 ، p_5 و p_6 شكل بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r فإن

$p_2=p_1+r$ ، $p_3=p_1+2r$ ، $p_4=p_1+3r$ ، $p_5=p_1+4r$ و $p_6=p_1+5r$

ونعلم أن $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ إذن $6p_1+15r=1$

من جهة أخرى p_1 ، p_2 و p_4 تشكل بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q فإن $\left(p_2\right)^2=p_1\times p_4$

و عليه $\left(p_1+r\right)^2=p_1\times\left(p_1+3r\right)$ ومنه $p_1^2+2p_1\times r+r^2=p_1^2+3p_1\times r$ ينتج أن $r\left(-p_1+r\right)=0$

ومنه $r=0$ (مرفوض) أو $p_1=r$ و بالتالي $6r+15r=1$ أي أن $21r=1$ ومنه $r=\frac{1}{21}$

إذن $p_1=\frac{1}{21}$ ، $p_2=\frac{2}{21}$ ، $p_3=\frac{3}{21}$ ، $p_4=\frac{4}{21}$ ، $p_5=\frac{5}{21}$ و $p_6=\frac{6}{21}$

(2

أ. تعيين قيم المتغير العشوائي X :

عند ألقاء القطعة (D) مرتين متتاليتين نتحصل على 36 إمكانية للجداء، تلخص في الجدول التالي :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

و عليه مجموعة قيم المتغير العشوائي X :

$$X(\Omega)=\{2;3;4;5;6;8;9;10;11;12\}$$

ب. تعيين قانون احتمال العشوائي X :

$$p(X=4)=2\left(\frac{1}{21}\times\frac{3}{21}\right)+\left(\frac{2}{21}\right)^2=\frac{10}{441} \text{ ، } p(X=3)=2\left(\frac{1}{21}\times\frac{2}{21}\right)=\frac{4}{441} \text{ ، } p(X=2)=\frac{1}{21}\times\frac{1}{21}=\frac{1}{441}$$

$$p(X=6)=2\left(\frac{1}{21}\times\frac{5}{21}\right)+2\left(\frac{2}{21}\times\frac{4}{21}\right)+\left(\frac{3}{21}\right)^2=\frac{5}{63} \text{ ، } p(X=5)=2\left(\frac{1}{21}\times\frac{4}{21}\right)+2\left(\frac{2}{21}\times\frac{3}{21}\right)=\frac{20}{441}$$

$$p(X=8)=2\left(\frac{2}{21}\times\frac{6}{21}\right)+2\left(\frac{3}{21}\times\frac{5}{21}\right)+\left(\frac{4}{21}\right)^2=\frac{10}{63} \text{ ، } p(X=7)=2\left(\frac{1}{21}\times\frac{6}{21}\right)+2\left(\frac{3}{21}\times\frac{4}{21}\right)+2\left(\frac{2}{21}\times\frac{5}{21}\right)=\frac{8}{63}$$

$$p(X=10)=2\left(\frac{4}{21}\times\frac{6}{21}\right)+\left(\frac{5}{21}\right)^2=\frac{73}{441} \text{ ، } p(X=9)=2\left(\frac{3}{21}\times\frac{6}{21}\right)+2\left(\frac{4}{21}\times\frac{5}{21}\right)=\frac{76}{441}$$

$$p(X=12)=\left(\frac{6}{21}\right)^2=\frac{36}{441} \text{ ، } p(X=11)=2\left(\frac{5}{21}\times\frac{6}{21}\right)=\frac{20}{147}$$

لنلخص النتائج في الجدول التالي :

$(X=x_i)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{441}$	$\frac{4}{441}$	$\frac{10}{441}$	$\frac{20}{441}$	$\frac{5}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{76}{441}$	$\frac{73}{441}$	$\frac{20}{147}$	$\frac{36}{441}$

جـ. حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=\frac{2}{441}+\frac{12}{441}+\frac{40}{441}+\frac{100}{441}+\frac{30}{63}+\frac{56}{63}+\frac{80}{63}+\frac{684}{441}+\frac{730}{441}+\frac{220}{147}+\frac{432}{441} \text{ ومنه } E(X)=\frac{26}{3}$$

✓ **التمرين الثالث :**

❖ **ما يجب أن تعرفه :**

1) تحويل نقطي كتابته المركبة : $z'=az+b$ ، a و b عددان مركبان حيث $a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}^*$.

إذا كان T تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$ ، زاويته θ حيث $\theta=Arg(a)$ و مركزه Ω بحيث $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$

2) العبارة المركبة للتشابه المباشر : إذا كان S تشابه مباشر نسبته k و زاويته θ و مركزه Ω ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ ، النقطة $M'(z')$ فإن : $z'-z_\Omega=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)$

3) إذا كانت A ، B و C نقط متمايزة من المستوي المباشر لاحقتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C فإن:

أ. $AB=|z_B-z_A|$ ، $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=Arg(z_B-z_A)$

ب. النقط A ، B و C في استقامية إذا وفقط إذا كان $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=k\pi$ مع k عدد صحيح

4) مبرهنة قوص : a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

1) التحويل النقطي T معطى بعبارته المركبة من الشكل $z'=az+b$ مع $a=-\sqrt{3}-i$ و $b=-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

بما أن $|a|=2$ فإن T تشابه مباشر نسبته $k=2$، زاويته $\theta=Arg(a)=\frac{7\pi}{6}$ لأن $\begin{cases}\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-1}{2}\end{cases}$

و مركزه Ω لاحقته $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}+i}$ و منه $z_\Omega=\frac{\left(-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(1+\sqrt{3}-i\right)}{\left(1+\sqrt{3}+i\right)\left(1+\sqrt{3}-i\right)}$ أي أن $z_\Omega=i$ إذن $\Omega(0;1)$

2) إن $\Omega A=|z_A-z_\Omega|$ ومنه $\Omega A=\left|\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right|$ أي أن $\Omega A=\frac{1}{2}$ و $\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega A}\right)=Arg\left(z_A-z_\Omega\right)$ و منه $\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega A}\right)=Arg\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)$

إذن $\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega A}\right)=\theta'=-\frac{\pi}{6}$ لأن $\begin{cases}\cos\theta'=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta'=\frac{-1}{2}\end{cases}$

3) أ. إنشاء النقط M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 مع توضيح كيفية الإنشاء في أخر حل التمرين

ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$. مع z_n هي لاحقة النقطة M_n

(1) من أجل $n=0$: $z_0-i=2^0e^{i\times 0}\left(z_0-i\right)$ محققة ، لأن $z_0-i=z_0-i$

(2) من أجل عدد طبيعي n معطى ، نفرض أن $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$ ، و لنبرهن أن $z_{n+1}-i=2^{n+1}e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$

بما أن $M_{n+1}=T\left(M_n\right)$ فإن $z_{n+1}-z_\Omega=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-z_\Omega\right)$ أي أن $z_{n+1}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-i\right)$

و بما أن فرضا $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$ فإن $z_{n+1}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\times\left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)\right)$ ومنه $z_{n+1}-i=2^{n+1}e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$

من (1) و (2) ينتج من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$

جـ. (1) نبين أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية :

الطريقة الأولى : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=|z_n-i|$ و بما أن $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$

فإن $|z_n-i|=2^n\times|z_0-i|$ و بما أن $|z_0-i|=\Omega A=\frac{1}{2}$ فإن $|z_n-i|=\frac{1}{2}\times 2^n$ ومنه $u_n=2^{n-1}$ و بالتالي $u_{n+1}=2u_n$

وعليه $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$

- **الطريقة الثانية :** ليكن n عدد طبيعي ، بما أن $M_{n+1}=T\left(M_n\right)$ فإن $z_{n+1}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-i\right)$

ومنه $|z_{n+1}-i|=2\left|\left(z_n-i\right)\right|$ وعليه $u_{n+1}=2u_n$ ومنه $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$

(2) نبين أن $\left(v_n\right)$ متتالية حسابية :

الطريقة الأولى: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=Arg\left(z_n-i\right)$ وبما أن $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$

فإن $Arg\left(z_n-i\right)=\frac{7n\pi}{6}+Arg\left(z_0-i\right)$ و بما أن $Arg\left(z_0-i\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega A}\right)=-\frac{\pi}{6}$ فإن $Arg\left(z_n-i\right)=\frac{7n\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$

ومنه $v_n=\frac{7n\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$ و عليه $v_{n+1}=\frac{7(n+1)\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$ ينتج أن $v_{n+1}=v_n+\frac{7\pi}{6}$ و باتالي $\left(v_n\right)$ متتالية حسابية أساسها $r=\frac{7\pi}{6}$

- **الطريقة الثانية :** ليكن n عدد طبيعي ، بما أن $M_{n+1}=T\left(M_n\right)$ فإن $z_{n+1}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-i\right)$

ومنه $Arg\left(z_{n+1}-i\right)=\frac{7\pi}{6}+Arg\left(z_n-i\right)$ وعليه $v_{n+1}=v_n+\frac{7\pi}{6}$ و بالتالي $\left(v_n\right)$ متتالية حسابية أساسها $r=\frac{7\pi}{6}$

د. $\Omega M_n \geq 10^2$ معناه $|z_n - i| \geq 10^2$ أي أن $u_n \geq 10^2$ ومنه $2^{n-1} \geq 10^2$ إذن $\ln\left(2^{n-1}\right) \geq \ln 10^2$ ينتج أن $(n-1)\ln 2 \geq \ln 10^2$

وعليه $(n-1) \geq \dfrac{\ln 10^2}{\ln 2}$ و بالتالي $n \geq \dfrac{\ln 10^2}{\ln 2} + 1$ أي أن $n \geq 7,64$ و بما أن n عدد طبيعي فإن أصغر عدد طبيعي يحقق $\Omega M_n \geq 10^2$ هو 8

هـ. النقط Ω ، A و M_n في استقامية إذا وفقط إذا كان $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega M_n}\right) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ومنه Ω ، A و M_n في استقامية إذا وفقط إذا كان $Arg\left(\dfrac{z_n - i}{z_0 - i}\right) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

بما أن $Arg(z_n - i) = \dfrac{7n\pi}{6} + Arg(z_0 - i)$ فإن $Arg(z_n - i) - Arg(z_0 - i) = \dfrac{7n\pi}{6}$ ومنه $Arg\left(\dfrac{z_n - i}{z_0 - i}\right) = \dfrac{7n\pi}{6}$

و عليه Ω ، A و M_n في استقامية إذا وفقط إذا كان $\dfrac{7n\pi}{6} = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ينتج Ω ، A و M_n في استقامية إذا وفقط إذا كان $7n = 6k$ ، ينتج أن 6 يقسم $7n$ بما أن 6 أولي مع 7 فإن 6 يقسم n ومنه $n = 6\alpha$ مع α عدد طبيعي

و بالتالي Ω ، A و M_n في استقامية إذا وفقط إذا كان $n = 6\alpha$ مع α عدد طبيعي

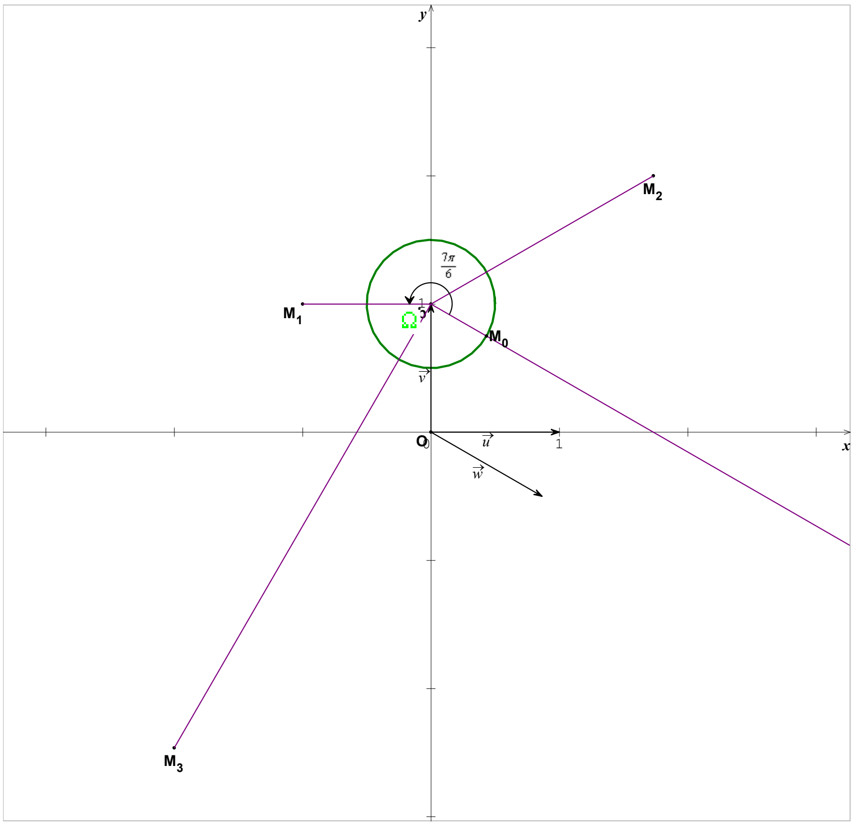
- **إنشاء النقط M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 مع توضيح كيفية الإنشاء :**

(1) إنشاء النقطة M_0 : بما أن $\Omega M_0 = \dfrac{1}{2}$ و $\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ فإن M_0 هي نقطة تقاطع الدائرة (Γ) التي مركزها Ω و نصف قطرها $\dfrac{1}{2}$ و نصف المستقيم الذي مبدأه النقطة Ω و الموجه بالشعاع $\vec{w}$ بحيث $\left(\vec{u};\vec{w}\right) = \dfrac{-\pi}{6}$

(2) إنشاء النقطة M_1 : بما أن $M_1 = T(M_0)$ فإن $\Omega M_1 = 2\Omega M_0 = 1$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M_0};\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$

(3) إنشاء النقطة M_2 : بما أن $M_2 = T(M_1)$ فإن $\Omega M_2 = 2\Omega M_1 = 2$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M_1};\overrightarrow{\Omega M_2}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$

(4) إنشاء النقطة M_3 : بما أن $M_3 = T(M_2)$ فإن $\Omega M_3 = 2\Omega M_2 = 4$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M_2};\overrightarrow{\Omega M_3}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$



✓ **التمرين الرابع:**

(I)

1) أ. f_k حل للمعادلة التفاضلية (E) معناه $2f'_k(x)=\left(f_k(x)-x\right)^2+1$

إن الدالة f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما :

$x\mapsto x$ و $x\mapsto \dfrac{1-ke^x}{1+ke}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'_k(x)=1+\dfrac{-ke^x\left(1+e^x\right)-ke^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}$

أي أن $f'_k(x)=1-\dfrac{2ke^x}{\left(1+ke^x\right)^2}$ ومنه $f'_k(x)=\dfrac{1+k^2e^{2x}}{\left(1+ke^x\right)^2}$ إذن $(1)...$ $2f'_k(x)=\dfrac{2\left(1+k^2e^{2x}\right)}{\left(1+ke^x\right)^2}$

من جهة أخرى : $\left(f_k(x)-x\right)^2+1=\dfrac{\left(1-ke^x\right)^2}{\left(1+ke^x\right)^2}+1$ أي أن $\left(f_k(x)-x\right)^2+1=\dfrac{\left(1-ke^x\right)^2+\left(1+ke^x\right)^2}{\left(1+ke^x\right)^2}$

ومنه $\left(f_k(x)-x\right)^2+1=\dfrac{2+2k^2e^{2x}}{\left(1+ke^x\right)^2}$ إذن $(2)...$ $\left(f_k(x)-x\right)^2+1=\dfrac{2\left(1+k^2e^{2x}\right)}{\left(1+ke^x\right)^2}$

من (1)و (2) ينتج أن $2f'_k(x)=\left(f_k(x)-x\right)^2+1$ و بالتالي f_k حل للمعادلة التفاضلية (E)

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f_k على $\mathbb{R}$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'_k(x)=\dfrac{1}{2}\left[\left(f_k(x)-x\right)^2+1\right]$

و بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\left(f_k(x)-x\right)^2\geq 0$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'_k(x)>0$

و عليه الدالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) أ. لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=-\infty$ ؛ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-ke^x}{1+ke^x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-t}{1+t}=1$. ($\lim\limits_{x\to-\infty} ke^x=0$)

ب. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=+\infty$ ؛ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-ke^x}{1+ke^x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-t}{1+t}=-1$. ($\lim\limits_{x\to+\infty} ke^x=+\infty$)

جـ. **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'_k(x)$	$+$
$f_k(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) أ . ليكن x عدد حقيقي لدينا : $f_k(x)=x+\dfrac{1+ke^x-2ke^x}{1+ke^x}$ ومنه $f_k(x)=x+\dfrac{1+ke^x}{1+ke^x}-\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}$

أي أن $f_k(x)=x+1-\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}$ (تقبل كل طريقة أخرى صحيحة)

- ليكن x عدد حقيقي لدينا : $x-1+\dfrac{2}{1+ke^x}=x+\dfrac{-1-ke^x+2}{1+ke^x}$ ومنه $x-1+\dfrac{2}{1+ke^x}=x+\dfrac{1-ke^x}{1+ke^x}$

أي أن $f_k(x)=x-1+\dfrac{2}{1+ke^x}$ (تقبل كل طريقة أخرى صحيحة)

ب. (1) بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_k(x)=x-1+\dfrac{2}{1+ke^x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+ke^x}=0$ فإن المنحني (C_k) يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x-1$

(2) بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_k(x)=x+1-\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}=0$ فإن المنحني (C_k) يقبل عند $-\infty$ مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y=x+1$

جـ. (1) دراسة وضعية (C_k) بالنسبة إلى (Δ) : من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_k(x)-(x-1)=\dfrac{2}{1+ke^x}$

بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\dfrac{2}{1+ke^x}>0$ (لأن $k>0$) فإن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_k(x)-(x-1)>0$

و بالتالي المنحني (C_k) يقع أعلى المستقيم (Δ)

(2) دراسة وضعية (C_k) بالنسبة إلى (Δ') : من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_k(x)-(x+1)=-\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}$

بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}<0$ (لأن $k>0$) فإن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_k(x)-(x+1)<0$

و بالتالي المنحني (C_k) يقع أسفل المستقيم (Δ')

(II)

1) أ. إن $f_1(x)=x+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-x$ و لدينا: $f_1(-x)=-x+\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-x+\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$ ومنه $f_1(-x)=-x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

أي أن $f_1(-x)=-x-\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ و عليه $f_1(-x)=-\left(x+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)$ أي أن $f_1(-x)=-f_1(x)$ إذن f_1 دالة فردية

التفسير الهندسي : مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحني (C_1)

ب. من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'_1(x)=1-\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

الدالة f'_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f''_1(x)=-\dfrac{2e^x(1+e^x)^2-2e^x\times(1+e^x)\times 2e^x}{(1+e^x)^4}$

أي أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f''_1(x)=-\dfrac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $2e^x>0$ و $(1+e^x)^3>0$

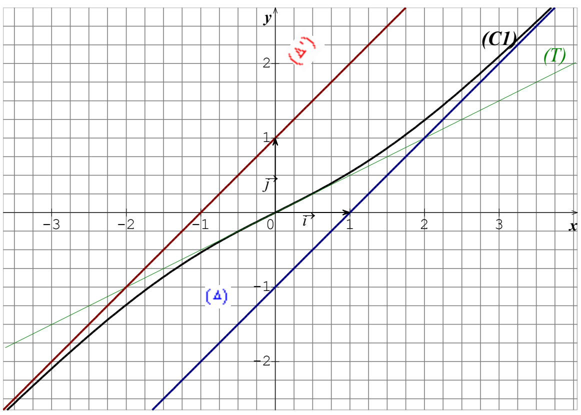
فإن إشارة $f''_1(x)$ من إشارة e^x-1 و بالتالي تعطى إشارة $f''_1(x)$ على النحو التالي :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''_1(x)$	$-$ 0 $+$

و عليه مبدأ المعلم هو نقطة انعطاف للمنحني (C_1)

جـ. تعيين معادلة للمماس (T) للمنحني (C_1) : $(T):\ y=f'_1(0)x+f_1(0)$ ومنه $(T):\ y=\dfrac{1}{2}x$

2) إنشاء المماس (T) و المنحني (C_1) :



3) لدينا (E) تكافئ $\frac{1-e^x}{1+e^x}=m$ ومنه (E) تكافئ $x+\frac{1-e^x}{1+e^x}=x+m$

و بالتالي حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_1) و المستقيم (Δ_m) المعرف بالمعادلة $y=x+m$

ومنه : لما $m\leq -1$ أو $m\geq 1$ ؛ المعادلة (E) لا تقبل حلول

لما $-1<m<0$ ، للمعادلة حل وحيد موجب

لما $m=0$ ، للمعادلة حل وحيد معدوم

لما $0<m<1$ ، للمعادلة حل وحيد سالب

4) بما أن F هي الدالة الأصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0 فإن $F(x)=\int_0^x f_1(t)\ dt$

أ. نبين أن الدالة F دالة زوجية :

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا $F(-x)=\int_0^{-x} f_1(t)\ dt$ ، لنضع $t=-y$ نجد $dt=-dy$

و لما $t=0\ :\ y=0$ و لما $t=-x\ :\ y=x$ وعليه $F(-x)=-\int_0^{y} f_1(-y)\ dy$ و بما أن الدالة f_1 دالة فردية

فإن من أجل كل عدد حقيقي y : $f_1(-y)=-f_1(y)$ ومنه $F(-x)=\int_0^{y} f_1(y)\ dy$ و بالتالي $F(-x)=F(x)$

و عليه الدالة F دالة زوجية

- دراسة اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$:

بما أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $F'(x)=f_1(x)$

و من خلال التمثيل البياني للدالة f_1 نستنتج أن :

- لما $x\in]-\infty;0]\ :\ f_1(x)\leq 0$ أي أن لما $x\in]-\infty;0]\ :\ F'(x)\leq 0$
- لما $x\in[0;+\infty[\ :\ f_1(x)\geq 0$ أي أن لما $x\in[0;+\infty[\ :\ F'(x)\geq 0$

و بالتالي الدالة F متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0]$

ب. تعيين عبارة الدالة F : بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_1(x)=x+1-2\frac{e^x}{1+e^x}$

و عليه $F(x)=\int_0^x\left(t+1-2\frac{e^t}{1+e^t}\right)dt$ ومنه $F(x)=\int_0^x(t+1)\ dt-2\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}\ dt$

و بما أن الدالة $t\mapsto\frac{1}{2}t^2+t$ هي دالة أصلية للدالة $t\mapsto t+1$ وعليه $\int_0^x(t+1)\ dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2+x$

كذلك الدالة $t\mapsto\frac{e^t}{e^t+1}$ هي من نمط $t\mapsto\frac{u'(t)}{u(t)}$ فإن الدالة $t\mapsto\ln(e^t+1)$ دالة أصلية لها

و عليه $\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}\ dt=\left[\ln(e^t+1)\right]_0^x=\ln(e^x+1)-\ln 2$ و منه $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2(\ln(e^x+1)-\ln 2)$

أي أن $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2\ln(e^x+1)+\ln 4$

جـ. إن $S=\left(\int_0^1 f_1(x)\ dx\right)\times 4cm^2$ و بما أن F دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$ فإن

$S=\left(\frac{1}{2}x^2+x-2\ln(e^x+1)+\ln 4\right)\times 4cm^2$ أي أن $S=(2x^2+4x-8\ln(e^x+1)+4\ln 4)cm^2$

انتهى

الشعبة: نهائي رياضيات
الأستاذ : محمد علالو

الموضوع رقم 05

التمرين الأول(04 نقط) :

n عدد طبيعي أكبر من 1

يحتوي صندوق على 3 كرات سوداء و n كرة بيضاء . كلها متمايزة عند اللمس . نسحب من هذا الصندوق عشوائيا و في آن واحد كرتين

1) احسب بدلالة n احتمال الحصول :

أ. كرتين من لونين مختلفين

ب. كرتين من نفس اللون

جـ. كرة سوداء على الأقل

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ، عدد الكرات السوداء المسحوبة

أ. عين قيم المتغير العشوائي X ،ثم عرف قانون احتماله

ب. احسب بدلالة n الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

جـ. عين العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X)=1$

د. من أجل قيمة n المعينة ، أحسب σ الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني(04 نقط) :

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $91x+10y=1 \;...(E)$

أ. تحقق من وجود حلول للمعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $91x+10y=412 \;...(E')$

جـ. حل المعادلة (E')

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $A_n=3^{2n}-1$ مضاعف للعدد 8

3) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E'') ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $A_3x+A_2y=3296 \;...(E'')$

أ. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E'')

ب. بين أن المعادلة (E'') تقبل حلا وحيدا $(x_0;y_0)$ من الأعداد الطبيعية يطلب تعينه

التمرين الثالث(05 نقط) :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. وحدة الرسم 2 cm

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقتها على الترتيب : $z_A=-2i$ ، $z_B=3-2i$ و $z_C=1+i$ ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z'=-2\overline{z}+2i$

1) أ. عين لاحقات النقط A' ، B' و C' صور كل من A ، B و C على الترتيب بالتحويل النقطي T .

ب. علم النقط A ، B و C و A' ، B' و C' .

2) بين أن T هو تركيب لتحويلين نقطيين بسيطين يطلب تحديدهما.

3) بين أنه لما تتغير النقطة M على المستقيم (Δ) الذي $y=-2$ معادلة له، فإن النقطة M' تتغير كذلك على (Δ)

4) بين أنه من أجل كل نقطة M لاحقتها z ؛ $|z'+2i|=2|z+2i|$ ، فسر النتيجة هندسيا

5) من أجل كل نقطة M متمايزة عن A ، نعتبر العدد الحقيقي θ عمدة للعدد المركب $z+2i$

أ. فسر هندسيا العدد θ

ب. استنتج بدلالة θ ، عمدة للعدد المركب $z'+2i$

جـ. بين أن العدد المركب $(z+2i)(z'+2i)$ هو عدد حقيقي سالب تماما

د. ما قولك حول نصفي المستقيمين $[AM)$ و $[AM')$ ؟ برر إجابتك

و. باستعمال المعلومات المحصل عليها أعله ، اقترح طريقة لإنشاء النقطة M'

➢ **التمرين الرابع(07 نقاط) :**

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+1}\,e^{-x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1 بقيم أكبر

ب. فسر بيانيا النتيجة المحل عليها

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

4) نعتبر المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x$

بين أن (Δ) يقطع المنحني (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، ثم تحقق أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$

5) أ. عين معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة صفر

ب. أرسم المماس (T) ، المستقيم (Δ) و المنحني (C_f)

6) أ . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $x+1\le e^{x}$

ب. استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;+\infty[$ ؛ $f(x)\le e^{-\frac{x}{2}}$

7) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda\ge 1$ ، و لتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\lambda$ و $y=0$ بين أن : $0\le S(\lambda)\le \frac{2}{\sqrt{e}}$

(II) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=\sqrt{x+1}\,e^{-\frac{x}{n}}$.

وليكن (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتيهما

2) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ المنحنيات (C_n) تقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في نقطة M_n فاصلتها α_n

ب. أدرس طبيعة المتتالية العددية (α_n)

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و(C_{n+1})

4) نضع $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $A_n=\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$

أ. أحسب العدد الحقيقي I

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $1-e^{\frac{1}{n}}\le e^{-\frac{1}{n}}-1$

جـ. استنتج نه من أجل كل x من المجال $[-1;+1]$ ؛ $\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right|\le e^{\frac{1}{n}}-1$

د. بين أن : $|A_n-I|\le\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ ، ثم استنتج أن المتتالية (A_n) متقاربة

انتهى

✓ التمرين الأول: بما أن السحب يتم في آن واحد فإننا نوظف التوفيقات وعليه عدد الحالات الممكنة هو

$C_{n+3}^2=\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2(n+1)!}$ وعليه $C_{n+3}^2=\frac{(n+3)(n+2)}{2}$

1) أ. حساب $p(A)$ حيث A هو الحدث : " الحصول على كرتين من لونين مختلفين"

عدد الحالات المواتية للحدث A هو $C_3^1\times C_n^1=3n$ ومنه $p(A)=\frac{3n}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$

ب. حساب $p(B)$ حيث B هو الحدث : " الحصول على كرتين من نفس اللون"

عدد الحالات المواتية للحدث B هو $C_3^2+C_n^2=3+\frac{n!}{2!(n-2)!}$ أي أن $C_3^2+C_n^2=3+\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}$

ومنه $C_3^2+C_n^2=3+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+6}{2}$ وعليه $p(B)=\frac{\frac{n^2-n+6}{2}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$

جـ. حساب $p(C)$ حيث C هو الحدث : " الحصول على كرة سوداء على الأقل"

عدد الحالات المواتية للحدث C هو $C_3^2+C_3^1\times C_n^1=3+3\frac{n!}{1!(n-1)!}$ أي أن $C_3^2+C_3^1\times C_n^1=3+\frac{3n(n-1)!}{(n-1)!}$

ومنه $C_3^2+C_3^1\times C_n^1=3+3n$ وعليه $p(C)=\frac{3+3n}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{6n+6}{(n+3)(n+2)}$.

2) أ. قيم المتغير العشوائي X هي : 2 ، 1 ، 0 :

- لنعين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

(1) $p(X=0)=\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}$ و بما أن $C_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$ فإن $p(X=0)=\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$

(2) $p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_n^1}{C_{n+3}^2}$ و بما أن $C_3^1\times C_n^1=3n$ فإن $p(X=1)=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$

(3) $p(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}$ و بما أن $C_3^2=3$ فإن $p(X=2)=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$

$(X=x_i)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$	$\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$	$\frac{6}{(n+3)(n+2)}$

ب. حساب بدلالة n الأمل الرياضياتي $E(X)$:

لدينا $E(X)=\left(0\times\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}\right)+\left(1\times\frac{6n}{(n+3)(n+2)}\right)+\left(2\times\frac{6}{(n+3)(n+2)}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{6n+12}{(n+3)(n+2)}$

جـ. $E(X)=1$ إذا وفقط إذا كان $\frac{6n+12}{(n+3)(n+2)}=1$ ومنه $E(X)=1$ إذا وفقط إذا كان $n^2-n-6=0$

إن مميز المعادلة $n^2-n-6=0$ هو $\Delta=25$ ومنه الحلين هما $n_1=3$ و $n_2=-2$ و بما أن n عدد طبيعي

فإن $E(X)=1$ إذا وفقط إذا كان $n=3$

$(X=x_i)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

د. من أجل $n=3$ ، قانون احتمال المتغير العشوائي X يعطى على النحو التالي
والأمل الرياضياتي هو $E(X)=1$

- **حساب التباين** $V(X)$ **:** إن $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

لنحسب $E(X^2)$: إن $E(X^2)=\left(0^2\times\frac{1}{5}\right)+\left(1^2\times\frac{3}{5}\right)+\left(2^2\times\frac{1}{5}\right)$ ومنه $E(X^2)=\frac{7}{5}$

ومنه $V(X)=\frac{7}{5}-1$ إذن $V(X)=\frac{2}{5}$

- **حساب الانحراف المعياري** σ **:** إن $\sigma=\sqrt{V(X)}$ ومنه $\sigma=\sqrt{\frac{2}{5}}$ أي أن $\sigma=\frac{\sqrt{10}}{5}$

✓ التمرين الثاني :

1) أ. بما أن $91=10(9)+1$ فإن 91 أولي مع 10 و بالتالي حسب مبرهنة بيزو المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. بما أن $91=10(9)+1$ فإن $91(1)+10(-9)=1$ ومنه الثنائية $(1;-9)$ حل خاص للمعادلة (E)

- استنتاج حل خاص للمعادلة (E') :

بما أن $91(1)+10(-9)=1$ فإن $91(412)+10(-3708)=412$ ومنه الثنائية $(412;-3078)$ حل خاص للمعادلة (E')

جـ. تعيين حلول المعادلة (E') : لدينا $91x+10y=412$ و $91(412)+10(-3708)=412$

إذن $91x+10y=91(412)+10(-3708)$ ومنه $...(*)$ $91(x-412)=10(-3708-y)$ و عليه 10 يقسم $91(x-412)$

و بما أن 91 أولي مع 10 فإنه حسب مبرهنة قوص 10 يقسم $(x-412)$ ومنه $x-412=10k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

أي أن $x=10k+412$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد $y=-91k-3708$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بالعكس بتعويض x و y في المعادلة المعطاة (E') نجد $91(10k+412)+10(-91k-3708)=412$ محققة

وعليه حلول المعادلة (E') هي الثنائيات المرتبة $(10k+412;-91k-3708)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

1) بما أن مع $3^2\equiv1[8]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(3^2)^n\equiv1^n[8]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم؛ $3^{2n}\equiv1[8]$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $A_n\equiv0[8]$

2) أ. بما أن كلا من A_2 و A_3 من مضاعفات 8 فإن $(E")$ تكافئ $91x+10y=412$ أي أن $(E")$ تكافئ (E')

وعليه حلول المعادلة $(E")$ هي الثنائيات المرتبة $(10k+412;-91k-3708)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ب. المعادلة $(E")$ تقبل حل $(x_0;y_0)$ من الأعداد لطبيعية معناه $x_0\geq0$ و $y_0\geq0$

و بما أن $x_0=10k+412$ و $y_0=-91k-3708$ فإن $x_0\geq0$ و $y_0\geq0$ تكافئ $10k+412\geq0$ و $-91k-3708\geq0$

ومنه $x_0\geq0$ و $y_0\geq0$ تكافئ $10k+412\geq0$ و $-91k-3708\geq0$

وعليه $x_0\geq0$ و $y_0\geq0$ تكافئ $-\frac{206}{5}\leq k\leq-\frac{3708}{91}$ وبما أن $k\in\mathbb{Z}$ فإن $k=-41$

ينتج أنه توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية التي هي حل للمعادلة $(E")$ هي $(2;23)$

✓ التمرين الثالث :

1) أ. $A'=T(A)$ معناه $z_{A'}=-2\bar{z}_A+2i$ ومنه $z_{A'}=-2(2i)+2i$ نجد $z_{A'}=-2i$

$B'=T(B)$ معناه $z_{B'}=-2\bar{z}_B+2i$ ومنه $z_{B'}=-2(3+2i)+2i$ نجد $z_{B'}=-6-2i$

$C'=T(C)$ معناه $z_{C'}=-2\bar{z}_C+2i$ ومنه $z_{C'}=-2(1-i)+2i$ نجد $z_{C'}=-2+4i$

لاحظ أن $T(A)=A$ تعني أن النقطة A نقطة صامدة بالتحويل النقطي T

ب. تعليم النقط A ، B و C و A' ، B' و C' في نهاية حل التمرين

2) نعتبر h التحاكي الذي نسبته -2 ومركزه النقطة A و $S_{(ox)}$ التناظر المحوري بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

لنبرهن أن $T = h\circ S_{(ox)} = S_{(ox)}\circ h$:

- لنبين أن $T = h\circ S_{(ox)}$ ؛ لدينا : $h\circ S_{(ox)} : M(z) \xrightarrow{S_{(ox)}} M_1(z_1) \xrightarrow{h} M'(z')$

بما أن $M_1 = S_{(ox)}(M)$ فإن $z_1 = \overline{z}$ و $M' = h(M_1)$ فإن $z' = -2z_1 + 2i$ ومنه $z' = -2\overline{z} + 2i$

وعليه $T = h\circ S_{(ox)}$ ، ينتج أن T هو تركيب التناظر المحوري بالنسبة إلى حامل الفواصل متبوع بتحاكي نسبته -2 و مركزه النقطة A

ملاحظة:يمكن إثبات أن T هو تركيب التناظر المحوري بالنسبة إلى حامل التراتيب متبوع بتحاكي نسبته 2 ومركزه النقطة A

3) بما أن $M\in(\Delta)$ فإن $y=-2$ ومنه $M(x;-2)$ مع x عدد حقيقي ومنه $z = x-2i$ إذن $\overline{z} = x+2i$

وعليه $z' = -2(x+2i)+2i$ أي أن $z' = -2x-2i$ و بالتالي $M'(-2x;-2)$ ومنه $M'\in(\Delta)$

4) لدينا $z'+2i = -2\overline{z}+4i$ إذن $z'+2i = -2(\overline{z}-2i)$ ومنه $z'+2i = -2\left(\overline{z+2i}\right)$ إذن $|z'+2i| = 2\left|\overline{z+2i}\right|$

و عليه $|z'+2i| = 2|z+2i|$ لأن $\left|\overline{z+2i}\right| = |z+2i|$

- **التفسير الهندسي للنتيجة :** بما أن $|z'+2i| = 2|z+2i|$ فإن $|z'-(-2i)| = 2|z-(-2i)|$

ومنه $|z_{M'}-z_A| = 2|z_M - z_A|$ وعليه $AM' = 2AM$

5) أ. التفسير الهندسي للعدد الحقيقي θ : بما أن النقطة M متمايزة عن A فإن العدد المركب $z+2i$ غير معدوم

و لدينا $Arg(z+2i) = \theta + 2k\pi$ مع k عدد صحيح

ومنه $Arg(z-(-2i)) = \theta+2k\pi$ إذن $Arg(z_M - z_A) = \theta + 2k\pi$ وعليه $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$ مع k عدد صحيح

ب. بما أن النقطة M متمايزة عن A فإن العدد المركب $z \neq -2i$ و $z' \neq -2i$

لدينا $z'+2i = -2\left(\overline{z+2i}\right)$ إذن $Arg(z'+2i) = Arg\left(\overline{z+2i}\right) + \pi$

ومنه $Arg(z'+2i) = -Arg(z+2i)+\pi$ وعليه $Arg(z'+2i) = -\theta+\pi+2k\pi$ لأن $Arg(z+2i)=\theta$

ينتج أن $Arg(z'-(-2i)) = \theta+2k\pi$ إذن $Arg(z_{M'}-z_A) = \theta+2k\pi$ وعليه $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \pi-\theta+2k\pi$ مع k عدد صحيح

جـ. $(z+2i)(z'+2i)$ عدد حقيقي سالب تماما معناه $Arg[(z+2i)(z'+2i)] = (2k+1)\pi$ مع k عدد صحيح

لدينا $Arg[(z+2i)(z'+2i)] = Arg(z+2i) + Arg(z'+2i) + 2k\pi$ مع k عدد صحيح

و بما أن $Arg(z'+2i) = -\theta+\pi$ و $Arg(z+2i)=\theta$ فإن $Arg[(z+2i)(z'+2i)] = \theta-\theta+\pi+2k\pi$

ينتج أن $Arg[(z+2i)(z'+2i)] = (2k+1)\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و بالتالي $(z+2i)(z'+2i)$ عدد حقيقي سالب

* **<u>طريقة ثانية:</u>** بما أن $z'+2i = -2\left(\overline{z+2i}\right)$ فإن $(z+2i)(z'+2i) = -2(z+2i)\left(\overline{z+2i}\right)$

وبما أن $(z+2i)\left(\overline{z+2i}\right) = |z+2i|^2$ فإن $(z+2i)(z'+2i) = -2|z+2i|^2$

وبما أن $|z+2i|^2 > 0$ فإن $(z+2i)(z'+2i) < 0$

د. من أجل كل نقطة M متمايزة عن A ؛ لدينا $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = \theta+2k\pi$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \pi-\theta+2k\pi$

إذن $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \pi - (\vec{u};\overrightarrow{AM}) + 2k\pi$ أي أن $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \pi+2k\pi$

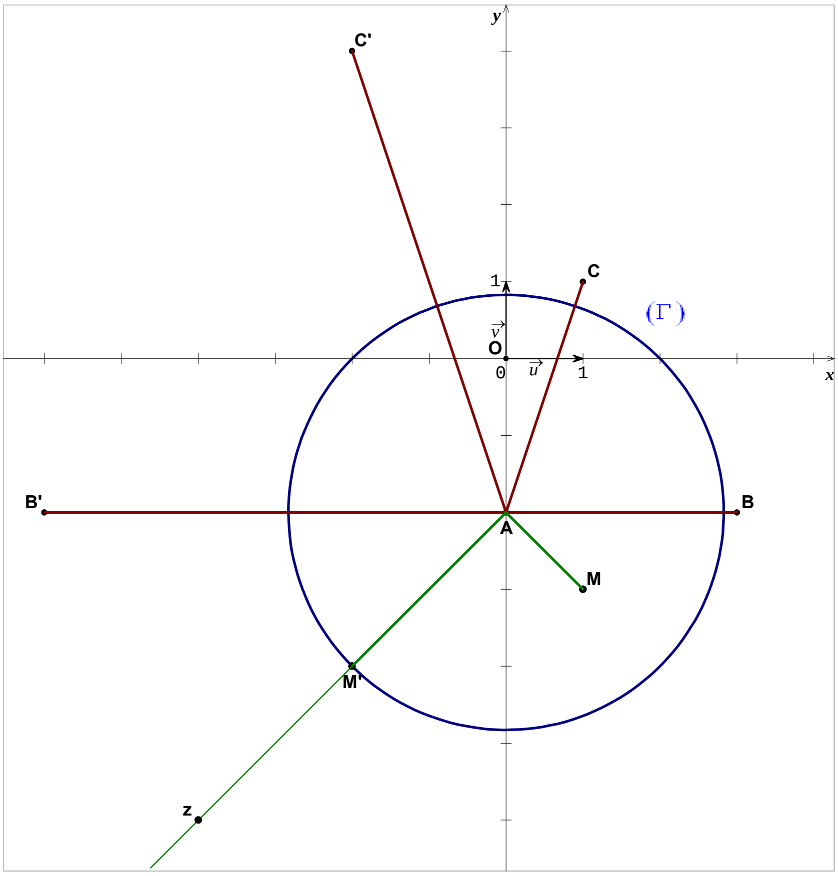
وعليه نصفى المستقيمين $[AM)$ و $[AM')$ متناظرين بالنسبة إلى حامل محور التراتيب

و. اقتراح طريقة لإنشاء النقطة M' : من أجل كل نقطة M معطاة متمايزة عن A

- ننشئ نصف المستقيم $[AM)$ ، ثم نصف المستقيم $[Az)$ نظير $[AM)$ بالنسبة إلى حامل محور التراتيب
- وبما أن $AM' = 2AM$ فإن نقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها A و نصف قطرها AM

لذا ننشئ الدائرة (Γ) التي مركزها A و نصف قطرها AM

فنتحصل على النقطة M' نقطة تقاطع الدائرة (Γ) ونصف المستقيم $[Az)$



✓ **التمرين الرابع:**

(I) (1 أ. لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{\sqrt{x+1}\,e^{-x}}{x+1}$ إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}} = +\infty$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1 قيم أكبر

ب. المنحني (C_f) يقبل على يمين النقطة $A(-1;0)$ مماسا معادلته $x=-1$

2) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} \times \dfrac{x}{e^x} = 0$ ، لأن :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$ ، (لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$) و

- **التفسير البياني** : المنحني (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y=0$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق عليه هما

$u : x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $v : x \mapsto e^{-x}$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{-x} - e^{-x}\sqrt{x+1}$

أي أن $f'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}\right)$ ومنه $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}} e^{-x}$

و بما أن من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $e^{-x} > 0$ و $2\sqrt{x+1} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-2x-1$

وعليه تعطى إشارة $f'(x)$ على النحو التالي

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

- **جدول التغيرات :**

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\searrow$	0

4) $M \in (C_f)\cap(\Delta)$ يكافئ $x\in[-1;+\infty[$ و $y=f(x)$ و $y=x$ ومنه $M \in (C_f)\cap(\Delta)$ يكافئ $x\in[-1;+\infty[$ و $f(x)=x$

وعليه $M \in (C_f)\cap(\Delta)$ يكافئ $x\in[-1;+\infty[$ و $f(x)-x=0$

نعتبر الدالة g المعرف على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بــ : $g(x)=f(x)-x$. لنطبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g

- الدالة g مستمرة على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين عليه هما $x\mapsto -x$ و الدالة f
- $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}+\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$)
- لندرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$: الدالة g قابلة للاشتقاق على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين عليه هما $x\mapsto -x$ و الدالة f ومن أجل كل x من $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $g'(x)=f'(x)-1$

بما أن من أجل كل x من $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)\le 0$ فإن من أجل كل x من $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $g'(x)<0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

وعليه المعادلة $g(x)=0$ أي $f(x)-x=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

- بما أن $g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}$ أي أن $g\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 0,24$ و $g(1)=f(1)-1=\sqrt{2}e^{-1}-1$ أي أن $g(1)\simeq -0,48$

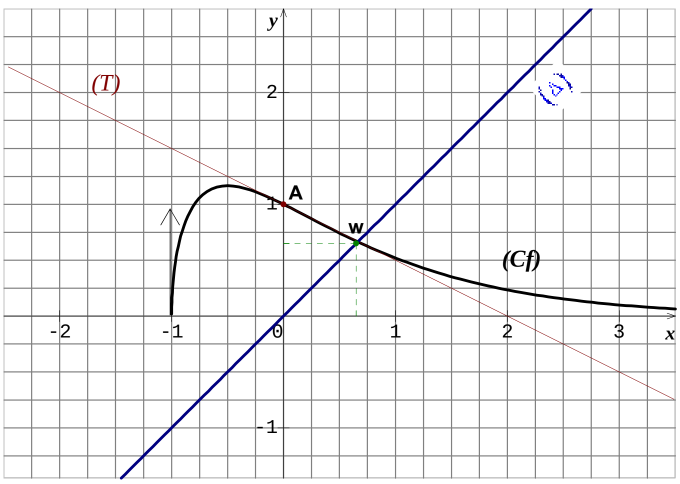
فإن $g(1)<g(\alpha)<g\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\frac{1}{2}<\alpha<1$

و بالتالي المستقيم (Δ) يقطع المنحني (C_f) في نقطة وحيدة $\omega(\alpha;\alpha)$ حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

5) أ. تعيين معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A: $(T): y=f'(0)x+f(0)$ وبما أن $f(0)=1$ و $f'(0)=\frac{-1}{2}$

فإن $(T): y=\frac{-1}{2}x+1$

ب. رسم المماس (T)، المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) :



6) أ . نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $x+1\le e^x$:

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=e^x-x-1$. لندرس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $h'(x)=e^x-1$

- $h'(x)=0$ يكافئ $e^x=1$ ومنه $h'(x)=0$ يكافئ $x=0$
- $h'(x)>0$ يكافئ $e^x>1$ ومنه $h'(x)>0$ يكافئ $x>0$

نستنتج إشارة $h'(x)$ على النحو التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

ينتج أن $h(0)=0$ هي قيمة حدية صغرى للدالة h على $\mathbb{R}$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $h(x)\ge 0$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $x+1\le e^x$.

ب. استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f(x)\le e^{-\frac{x}{2}}$

بما أن جل كل عدد حقيقي x ؛ $x+1\le e^x$ فإن من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $x+1\le e^x$

وعليه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $\sqrt{x+1}\le\sqrt{e^x}$ ومنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $\sqrt{x+1}\,e^{-x}\le e^{\frac{x}{2}}\times e^{-x}$

وبالتالي من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f(x)\le e^{-\frac{x}{2}}$

7) من الواضح أن $S(\lambda)\ge 0$ ، لنبين أن $S(\lambda)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$:

8) إن $S(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ وبما أن من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f(x)\le e^{-\frac{x}{2}}$ فإن $S(\lambda)\le\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

إن $\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_1^{\lambda}$ أي أن $\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}-e^{\frac{-1}{2}}\right)$ ومنه $\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{e}}-2e^{-\frac{\lambda}{2}}$

وبما أن من أجل $\lambda\ge 1$: $\frac{2}{\sqrt{e}}-2e^{-\frac{\lambda}{2}}\le\frac{2}{\sqrt{e}}$ فإن $\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}dx\le\frac{2}{\sqrt{e}}$ و عليه $S(\lambda)\le\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

ينتج أن $0\le S(\lambda)\le\int_1^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$.

(II)

1) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) و لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي

$M\in(C_n)\cap(C_{n+1})$ يكافئ $x\in[-1;+\infty[$ و $y=f_n(x)$ و $y=f_{n+1}(x)$ ومنه $M\in(C_n)\cap(C_{n+1})$ يكافئ ($x\ge -1$ و $f_{n+1}(x)=f_n(x)$)

لدينا $f_{n+1}(x)=f_n(x)$ يكافئ $\sqrt{x+1}\,e^{\frac{-x}{n+1}}=\sqrt{x+1}\;e^{\frac{-x}{n}}$. إذن $f_{n+1}(x)=f_n(x)$ يكافئ $\sqrt{x+1}\left(e^{\frac{-x}{n+1}}-e^{\frac{-x}{n}}\right)=0$.

ينتج أن $M\in(C_n)\cap(C_{n+1})$ يكافئ ($x\ge -1$ و $\sqrt{x+1}\left(e^{\frac{-x}{n+1}}-e^{\frac{-x}{n}}\right)=0$)

أي أن $M\in(C_n)\cap(C_{n+1})$ يكافئ ($x\ge -1$ و $\sqrt{x+1}=0$ أو $e^{\frac{-x}{n+1}}=e^{\frac{-x}{n}}$)

وعليه $M\in(C_n)\cap(C_{n+1})$ يكافئ ($x=-1$ أو $\frac{-x}{n+1}=\frac{-x}{n}$) ومنه $M\in(C_n)\cap(C_{n+1})$ يكافئ ($x=-1$ أو $x=0$)

ينتج أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من النقطتين $A(0;1)$ و المبدأ O

2) أ. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، الدالة f_n قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ هما: $u_1:x\mapsto\sqrt{x+1}$ و $u_2:x\mapsto e^{-\frac{x}{n}}$

و من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\frac{-x}{n}}-\frac{1}{n}\sqrt{x+1}e^{\frac{-x}{n}}$ أي أن $f_n'(x)=e^{\frac{-x}{n}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{n}\sqrt{x+1}\right)$

ومنه $f_n'(x)=e^{\frac{-x}{n}}\left(\frac{-2x-2+n}{2n\sqrt{x+1}}\right)$

المنحنيات (C_n) تقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل معناه $f_n'(x)=0$ أي أن $e^{\frac{-x}{n}}\left(\frac{-2x-2+n}{2n\sqrt{x+1}}\right)=0$

و بما أن من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $e^{\frac{-x}{n}}>0$ و $2n\sqrt{x+1}>0$ فإن $f_n'(x)=0$ تكافئ $-2x-2+n=0$

أي أن $f_n'(x)=0$ تكافئ $x=\frac{1}{2}n-1$ ، لنبين أن $\frac{1}{2}n-1\in]-1;+\infty[$. بما أن n عدد طبيعي غير معدوم فإن $\frac{1}{2}n>0$

ومنه $\frac{1}{2}n-1>-1$ وعليه $\frac{1}{2}n-1\in]-1;+\infty[$ و بالتالي المنحنيات (C_n) تقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة M_n التي فاصلتها $\alpha_n=\frac{1}{2}n-1$

ب. دراسة طبيعة المتتالية العددية (α_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\alpha_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)-1$ ومنه $\alpha_{n+1}=\frac{1}{2}n-1+\frac{1}{2}$ أي أن $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\frac{1}{2}$

وعليه (α_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$.

3) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_n) و (C_{n+1}) :

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، لدينا $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\sqrt{x+1}\left(e^{\frac{-x}{n+1}}-e^{\frac{-x}{n}}\right)$ ، ومنه :

- $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ يكافئ $\sqrt{x+1}\left(e^{\frac{-x}{n+1}}-e^{\frac{-x}{n}}\right)=0$ أي أن $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ يكافئ ($\sqrt{x+1}=0$ أو $e^{\frac{-x}{n+1}}=e^{\frac{-x}{n}}$)

إذن $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ يكافئ ($x+1=0$ أو $\frac{-x}{n+1}=\frac{-x}{n}$) أي أن $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ يكافئ ($x=-1$ أو $\frac{x}{n(n+1)}=0$)

نجد $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ يكافئ ($x=-1$ أو $x=0$)

- $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ يكافئ $\sqrt{x+1}\left(e^{\frac{-x}{n+1}}-e^{\frac{-x}{n}}\right)>0$ وبما أن من أجل كل x من $[-1;+\infty[$: $\sqrt{x+1}\geq 0$ فإن

$f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ يكافئ $e^{\frac{-x}{n+1}}>e^{\frac{-x}{n}}$ أي أن $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ يكافئ $\frac{-x}{n+1}>\frac{-x}{n}$

ومنه $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ يكافئ $\frac{-x}{n+1}+\frac{x}{n}>0$ أي أن $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ يكافئ $\frac{x}{n(n+1)}>0$

ينتج $f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ يكافئ $x>0$ ، و بالتالي $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ يكافئ $-1<x<0$

و عليه : (1) (C_n) و (C_{n+1}) يشتركان في النقطتين A و O

(2) في المجال $]0;+\infty[$: (C_{n+1}) يقع أعلى (C_n) ، (3) في المجال $]-1;0[$: (C_{n+1}) يقع أسفل (C_n)

4) أ. حساب العدد الحقيقي I :

إن الدالة $x\mapsto\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\sqrt{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ ومنه $I=\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3\right]_{-1}^{1}$

إذن $I=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $1-e^{\frac{1}{n}}\leq e^{-\frac{1}{n}}-1$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $-\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}$ وبما أن الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

فإن $e^{-\frac{1}{n}} \le e^{\frac{1}{n}}$ ومنه $-e^{\frac{1}{n}} \le -e^{-\frac{1}{n}}$ و عليه $1-e^{\frac{1}{n}} \le 1-e^{-\frac{1}{n}}$ لكن $1-e^{-\frac{1}{n}} \le e^{-\frac{1}{n}}-1$ إذن $1-e^{\frac{1}{n}} \le e^{-\frac{1}{n}}-1$

جـ. استنتاج أنه من أجل كل x من المجال $[-1;+1]$ ؛ $\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right| \le e^{\frac{1}{n}}-1$

بما أن $-1\le x\le 1$ فإن $-1\le -x\le 1$ ومنه $\frac{-1}{n}\le\frac{-x}{n}\le\frac{1}{n}$ وعليه $e^{\frac{-1}{n}}\le e^{\frac{-x}{n}}\le e^{\frac{1}{n}}$ ومنه $e^{\frac{-1}{n}}-1\le e^{\frac{-x}{n}}-1\le e^{\frac{1}{n}}-1$

و بما أن $1-e^{\frac{1}{n}}\le e^{-\frac{1}{n}}-1$ فإن $-\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\le e^{\frac{-x}{n}}-1\le\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ و بالتالي $\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right|\le e^{\frac{1}{n}}-1$

د. نبين أن : $\left|A_n-I\right|\le\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ ، ثم استنتاج أن المتتالية (A_n) متقاربة :

لدينا $A_n-I=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}e^{-\frac{x}{n}}\,dx-\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx$ ومنه $A_n-I=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\left(e^{-\frac{x}{n}}-1\right)dx$ إذن $\left|A_n-I\right|=\left|\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\left(e^{-\frac{x}{n}}-1\right)dx\right|$

وعليه $\left|A_n-I\right|\le\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right|dx$ ، و بما أن $\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right|\le e^{\frac{1}{n}}-1$ فإن $\sqrt{x+1}\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right|\le\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sqrt{x+1}$

ينتج أن $\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\left|e^{-\frac{x}{n}}-1\right|dx\le\int_{-1}^{1}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sqrt{x+1}\,dx$ ومنه $\left|A_n-I\right|\le\int_{-1}^{1}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sqrt{x+1}\,dx$

ومنه $\left|A_n-I\right|\le\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}\,dx$ أي أن $\left|A_n-I\right|\le\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)I$ و بالتالي $\left|A_n-I\right|\le\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

- استنتاج أن المتتالية (A_n) متقاربة :

بما أن $\left|A_n-I\right|\le\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ فإن $-\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\le A_n-I\le\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ ينتج أن $-\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+I\le A_n\le\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+I$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+I\right]=I$ و عليه $\lim_{n\to+\infty}A_n=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

ومنه المتتالية (A_n) متقاربة نحو $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

انتهى

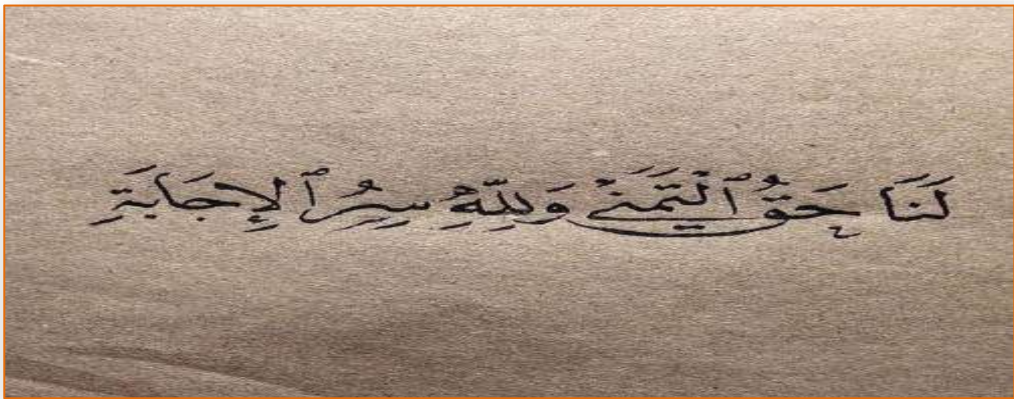
ملاحظة : الموضوع يحتوي أفكار عديدة و ممتازة ، تسمح لك عزيزي الطالب باكتساب قدرات لأبأس بها لمواجهة امتحان البكالوريا . انتمى أن تكون قد استفدت منها

شِعار العمل في هذا الموسم الدراسي 2024 / 2025 :

،، تعبُ المُراجعة أفضَل مِنْ ألمِ السُّقوط ،،

صناعة الطريق الذهبي نحو بكالوريا 2025

بالتوفيق و النَّجاح لجُموع التلاميذ الشُّرفاء



https://www.facebook.com/okba.bac.2010