الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — الدورة: 2026

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n+3n+4$

أ) احسب u_1 ، u_2

ب) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n \geq 3n+1$ ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n)

جـ) حدّد اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n+3n+7)$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ ، يُطلب حساب حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّ: $u_n=8\times 2^n-3n-7$

3) نضع: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ: $T_n=2^{n+4}-\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{2}n-15$

التمرين الثّاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريّات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها: كريّتان بيضاوان مرقّمتان بـ: 0 ، 2

وأربع كريّات حمراء مرقّمة بـ: 0 ، 1 ، 2 ، 3 وأربع كريّات خضراء مرقّمة بـ: 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات في آن واحد ونعتبر الحوادث:

A : « سحب كريّة حمراء على الأقل » ، B : « سحب ثلاث كريّات جداء أرقامها معدوم »

C : « سحب ثلاث كريّات من نفس اللون » ، D : « سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها أكبر من أو يساوي 8 »

1) أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الحوادث A ، B و C على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(D)=\frac{17}{120}$ وأنّ: $P(C\cap D)=\frac{1}{60}$

جـ) استنتج حساب احتمال الحادثة E : « سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها أصغر من أو يساوي 7 »

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريّات، عدد الكريّات التي تحمل رقما فرديا.

- عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثّالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ... $11x-5y=7$ ذات المجهولين الصّحيحين x و y

أ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلّا للمعادلة (E) فإنّ $y\equiv 3[11]$ ثمّ حلّ المعادلة (E)

ب) عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق: $|y-x|\leq 5$

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $a=11n+3$ ، $b=5n+2$ و $PGCD(a;b)=d$

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

ب) عيّن الثنائيات $(a;b)$ التي من أجلها يكون $d=7$

3) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $a^b\equiv 9[11]$

جـ) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $3^{1447}+a^b+a-b-9\equiv 0[11]$ و $2015<n<2037$

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5623}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، اكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

التمرين الرّابع: (07 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1+(1-x-x^2)e^{-x}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=(x^2-x-2)e^{-x}$

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]-1,7\,;-1,6[$

4) أ) عيّن معادلة لـ (T) مماس المنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ب) احسب $f(-2)$ ثمّ ارسم (T) و (c_f)

جـ) عيّن بيانيا قيم العدد الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x)=m$ حلان سالبان تماما.

5) أ) تحقّق أنّ الدّالة $H:x\mapsto(x^2+3x+2)e^{-x}$ أصلية للدّالة $h:x\mapsto(1-x-x^2)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ب) $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=0$ ، $x=\alpha$ و $x=0$.

- احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ ثمّ بيّن أنّ: $\mathcal{A}(\alpha)=\dfrac{4+\alpha^3}{1-\alpha-\alpha^2}$ ، $\mathcal{A}(\alpha)$ مقدرة بوحدة المساحة.

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n-3\times 2^n$

- احسب u_1 ، u_2 ثمّ حدّد اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n}{2^n}+3$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، يُطلب تعيين حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ: $u_n=4-3\times 2^n$

3) نضع: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

أ) احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج نهاية S_n

ب) بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $T_n=4n+7-6\times 2^n$

ج) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث: $L_n=T_0+T_1+\cdots+T_n$

التمرين الثّاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كريّة متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها:

كريّتان بيضاوان، خمس كريّات حمراء، ثلاث كريّات خضراء وكريّة واحدة سوداء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات على التوالي دون إرجاع ونعتبر الحوادث:

A: « سحب ثلاث كريّات من نفس اللّون » ، B: « سحب كريّة واحدة بيضاء فقط »

C: « سحب كريّة حمراء على الأكثر » ، D: « سحب كريّتين حمراوين على الأقل »

أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ و $P(D)$ احتمالات الحوادث A ، B ، C و D على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap D)=\dfrac{2}{33}$ ثمّ استنتج حساب $P(A\cup D)$

2) نفرض أنّ عدد الكريّات السّوداء في الكيس هو n حيث: $n\geq 2$ ونسحب منه كريّتين على التوالي مع الإرجاع.

- عيّن قيمة n حتى يكون احتمال سحب كريّتين سوداوين يساوي $\dfrac{1}{4}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 1447 على 7 وباقي القسمة الإقليدية للعدد 2687 على 13

ب) برّر أنّ العدد 1447 أوليّ ثمّ عيّن القواسم الطبيعية للعدد 2894

ج) جد الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $x(x+y)=2894$

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $a=7n+5$ ، $b=13n+9$ و $PGCD(a;b)=d$

- عيّن القيم الممكنة للعدد d ثمّ حدّد قيم n التي من أجلها يكون $d=2$

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $A=14n^2+17n+5$ و $B=26n^2+31n+9$

أ) بيّن أنّ العدد $(2n+1)$ يقسم كلاً من العددين A و B

ب) استنتج بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

4) من أجل $d=1$ ، احسب بدلالة n المضاعف المشترك الأصغر للعددين A و B

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-x\ln x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب النهايات: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} f(x)$ ، فسّر النتائج هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f'(x)=1+\dfrac{\ln x}{(x-x\ln x)^2}$

ب) نقبل أنّ إشارة $f'(x)$ موضحة في الجدول المقابل

x	0	α	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ ‖	$+$

- تحقّق أنّ $0{,}4<\alpha<0{,}5$

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

4) أ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

ب) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا β في المجال $]3{,}1;3[$

5) أ) ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) (نأخذ: $f(\alpha)\simeq 1{,}7$)

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x-x\ln x)=1$

6) h الدّالة المعرّفة على $]0;e[$ بـ: $h(x)=\ln(1-\ln x)$

- احسب $h'(x)$ ثمّ استنتج حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x$ ، $x=\frac{1}{e}$ و $x=1$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل . باك 2026
شعبة تقني رياضي .

صفحة 1

الموضوع الأول

التمرين الأول :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3n + 4 \end{cases}$$

1) أ) الحدود :

$U_1 = 2U_0 + 4 = 2 + 4 = 6$

$U_2 = 2U_1 + 7 = 2 \times 6 + 7 = 19$

ب) البرهان بالتراجع : $P(n) : U_n \geq 3n + 1$

$1 \geq 3(0) + 1$

$U_0 \geq 1$

إذن $P(0)$ محققة .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي :

$U_n \geq 3n + 1$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة

أي : $U_{n+1} \geq 3n + 4$

لدينا من فرضية التراجع : $U_n \geq 3n + 1$

منه ؛ $2U_n \geq 6n + 2$

$2U_n + 3n + 4 \geq 6n + 2 + 3n + 4$

$U_{n+1} \geq 9n + 6$

من أجل كل عدد طبيعي n : $9n + 6 > 3n + 4$

إذن : $U_{n+1} \geq 3n + 4$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 3n + 1$

• استنتاج $\lim_{n \to +\infty} U_n$:

لدينا : $\lim_{n \to +\infty} (3n + 1) = +\infty$

منه $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

ج) اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

$U_{n+1} - U_n = 2U_n + 3n + 4 - U_n$

$$\boxed{U_{n+1} - U_n = U_n + 3n + 4}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$U_n \geq 3n + 1$ و $3n + 1 > 0$

و $3n + 4 > 0$

إذن : $U_n + 3n + 4 > 0$

منه : $U_{n+1} - U_n > 0$

إذن المتتالية (U_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

2)

$V_{n+1} = \ln\left(U_{n+1} + 3(n+1) + 7\right)$

$= \ln\left(2U_n + 3n + 4 + 3n + 10\right)$

$V_{n+1} = \ln\left(2U_n + 6n + 14\right)$

$V_{n+1} = \ln\left[2\left(U_n + 3n + 7\right)\right]$

$V_{n+1} = \ln(2) + \ln(U_n + 3n + 7)$

$V_{n+1} = \ln(2) + V_n$

لدينا $V_{n+1} - V_n = \ln(2)$ ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(2)$

وحدها الأول : $V_0 = \ln(U_0 + 7)$

$V_0 = \ln(8) = \ln(2)^3 = 3\ln(2)$

• عبارة V_n بدلالة n :

$V_n = 3\ln(2) + n\ln(2)$

$$\boxed{V_n = (3 + n)\ln(2)}$$

عبارة u_n بدلالة n: $v_n = \ln(u_n + 3n + 7)$

ومنه: $e^{v_n} = u_n + 3n + 7$

$$u_n = e^{v_n} - 3n - 7$$

$$u_n = e^{(n+3)\ln(2)} - 3n - 7$$

$$u_n = e^{\ln(2)^{n+3}} - 3n - 7$$

$$u_n = 2^{n+3} - 3n - 7$$

$$u_n = 2^3 \times 2^n - 3n - 7$$

$$\boxed{u_n = 8 \times 2^n - 3n - 7}$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\left(3\ln 2 + (3+n)\ln 2\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(3+3+n)\ln(2)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}(n+1)(6+n)\ln(2)}$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$u_n = e^{v_n} - 7 - 3n$$

نضع: $t_n = e^{v_n}$ ومنه

$$t_n = e^{(\ln 2)(3+n)}$$

$$t_n = e^{\ln(2)^{3+n}} = 2^{3+n}$$

$t_n = 2^3 \times 2^n$ $\boxed{\text{صفحة 2}}$

$$t_n = 8 \times 2^n$$

(t_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $t_0 = 8$

نضع: $p_n = -7 - 3n$

(p_n) متتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول -7

ومنه $u_n = t_n + p_n$

$$T_n = t_0 + p_0 + t_1 + p_1 + \dots + t_n + p_n$$

$$T_n = (t_0 + t_1 + \dots + t_n) + (p_0 + p_1 + \dots + p_n)$$

$$T_n = t_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + \frac{(n+1)(p_0 + p_n)}{2}$$

$$T_n = 8 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} + \frac{1}{2}(n+1)(-14 - 3n)$$

$$= -8(1 - 2^{n+1}) + \frac{1}{2}(-14n - 3n^2 - 14 - 3n)$$

$$= -8 + 8 \times 2^{n+1} + \frac{1}{2}(-3n^2 - 17n - 14)$$

$$= -8 + 2^3 \times 2^{n+1} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n - 7$$

$$\boxed{T_n = 2^{n+4} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n - 15}$$

التمرين الثاني:

كريتان بيضاوان ⓪ ②

أربع كريات حمراء: ⓪ ① ② ③

أربع كريات خضراء: ① ② ③ ④

نسحب 3 كريات في آن واحد.

عدد الحالات الممكنة هو: $C_{10}^{3} = 120$

A" سحب كرية حمراء على الأقل"

$R\ \bar{R}\ \bar{R}$ أو $R\ R\ \bar{R}$ أو $R\ R\ R$

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2\, C_6^1 + C_4^3}{120}$$

$$P(A) = \frac{60+36+4}{120} = \frac{100}{120}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{5}{6}}$$

B" سحب 3 كريات جداء أرقامها معدوم"

$0\ \bar{0}\ \bar{0}$ أو $0\ 0\ \bar{0}$

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{64}{120}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{8}{15}}$$

C" سحب 3 كريات من نفس اللون"

$R\ R\ R$ أو $V\ V\ V$

$$P(C) = \frac{C_4^3 + C_4^3}{120} = \frac{8}{120}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{15}}$$

D" سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها أكبر من أو يساوي 8"

② ② ④ أو ① ③ ④ أو ③ ③ ②

③ ③ ④ أو ② ③ ④

$$P(D) = \frac{C_3^2 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_2^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_1^1 + C_3^1\, C_2^1\, C_1^1}{120}$$

صفحة 3

$$P(D) = \frac{3+4+3+1+6}{120}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{17}{120}}$$

"$C \cap D$" الحصول 3 كريات من نفس اللون ومجموع أرقامها أكبر من أو يساوي 8:

$V_1; V_2; V_4$ أو $V_2\ V_3\ V_4$

$$P(C \cap D) = \frac{C_1^1 C_1^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1 C_1^1}{120} = \frac{2}{120}$$

$$\boxed{P(C \cap D) = \frac{1}{60}}$$

ج. "E" سحب 3 كريات مجموع أرقامها أصغر من أو يساوي 7"

$$P(E) = 1 - P(D) = 1 - \frac{17}{120}$$

$$\boxed{P(E) = \frac{103}{120}}$$

② $X \in \{0; 1; 2; 3\}$

6 أرقام زوجية و 4 أرقام فردية

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

الأمل الرياضياتي: صفحة 4

$E(X) = 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{2}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{30}\right)$

$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{6}{10} + \frac{3}{30} = \frac{6}{5}$

$\boxed{E(X) = \frac{6}{5}}$

التمرين الثالث:

$11x - 5y = 7 \quad \dots \quad (E)$

أ) $11x - 7 = 5y$

$5y \equiv -7 [11]$

$5y \equiv 4 [11]$

$10y \equiv 8 [11]$

$-y \equiv 8 [11]$

$y \equiv 3 [11]$

حل المعادلة (E):

لدينا $y \equiv 3 [11]$ ومنه $y = 11k + 3$

($k \in \mathbb{Z}$ مع)

بالتعويض في (E) نجد:

$11x = 5(11k + 3) + 7$

$11x = 55k + 22$

$x = 5k + 2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات:

$(x, y) = (5k + 2; 11k + 3)$

($k \in \mathbb{Z}$ مع)

ب) $|y - x| \leq 5$

$|11k + 3 - 5k - 2| \leq 5$

$|6k + 1| \leq 5$

$-5 \leq 6k + 1 \leq 5$

$-6 \leq 6k \leq 4$

$-1 \leq k \leq \frac{2}{3}$

$k \in \{-1; 0\}$

من أجل $k = 0$: $(x, y) = (2, 3)$

من أجل $k = -1$: $(x, y) = (-3; -8)$

2) $a = 11m + 3$; $b = 5m + 2$

أ) القيم الممكنة لـ d:

d يقسم a و d يقسم b إذن

d يقسم $11b - 5a$ ومنه

d يقسم 7.

$d \in D_7$

$d \in \{1; 7\}$

ب) $\begin{cases} a \equiv 0 [7] \\ b \equiv 0 [7] \end{cases}$ منه

$\begin{cases} 11m + 3 \equiv 0 [7] \\ 5m + 2 \equiv 0 [7] \end{cases}$ بالطرح نجد: $6m + 1 \equiv 0 [7]$

$6m \equiv -1 [7]$

$6m \equiv 6 [7]$

$m \equiv 1 [7]$ منه $m = 7k' + 1$

($k' \in \mathbb{N}$ مع)

$a = 11(7k' + 1) + 3 = 77k' + 14$

$b = 5(7k' + 1) + 2 = 35k' + 7$

Toutaoui Abdelkader

$11n + n \equiv 2[11]$

$n \equiv 2[11]$

(مع $q \in \mathbb{N}$) $\boxed{n = 11q + 2}$

$2015 < 11q+2 < 2037$

$2013 < 11q < 2035$

$\frac{2013}{11} < q < \frac{2035}{11}$

$183 < q < 185$

$q = 184$

$n = 11 \times 184 + 2$

$\boxed{n = 2026}$

4) $\lambda = \overline{5623}^{7}$

$\lambda = 3\times7^0 + 2\times7^1 + 6\times7^2 + 5\times7^3 = 2026$

كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 :

$2026 = 6 \times 337 + \boxed{4}$

$337 = 6 \times 56 + \boxed{1}$

$56 = 6 \times 9 + \boxed{2}$

$9 = 6 \times 1 + \boxed{3}$

$1 = 6 \times 0 + \boxed{1}$

$\lambda = \overline{13214}^{6}$

صفحة 5

$(a;b) = (77k'+14 ; 35k'+7) . k' \in \mathbb{N}$

3) أ) بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11

$3^0 \equiv 1[11]$

$3^1 \equiv 3[11]$

$3^2 \equiv 9[11]$

$3^3 \equiv 5[11]$

$3^4 \equiv 4[11]$

$3^5 \equiv 1[11]$

فمتتالية الأسس دورية دورها 5

ومنه من أجل كل عدد طبيعي p :

$n =$	$5p$	$5p+1$	$5p+2$	$5p+3$	$5p+4$	
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	[11]

لدينا : $a \equiv 3[11]$

$a^b \equiv (3)^{5n+2} [11]$

$\equiv 3^{5p+2} [11]$

$\boxed{a^b \equiv 9 [11]}$

ج) $3^{1447} + a^b + a - b - 9 \equiv 0[11]$

$1447 = 5 \times 289 + 2$

$3^{5(289)+2} + 9 + 11n+3 - 5n-2 - 9 \equiv 0[11]$

$9 + 9 + 6n + 3 - 11 \equiv 0[11]$

$6n + 10 \equiv 0[11]$

$6n \equiv -10[11]$

$6n \equiv 1[11]$

$12n \equiv 2[11]$

التمرين الرابع:

$f(x) = 1 + (1-x-x^2)e^{-x}$

1) أ) $\lim_{x\to-\infty}(1-x-x^2) = \lim_{x\to-\infty}(-x^2) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(1-x-x^2)e^{-x} = -\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1+(1-x-x^2)e^{-x}\right]$

ح.ع.ت نزيلها:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1+e^{-x} - xe^{-x} - x^2e^{-x}\right]$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[1+e^{-x} - \frac{x}{e^x} - \frac{x^2}{e^x}\right]$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[1+\underbrace{e^{-x}}_{0} - \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}\right] = 1$

لأن:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم موازي لحامل محور الفواصل بجوار $+\infty$، معادلته $y = 1$

2) أ) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = (-1-2x)e^{-x} - e^{-x}(1-x-x^2)$

$= e^{-x}(-1-2x-1+x+x^2)$

$\boxed{f'(x) = (x^2-x-2)e^{-x}}$

ب) اتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$

لدينا: $e^{-x}>0$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-x-2

$x^2-x-2=0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 9$

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$; $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$، ومتناقصة تماما على المجال $[-1;2]$

$f(-1) = 1+(1+1-1)e = e+1$

$f(2) = 1+(1-2-4)e^{-2} = 1-5e^{-2}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e+1$	$\searrow$	$1-5e^{-2}$	$\nearrow$	1

3) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,7;-1,6]$:

$f(-1,6) \simeq 1,19$

$f(-1,7) \simeq -0,04$

لدينا $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1,7;-1,6[$

صفحة 7

:أ(4 $(T): y = f'(0)\,x + f(0)$

$$\boxed{(T): y = -2x + 2}$$

$f(-2) = 1 + (1 + 2 - 4)e^{2}$

$= 1 - e^{2} \simeq -6,38$

(ج $m \in]2; e+1[$

أ(5 $H(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

حساب $H'(x)$: الدالة H تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$H'(x) = (2x+3)e^{-x} - e^{-x}(x^2+3x+2)$

$H'(x) = (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x}$

$H'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$

لدينا $H'(x) = h(x)$

ومنه H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$

(ب $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} (1 + h(x))\,dx$

$A(\alpha) = \left[x + H(x)\right]_{\alpha}^{0} = H(0) - \left[\alpha + H(\alpha)\right]$

① ... $A(\alpha) = \left(2 - \alpha - (\alpha^2 + 3\alpha + 2)e^{-\alpha}\right) UA$

لدينا $f(\alpha) = 0$ ومنه:

$1 + (1 - \alpha - \alpha^2)e^{-\alpha} = 0$

$(1 - \alpha - \alpha^2)e^{-\alpha} = -1$

$e^{-\alpha} = \dfrac{-1}{1 - \alpha - \alpha^2}$ ...... ②

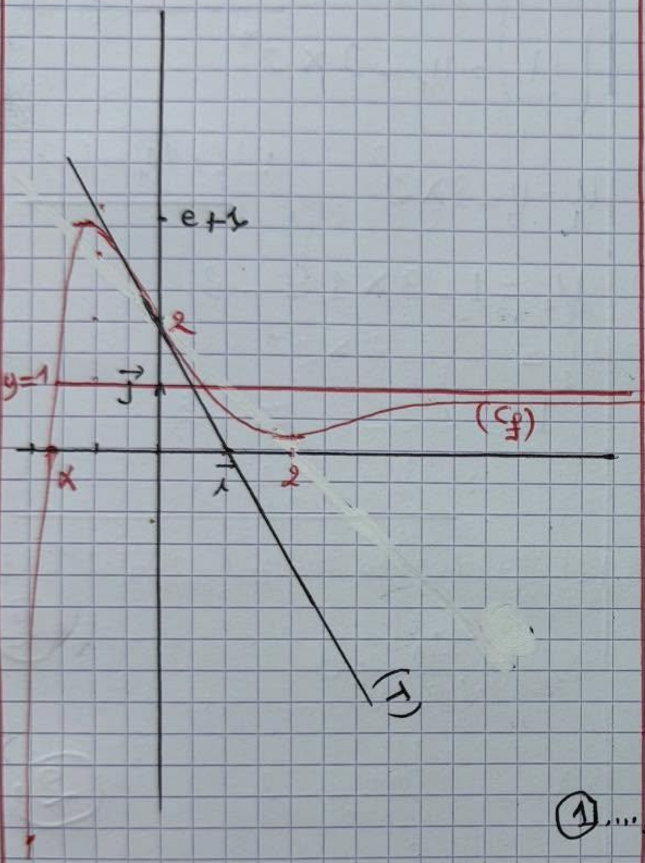
بتعويض ② في ① نجد:

$A(\alpha) = 2 - \alpha + \dfrac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{-\alpha^2 - \alpha - 1}$

$= \dfrac{(2-\alpha)(1 - \alpha - \alpha^2) + \alpha^2 + 3\alpha + 2}{1 - \alpha - \alpha^2}$

$A(\alpha) = \dfrac{2 - \cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha^2} - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \alpha^3 + \cancel{\alpha^2} + \cancel{3\alpha} + 2}{1 - \alpha - \alpha^2}$

$$\boxed{A(\alpha) = \frac{4 + \alpha^3}{1 - \alpha - \alpha^2} \quad (UA)}$$



insta profmath.kadi

بكالوريا 2026 / شعبة تقني رياضي

الأستاذ: عبد القادر

الموضوع الثاني: (صفحة 1)

التمرين الأول:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \times 2^n \end{cases}$$

حساب U_1 ، U_2 :

$U_1 = U_0 - 3 \times 2^0$

$U_1 = 1 - 3 \times 1 = -2$

$U_2 = U_1 - 3 \times 2^1$

$U_2 = -2 - 6 = -8$

اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

لدينا $U_{n+1} = U_n - 3 \times 2^n$ ومنه $U_{n+1} - U_n = -3 \times 2^n$

ومنه $-3 \times 2^n < 0$ المتتالية (U_n) متناقصة تماما في IN

(2)

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{2^{n+1}} + 3$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - 3 \times 2^n}{2^{n+1}} + 3$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n}{2^n \times 2^1} - \frac{3 \times \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \times 2} + 3$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n}{2^n} \times \frac{1}{2} + 3 - \frac{3}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{U_n}{2^n} + \frac{3}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{U_n}{2^n} + 3 \right)$$

لدينا: $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول: $V_0 = \frac{U_0}{2^0} + 3$

$V_0 = 1 + 3 = 4$; $V_0 = 4$

ج) عبارة V_n بدلالة n : $V_n = V_0 \times q^n$

$$\boxed{V_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

إثبات أن: $U_n = 4 - 3 \times 2^n$

لدينا $V_n = \frac{U_n}{2^n} + 3$ ومنه $V_n - 3 = \frac{U_n}{2^n}$

$$U_n = 2^n (V_n - 3)$$

$$U_n = \cancel{2^n} \times 4 \times \frac{1}{\cancel{2^n}} - 3 \times 2^n$$

$$\boxed{U_n = 4 - 3 \times 2^n}$$

(3) $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

$$S_n = V_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] = 4 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$S_n = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 8 - 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{S_n = 8 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[8 - 4 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} \right] = 8$$

صفحة 2

$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا: $u_n = 4-3\times 2^n$ منه

$T_n = 4-3\times 2^0 + 4-3\times 2^1 + \dots + 4-3\times 2^n$

$= 4(n+1) - 3(2^0+2^1+\dots+2^n)$

$T_n = 4n+4-3\times \frac{1-2^{n+1}}{-1}$

$= 4n+4+3(1-2^n\times 2)$

$= 4n+4+3-6\times 2^n$

$\boxed{T_n = 4n+7-6\times 2^n}$

$L_n = T_0+T_1+\dots+T_n$

لدينا: $T_n = 7+4n-6\times 2^n$

نضع $\alpha_n = 7+4n$ و $\beta_n = 6\times 2^n$

(α_n) متتالية حسابية أساسها 4 وحدها الأول $\alpha_0 = 7$

(β_n) متتالية هندسية أساسها $q'=2$ وحدها الأول $\beta_0 = 6$

وعليه

$T_n = \alpha_n - \beta_n$

$L_n = \alpha_0 - \beta_0 + \alpha_1 - \beta_1 + \dots + \alpha_n - \beta_n$

$L_n = (\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n) - (\beta_0+\beta_1+\dots+\beta_n)$

$= (n+1)\left(\frac{\alpha_0+\alpha_n}{2}\right) - \beta_0\left(\frac{1-q'^{n+1}}{1-q'}\right)$

$L_n = (n+1)\left(\frac{7+7+4n}{2}\right) - 6\left(\frac{1-2^{n+1}}{-1}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{4n+14}{2}\right) + 6(1-2^{n+1})$

$= (n+1)(2n+7)+6-6\times 2^n\times 2$

$L_n = 2n^2+7n+2n+7+6-12\times 2^n$

$\boxed{L_n = 2n^2+9n+13-12\times 2^n}$

التمرين الثاني:

2 بيضاء 5 حمراء 3 خضراء	1 سوداء

1) نسحب 3 كريات على التوالي دون إرجاع

عدد الحالات الممكنة هو: $A_{11}^3 = 990$

A "سحب 3 كريات من نفس اللون"

R R R أو V V V

$P(A) = \frac{A_5^3 + A_3^3}{990} = \frac{60+6}{990} = \frac{66}{990}$

$\boxed{P(A) = \frac{1}{15}}$

B "سحب كرية واحدة بيضاء فقط"

$B\ \overline{B}\ \overline{B} \times 3$

$P(B) = \frac{3(A_2^1 A_9^2)}{990} = \frac{432}{990}$

$\boxed{P(B) = \frac{24}{55}}$

C "سحب كرية حمراء على الأكثر"

$R\ \overline{R}\ \overline{R} \times 3$ أو $\overline{R}\ \overline{R}\ \overline{R}$

$P(C) = \frac{3(A_5^1 \times A_6^2) + A_6^3}{990} = \frac{450+120}{990}$

$\boxed{P(C) = \frac{19}{33}}$

D" سحب كريتين حمراوين على الأقل"

Ⓡ Ⓡ $\overline{Ⓡ}$ أو Ⓡ Ⓡ Ⓡ

$$P(D) = \frac{3\left(A_5^2 \times A_6^1\right) + A_5^3}{990} = \frac{420}{990}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{14}{33}}$$

ب) إثبات أن: $P(A \cap D) = \frac{2}{33}$

$A \cap D$ "الحصول على 3 كريات من نفس اللون وكريتان حمراوين على الأقل"

معناه 3 كريات حمراء:

$$P(A \cap D) = \frac{A_5^3}{990} = \frac{60}{990}$$

$$\boxed{P(A \cap D) = \frac{2}{33}}$$

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{14}{33} - \frac{2}{33}$$

$$\boxed{P(A \cup D) = \frac{71}{165}}$$

②

m سوداء
2 بيضاء
3 خضراء
5 حمراء

عدد الكريات هو: $m + 10$

نسحب كريتين على التوالي مع الإرجاع

عدد الحالات الممكنة هو: $(m+10)^2$

صفحة 3

P" سحب كريتين سوداوين"

$$P = \frac{m^2}{(m+10)^2} = \left(\frac{m}{m+10}\right)^2$$

$$\left(\frac{m}{m+10}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{m}{m+10}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{m}{m+10} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{m+10} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{2m - m - 10}{2(m+10)}\right)\left(\frac{2m + m + 10}{2(m+10)}\right) = 0$$

$$\frac{(m-10)(3m+10)}{4(m+10)^2} = 0$$

بما أن $m \geq 2$ فإن: $3m + 10 > 0$

إذن $4(m+10)^2 \neq 0$: $m - 10 = 0$

$$\boxed{m = 10}$$

التمرين الثالث: الموضوع الثاني:

1) أ) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1447 على 7

4 صفحة

$$\begin{array}{r|l} 1447 & 7 \\ -1442 & 206 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$1447 \equiv 5 [7]$$

إذن باقي قسمة 1447 على 7 هو 5

• باقي القسمة الإقليدية للعدد 2687 على 13

$$\begin{array}{r|l} 2687 & 13 \\ -2678 & 206 \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$2687 \equiv 9 [13]$$

إذن باقي قسمة 2687 على 13 هو 9

• ب) إثبات أن العدد 1447 أولي:

$$\sqrt{1447} = 38,03$$

الأعداد الأولية الأصغر من 38 هي:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$

$1447 \equiv 1 [2]$

$1447 \equiv 1 [3]$

$1447 \equiv 2 [5]$

$1447 \equiv 5 [7]$

$1447 \equiv 6 [11]$

$1447 \equiv 4 [13]$

$1447 \equiv 2 [17]$

$1447 \equiv 3 [19]$

$1447 \equiv 21 [23]$

$1447 \equiv 26 [29]$

$1447 \equiv 21 [31]$

$1447 \equiv 4 [37]$

بما أن العدد 1447 لا يقبل القسمة على الأعداد: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 فهو أولي

• القواسم الطبيعية للعدد 2894:

تحليل 2894 إلى جداء عوامل أولية

$$\begin{array}{r|l} 2894 & 2 \\ 1447 & 1447 \\ 1 & \end{array}$$

$$2894 = 2 \times 1447$$

$$D_{2894} = \{1; 2; 1447; 2894\}$$

ج) إيجاد الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x(x+y) = 2894$

$$x(x+y) = 2 \times 1447$$

أو $x(x+y) = 1447 \times 2$

أو $x(x+y) = 1 \times 2894$

أو $x(x+y) = 2894 \times 1$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x+y = 1447 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1445 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1447 \\ x+y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1447 \\ y = -1445 \end{cases}$$

مرفوض

$$\begin{cases} x = 1 \\ x+y = 2894 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2893 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2894 \\ x+y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2894 \\ y = -2893 \end{cases}$$

مرفوض

3

$A = 14m^2 + 17m + 5$

إثبات أن العدد $(2m+1)$ يقسم العدد A:

$A = 14m^2 + 7m + 10m + 5$

$= 7m(2m+1) + 5(2m+1)$

لدينا $A = (2m+1)(7m+5)$

منه A يقبل القسمة على $(2m+1)$

وعليه العدد $(2m+1)$ يقسم العدد A

إثبات أنّ العدد $(2m+1)$ يقسم العدد B:

$B = 26m^2 + 31m + 9$

$B = 26m^2 + 13m + 18m + 9$

$B = 13m(2m+1) + 9(2m+1)$

$B = (2m+1)(13m+9)$

ومنه العدد $(2m+1)$ يقسم B

طريقة ②: (القسمة الإقليدية)

$$\begin{array}{r|l} 14m^2+17m+5 & 2m+1 \\ -\ 14m^2+7m & \overline{7m+5} \\ \hline 10m+5 & \\ -\ 10m+5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\boxed{A = (2m+1)(7m+5)}$

$$\begin{array}{r|l} 26m^2+31m+9 & 2m+1 \\ -\ 26m^2+13m & \overline{13m+9} \\ \hline 18m+9 & \\ -\ 18m+9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\boxed{B = (2m+1)(13m+9)}$

صفحة 5

$(x, y) = \{(2, 1445); (1, 2893)\}$

②

$a = 7m + 5$

$b = 13m + 9$

$d = PGCD(a; b)$

القيم الممكنة لـ d:

d يقسم a و d يقسم b

d يقسم $13a$ و d يقسم $7b$

d يقسم $13a - 7b$

d يقسم $13(7m+5) - 7(13m+9)$

d يقسم $91m + 65 - 91m - 63$

d يقسم 2

$d \in \{1; 2\}$

قيم n حتى يكون $d = 2$:

$$\begin{cases} 7m+5 \equiv 0[2] \\ 13m+9 \equiv 0[2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7m \equiv 1[2] \\ 13m \equiv 1[2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14m \equiv 2[2] \\ 13m \equiv 1[2] \end{cases}$$

بالطرح نجد: $m \equiv 1[2]$

$\boxed{m = 2K + 1}$

$(K \in \mathbb{N}$ مع$)$

إشارة $x - x\ln(x)$:

$x - x\ln(x) = x(1-\ln x)$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} (1-\ln x) = 0^+$

صفحة 6

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} (1-\ln x) = 0^-$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} \left[x + \frac{1}{x - x\ln x}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} \left[x + \frac{1}{x - x\ln x}\right] = -\infty$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = e$

ب) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - x\ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1-\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x - x\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\underset{+\infty}{x} + \underset{0}{\frac{1}{x(1-\ln x)}}\right] = +\infty$

2) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x - x\ln x}\right] = 0$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي:

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$+$	‖	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

ب) $PGCD(A,B) = PGCD\left[(2n+1)\times a ; (2n+1)b\right]$

$\boxed{PGCD(A;B) = (2n+1)\, PGCD(a;b)}$

من أجل $d = 1$: $PGCD(A;B) = 2n+1$

من أجل $d = 2$: $PGCD(A;B) = 4n+2$

4) من أجل $d = 1$: $A \times B = m \times d$

$A \times B = PGCD(A,B) \times PPCM(A,B)$

$A \times B = (2n+1) \times PPCM(A,B)$

$PPCM(A;B) = \frac{A \times B}{(2n+1)}$

$= \frac{(2n+1)(7n+5)(2n+1)(13n+9)}{2n+1}$

$PPCM(A;B) = (2n+1)(7n+5)(13n+9)$

التمرين الرابع:

$D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

$f(x) = x + \frac{1}{x - x\ln x}$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x - x\ln x) = 0^+$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x - x\ln(x)} = +\infty$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty}$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

الصفحة 7

3) أ) إثبات أنه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{(x - x\ln x)^2}$$

• الدالة f تقبل الاشتقاق على المجالين $]0;e[$ و $]e;+\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{-[1-(\ln x + \frac{1}{x}\times 1)]}{(x - x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1 + \ln x + 1}{(x - x\ln x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = 1 + \frac{\ln x}{(x - x\ln x)^2}}$$

ب) التحقق أن: $0,4 < \alpha < 0,5$

f' مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,4;0,5]$

$f'(0,4) = -0,55952$

$f'(0,5) = 0,03285$

لدينا: $f'(0,5) \times f'(0,4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,4;0,5[$

ج) جدول التغيرات:

x	0		α		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) أ) إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]3;3,1[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[3;3,1]$

$f(3) \simeq -0,38024$

$f(3,1) \simeq 0,64509$

لدينا: $f(3) \times f(3,1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $\beta \in]3;3,1[$

4) ب) إثبات أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ):

$f'(x_0) = 1$

$$\frac{\ln(x_0)}{(x_0 - x_0\ln x_0)^2} = 0$$

تكافئ: $\ln(x_0) = 0$

مع (المقام لا يساوي 0)

$x_0 = 1$

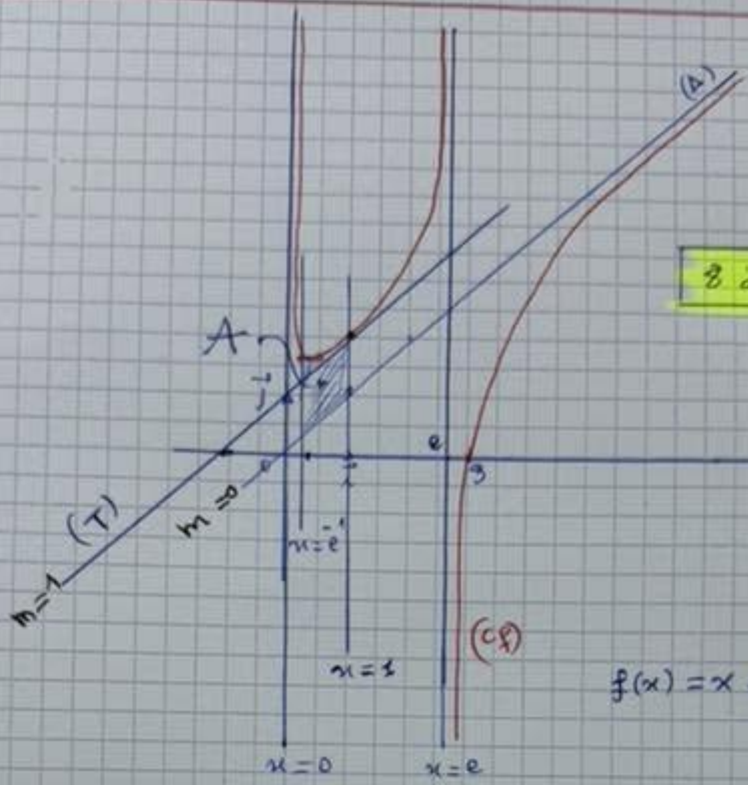
إذن (C_f) يقبل مماساً (T) ميله 1 عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T): y = x - 1 + 2$

$$\boxed{(T): y = x + 1}$$

صفحة 8



$$f(x)=x+\frac{1}{x-x\ln x}$$

⑤ ب) المناقشة البيانية:

$$m(x-x\ln x)=1$$

ومنه $m=\dfrac{1}{x-x\ln x}$

$$x+m=x+\frac{1}{x-x\ln x}$$

$(*)\ \dots\ f(x)=x+m$

حلول المعادلة $(*)$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيمات (Δ_m) التي معادلاتها: $y=x+m$

$(\Delta_m):y=x+m$

$(\Delta):y=x \qquad : m=0$

$(T):y=x+1 \qquad ; m=1$

قيم m	عدد حلول المعادلة $m(x-x\ln x)=1$
$m\in]-\infty;0[$	المعادلة تقبل حل وحيد
$m\in[0;1[$	المعادلة لا تقبل حلول
$m=1$	المعادلة تقبل حل وحيد
$m\in]1;+\infty[$	المعادلة تقبل حلين

⑥ الدالة h تقبل الاشتقاق على المجال $]0;e[$ ،

ومن أجل كل x من $]0;e[$: $h'(x)=\dfrac{-1}{x(1-\ln x)}$

$$A=\int_{e^{-1}}^{1}(f(x)-x)\,dx=\int_{e^{-1}}^{1}\frac{1}{x-x\ln x}\,dx=-\int_{e^{-1}}^{1}h'(x)\,dx$$

$$A=-\left[h(x)\right]_{e^{-1}}^{1}=-h(1)+h(e^{-1})$$

$$A=-\ln(1-\ln 1)+\ln(1-\ln(e^{-1}))=+\ln(1+1)$$

$$\boxed{A=\ln(2)\quad(UA)}$$