واجب منزلي: حول المرجح

المستوى: ثانية ثانوي – شعبة رياضيات — الأستاذ: قويسم الخليل

سلم يوم: 21 ديسمبر 2022 — يعاد يوم: 08 جانفي 2023

التمرين 01

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $A(0;1)$ ، $B(0;5)$ و $C(2;1)$

ولتكن G_m مرجح الجملة

$\{(A;-m^2+4);(B;m^2-2m);(C;2m)\}$

1. عيّن قيم m التي من أجلها يكون G_m موجودة ووحيدة
2. عين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m
3. ما هو المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$

التمرين 02

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $A(1;0)$ ، $B(-3;2)$ و $C(1;3)$

ولتكن G مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;1);(C;-1)\}$

1. عين إحداثيي النقطة G
2. عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع
3. عين الأعداد الحقيقية α، β و γ حتى تكون النقطة D مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$
4. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

5. m عدد حقيقي، نعتبر النقطة H المعرفة بالعلاقة:

$$(m+2)\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+(m-3)\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$

أ/ عين قيم m حتى تكون النقطة H موجودة

ب/ عبر عن $\overrightarrow{AH}$ بدلالة m و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ج/ عيّن احداثيي النقطة H بدلالة m

د/ عبر عن قيم m بحيث تكون النقطة H من المستقيم (D) ذو المعادلة: $2x-y=0$

التمرين 03

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

A، B و C ثلاث نقط ليست على استقامية، النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1);(C;2)\}$

H نقطة معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

1. أنشئ النقطة G
2. بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$، ثم أنشئها
3. بيّن أن النقط A، G و H في استقامية
4. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{3}{4}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$$

أ/ عين وأنشئ المجموعة (Γ)

ب/ عين وأنشئ المجموعة (Γ') حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| \leq \frac{3}{4}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$$

5. $(0;2)$ ، $(-3;0)$ و $(2;1)$ هي احداثيات النقط A، B و C على الترتيب

أ/ عين احداثيي كلا من النقطتين G و H

ب/ تأكد حسابيا من صحة نتيجة السؤال 3

التمرين 04

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية، m عدد حقيقي من المجال $[-1;1]$

G_m مرجح الجملة $\{(A;m^2+1);(B;m);(C;-m)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$

1. أنشئ G_1 و G_{-1}
2. برر وجود G_m من أجل عدد حقيقي m من المجال $[-1;1]$، ثم بيّن أنّ

$$\overrightarrow{AG_m}=\frac{-m}{m^2+1}\overrightarrow{BC}$$

3. لتكن N نقطة من (BC)، هل يمكن أن تنطبق N على G_m؟ علل
4. شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ:

$$f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$$

5. استنتج مجموعة النقط G_m عندما يمسح m المجال $[-1;1]$

تصحيح مقترح للواجب المنزلي حول المرجح

المستوى: ثانية ثانوي – شعبة رياضيات — الأستاذ: قويسم الخليل

حل التمرين 01

❶ تعيين قيم m التي من أجلها يكون G_m موجودة ووحيدة:

لدينا:

$$-m^2+4+m^2-2m+2m\neq 0 \Rightarrow 4\neq 0$$

وعليه G_m موجودة ووحيدة من أجل كل $\boxed{m\in\mathbb{R}}$

❷ تعيين إحداثيي النقطة G_m بدلالة m:

$$x_{G_m}=\frac{0(-m^2+4)+0(m^2-2m)+2(2m)}{4}$$
$$=\frac{4m}{4}=m$$
$$y_{G_m}=\frac{1(-m^2+4)+5(m^2-2m)+1(2m)}{4}$$
$$=\frac{4m^2-8m+4}{4}=m^2-2m+1$$

ومنه:

$$\boxed{G_m(m;m^2-2m+1)}$$

❸ المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$

المحل الهندسي للنقط G_m لما m ينتمي إلى $\mathbb{R}$ هو التمثيل البياني للدالة ذات المعادلة:

$$y=x^2-2x+1$$

حل التمرين 02

❶ تعيين إحداثيي النقطة G:

$$x_G=\frac{-2(1)+1(-3)-1(1)}{-2+1-1}=3$$
$$x_G=\frac{-2(0)+1(2)-1(3)}{-2+1-1}=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$\boxed{G\left(3;\frac{1}{2}\right)}$$

❷ تعيين إحداثيي D حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع:

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\2-0\end{pmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\begin{cases}-4=1-x_D\\2=3-y_D\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x_D=5\\y_D=1\end{cases}$$

ومنه: $D(5;1)$

❸ تعيين الأعداد الحقيقية α، β و γ:

$$x_D=\frac{\alpha(1)+\beta(-3)+\gamma(1)}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$\Rightarrow x_D(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha-3\beta+\gamma$$
$$\Rightarrow 5(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha-3\beta+\gamma$$
$$\Rightarrow 4\alpha+8\beta+4\gamma=0$$
$$\Rightarrow \alpha+2\beta+\gamma=0$$
$$y_D=\frac{\alpha(0)+\beta(2)+\gamma(3)}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=2\beta+3\gamma$$
$$\Rightarrow \alpha-\beta-2\gamma=0$$

لدينا:

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\\alpha-\beta-2\gamma=0\end{cases}$$

نضع $\boxed{\gamma=1}$ (يمكن أخذ أي قيمة) ومنه:

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\\alpha-\beta-2\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+1=0\\\alpha-\beta-2=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+1=0\ldots(*)\\-\alpha+\beta+2=0\ldots(**)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرفا لطرف نجد:

$$3\beta+3=0\Rightarrow\boxed{\beta=-1}$$

نعوض قيمة β في $(**)$ نجد:

$$\alpha-2+1=0\Rightarrow\boxed{\alpha=1}$$

إذن: D مرجح الجملة $\boxed{\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}}$

❹ تعيين (Γ):

لدينا:

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\Rightarrow\left\|(-2+1-1)\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|(1-1+1)\overrightarrow{MD}\right\|$$
$$\Rightarrow\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$$
$$\Rightarrow 2MG=2MD$$
$$\Rightarrow\boxed{MG=MD}$$

ومنه مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GD]$

❺

جودة:

$\Rightarrow 2m-2 \neq 0$

$\Rightarrow 2m \neq 2$

$\Rightarrow m \neq 1$

ومنه H موجودة لما $\boxed{m \in \mathbb{R}-\{1\}}$

ب/ التعبير عن $\overrightarrow{AH}$ بدلالة m و$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$$\boxed{\overrightarrow{AH}=\frac{-1}{2m-2}\overrightarrow{AB}+\frac{m-3}{2m-2}\overrightarrow{AC}}$$

ج/ تعيين احداثيي النقطة H بدلالة m:

$$x_H=\frac{(1)(m+2)+(-3)(-1)+(1)(m-3)}{2m-2}$$
$$=\frac{m+2+3+m-3}{2m-2}=\frac{2m+2}{2m-2}=\frac{m+1}{m-1}$$
$$y_H=\frac{(0)(m+2)+(2)(-1)+(3)(m-3)}{2m-2}$$
$$=\frac{-2+3m-9}{2m-2}$$
$$=\frac{3m-11}{2m-2}$$

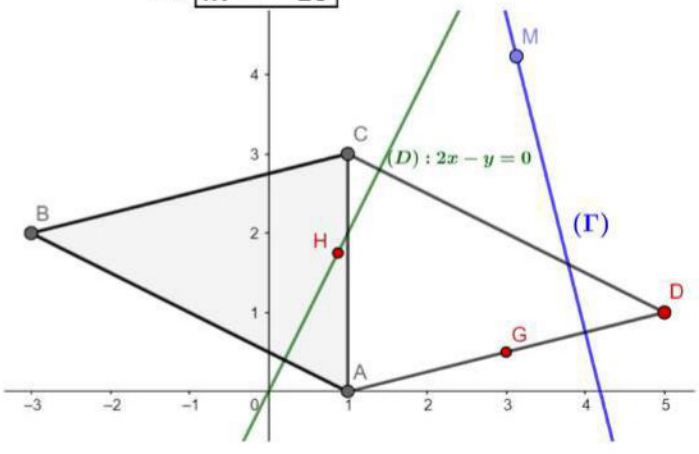
ومنه:

$$\boxed{H\left(\frac{m+1}{m-1};\frac{3m-11}{2m-2}\right)}$$

د/ التعبير عن قيم m بحيث تكون H من (D):

$H \in (D)$ معناه:

$$2\left(\frac{m+1}{m-1}\right)-\left(\frac{3m-11}{2m-2}\right)=0$$
$$\Rightarrow \frac{4m+4-3m+11}{2m-2}=0$$
$$\Rightarrow \frac{m+15}{2m-2}=0$$
$$\Rightarrow m+15=0$$
$$\Rightarrow \boxed{m=-15}$$



حل التمرين 03

❶ إنشاء النقطة G:

$$\boxed{\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}$$

❷ تبيين أن H مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$:

لدينا:

$$\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{BH}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}-2\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}}$$

ومنه: H مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$

- إنشاء H:

$$\boxed{\overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

❸ تبيين أن النقط A، G و H في استقامية:

لدينا: G مرجح الجملة $\{(B;1);(C;2)\}$

ولدينا: H مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$

حسب خاصية التجميع نجد:

أنّ: H مرجح الجملة $\{(A;1);(G;3)\}$

وعليه:

$$\boxed{\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}}$$

إذن: النقط A، G و H في استقامية

❹

أ/ تعيين المجموعة (Γ):

$$\left\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{3}{4}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\Rightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{3}{4}\left\|4\overrightarrow{MH}\right\|$$
$$\Rightarrow 3MG=\frac{3}{4}4MH$$
$$\Rightarrow MG=MH$$

المجموعة (Γ) هي محور القطعة المستقيمة $[GH]$

ب/ تعيين المجموعة (Γ') :

$$\left\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| \leq \frac{3}{4}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\Rightarrow MG \leq MH$$

المجموعة (Γ') نصف المستوي في جهة النقطة G و حدّهُ محور القطعة $[GH]$

❺

أ/ تعيين احداثيي كلا من النقطتين G و H:

$$x_G=\frac{1(-3)+2(2)}{3}=\frac{1}{3}$$

ومنه: $\boxed{G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)}$

$$x_H=\frac{1(0)+1(-3)+2(2)}{4}=\frac{1}{4}$$
$$y_H=\frac{1(2)+1(0)+2(1)}{4}=\frac{4}{4}=1$$

ومنه: $\boxed{H\left(\frac{1}{4};1\right)}$

ب/ التأكد حسابيا من صحة نتيجة السؤال ❸:

لدينا:

$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-0\\1-2\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-0\\\frac{2}{3}-2\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)-(-1)\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

إذن $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AG}$ مرتطبان خطيا

وعليه النقط A، G و H في استقامية

حل التمرين 04

❶ إنشاء G_1 و G_{-1}:

G_1 مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

G_{-1} مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;1)\}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AG_{-1}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

❷ تبرير وجود G_m من أجل عدد حقيقي m من $[-1;1]$:

لدينا:

$$m^2+1+m-m\neq 0\Rightarrow m^2+1\neq 0$$
$$\Rightarrow m^2\neq -1$$

ومنه G_m موجودة من أجل كل $m\in\mathbb{R}$

وعليه G_m موجودة من أجل كل $m\in[-1;1]$

- تبيين أن $\overrightarrow{AG_m}=\frac{-m}{m^2+1}\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AG_m}=\frac{m}{m^2+1}\overrightarrow{AB}-\frac{m}{m^2+1}\overrightarrow{AC}$$
$$=-\frac{m}{m^2+1}\overrightarrow{BA}-\frac{m}{m^2+1}\overrightarrow{AC}$$
$$=\boxed{-\frac{m}{m^2+1}\overrightarrow{BC}}$$

❸ هل يمكن أن تنطبق N على G_m؟

$$\overrightarrow{AG_m}=\frac{-m}{m^2+1}\overrightarrow{BC}$$

ومنه: $\overrightarrow{AG_m}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا

وبما أنّ: $N\in(BC)$، فإنه لا يمكن أن تنطبق N على G_m

❹ تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

$$f'(x)=\frac{-(x^2+1)-2x(-x)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2-1+2x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1$$
$$\Rightarrow x=1 \text{ أو } x=-1$$

x	-1		1
$f'(x)$	$-$		
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

❺ استنتاج مجموعة النقط G_m:

لدينا:

$$\overrightarrow{AG_m}=\frac{-m}{m^2+1}\overrightarrow{BC}$$

لما $m\in\mathbb{R}$ مجموعة النقط هي المستقيم الذي يوازي (BC) ويمر من النقطة A

ولما $m\in[-1;1]$:

بما أن الدالة f متناقصة تماما ونهايتها الحدية الكبرى هي $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ ونهايتها الحدية الصغرى هي $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

فإن مجوعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ حيث $(G_{-1}G_1)$ يوازي (BC) ويقطع A

بالتوفيق للجميع

الأستاذ: قويسم الخليل