المستوى : 2 علوم تجريبية وتقني رياضي **المدة : 90 دقيقة**

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات -01-

التمرين الأول :

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x)=4x^3-4x^2-15x+18$

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.
3. عين إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $P(x)\leq 0$.
4. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة : $4x\sqrt{x}-4x-15\sqrt{x}+18=0$

التمرين الثاني:

I) لتكن f_m دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_m(x)=mx^2-2x+1$ حيث m وسيط حقيقي و ليكن (C_{f_m}) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- عين قيمة m بحيث المنحنى (C_{f_m}) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

II) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x)=-x^2-2x+1$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=-(x+1)^2+2$.
2. فكك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما.
3. استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.
4. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.
5. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناضر لـ (C_f).

III)نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2-2|x|-1$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

1. بين أن g دالة زوجية .
2. من أجل $x\in]-\infty;0]$ احسب $g(x)+f(x)$.
3. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم مثله.

التمرين الأول (07 نقاط):

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x)=4x^3-4x^2-15x+18$

1. برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها..... $(1,5)$

بإستعمال خوارزمية هورنر نجد

	4	−4	−15	18
−2	↓	−8	24	−18
	4	−12	9	0

ومنه $P(x)=(x+2)(4x^2-12x+9)$ إذن $a=4$ ، $b=-12$ و $c=9$.

يمكن استعمال القسمة الإقليدية أو النشر ثم المطابقة.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

..... $(1,5)$

$P(x)=0$ يكافئ $(x+2)(4x^2-12x+9)=0$ يكافئ $(x+2)=0$ أو $(4x^2-12x+9)=0$

لما $(x+2)=0$ أي $x=-2$ و لما $(4x^2-12x+9)=0$ أي $\Delta=0$ ومنه للمعادلة حل مضاعف في $\mathbb{R}$ $x=\frac{3}{2}$ ومنه $S=\left\{-2;\frac{3}{2}\right\}$

3. عين إشارة $P(x)$ ..... $(1,5)$

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(x+2)$		−	0	+		+	
$(4x^2-12x+9)$		+		+	0	+	
$P(x)$		−	0	+	0	+	

استنتاج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $P(x)\leq 0$

..... $(1,5)$

ومنه $P(x)\leq 0$ لما $x\in]-\infty;-2]$ أو $x=\frac{3}{2}$ و عليه $S=]-\infty;-2]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$

4. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة :

$4x\sqrt{x}-4x-15\sqrt{x}+18=0$ ..... (01)

المعادلة معرفة لما $D=[0;+\infty[$.

$4x\sqrt{x}-4x-15\sqrt{x}+18=0$ يكافئ $4\left(\sqrt{x}\right)^3-4\left(\sqrt{x}\right)^3-15\sqrt{x}+18=0$ بوضع $t=\sqrt{x}$ مع $t>0$ تصبح

$8=0$

ومن السؤال 2. نجد $t=-2$ (مرفوض لأن $t>0$) أو $t=\frac{3}{2}$ وعليه $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$ إذن $x=\frac{9}{4}$ وعليه $S=\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

التمرين الثاني (13 نقطة):

I) تعيين قيمة m بحيث المنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

..... $(1,5)$

$\left(C_{f_m}\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين معناه للمعادلة $f_m(x)=0$ حلان مختلفان في $\mathbb{R}$ أي $mx^2-2x+1=0$ مع $m\neq 0$

أي $\Delta>0$ لدينا $\Delta=4-4m$ ومنه $4-4m>0$ أي $-4m>-4$ ومنه $m<1$ إذن قيم المطلوبة هي $m\in]-\infty;0[\cup]0;1[$.

II) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x)=-x^2-2x+1$ و ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. تبيان أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=-(x+1)^2+2$.

..... $(1,5)$

$-(x+1)^2+2=-\left(x^2+2x+1\right)+2=-x^2-2x-1+2=-x^2-2x+1=f(x)$

2. تفكيك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما.

..... $(1,5)$

$$\begin{cases} u(x)=x+1 \\ v(x)=-x^2+2 \\ f=v\circ u \end{cases} \text{ حيث } f: x\xrightarrow{u} x+1\xrightarrow{v}-(x+1)^2+2$$

3. استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

..... $(1,5)$

لدينا $f=v\circ u$ و الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ و علما أنه من أجل كل $x\in]-\infty;-1]$ نجد أن $x+1\in]-\infty;0]$

وعليه $u(x)\in]-\infty;0]$ أي الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

4. أرسم $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.

..... $(1,5)$

لدينا $f(x)=-(x+1)^2+2$ و منه $\left(C_f\right)$ صورة منحنى الدالة $h: x\to -x^2$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ (يمكن كتابة f على الشكل $f(x)=h(x+1)+2$

(

أو يمكن استعمال طريقة أخرى وذلك بكتابة f على الشكل : $f(x)=-\left[(x+1)^2-2\right]$.

5. تبيين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر لـ $\left(C_f\right)$ ..... $(1,5)$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نجد $-2-x\in\mathbb{R}$

$f(-2-x)=-(-x-2+1)^2+2=-(-x-1)^2+2=-\left(-(x+1)\right)^2+2=-(x+1)^2+2=f(x)$

أو يمكن الاستعانة بدساتير تغيير المعلم.

6. نعتبر الدالة g الـ $\left(C_g\right)$ $g(x)=x^2-2|x|-1$ ..... $(1,5)$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ نجد $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = (-x)^2 - 2|-x| - 1 = x^2 - 2|x| - 1 = g(x)$ و . هـ . م

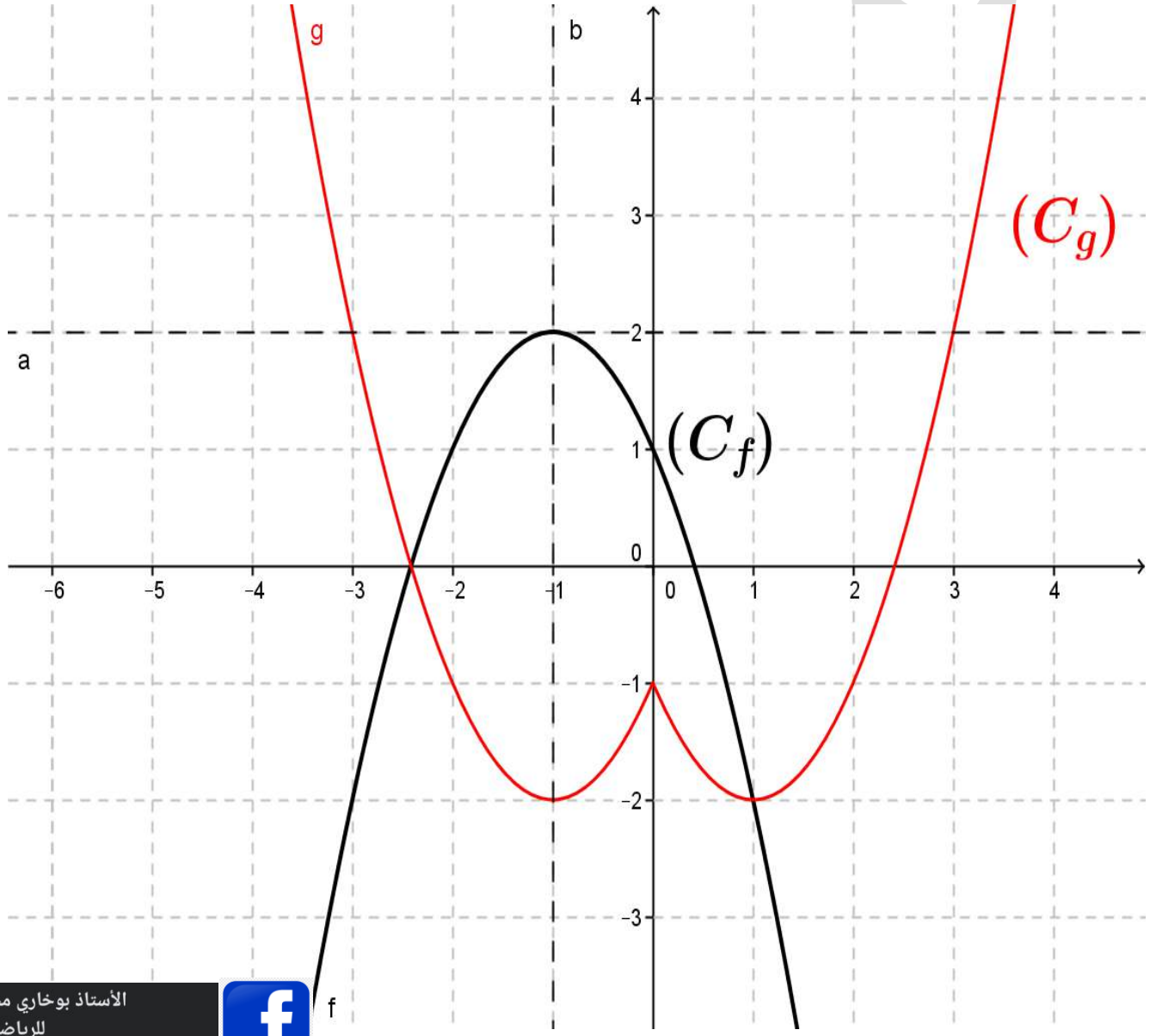
ب. من أجل $x \in]-\infty;0]$ حساب $g(x) + f(x)$ ..... (01)

$g(x) + f(x) = \left(x^2 - 2|x| - 1\right) + \left(-x^2 - 2x + 1\right) = -2|x| - 2x = 2x - 2x = 0$ لأن $|x| = -x$ لما $x \in]-\infty;0]$

ت. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقا من (C_f) ..... (01)

من أجل $x \in]-\infty;0]$ وجدنا أن $g(x) + f(x) = 0$ أي $g(x) = -f(x)$ و عليه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل على المجال $]-\infty;0]$ و نكمل التمثيل البياني على المجال $[0;+\infty[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لأن الدالة g زوجية .

رسم (C_g) ..... $(0,5)$



الأستاذ بوخاري محمد
للرياضيات
@Bokharimath

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-02-

تمرين:

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2x+a$ حيث a عدد حقيقي و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين قيمة a علما أن 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$.
2. نعتبر فيما يأتي أن $a=-3$

أ. بين أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=(x+1)^2-4$.

ب. فكك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما.

ت. ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و المجال $]-\infty;-1[$.

3. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها.
4. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر لـ (C_f).

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2+2|x|-2$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

1. بين أن g دالة زوجية .
2. بين أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g(x)=f(x)+1$.
3. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم مثله في المعلم السابق

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^3+4x^2+x-6$

1. احسب $h(-2)$ ماذا تستنتج؟
2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $h(x)=0$.
4. عين إشارة $h(x)$، ثم استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $h(x)\le 0$.
5. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة : $x^6+4x^4+x^2-6=0$.

حل فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-02-

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2x+a$ حيث a عدد حقيقي و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تعين قيمة a علما أن 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$: ..... (01)

1 جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(1)=0$ معناه $(1)^2+2(1)+a=0$ معناه $a=-3$

2. نعتبر فيما يأتي أن $a=-3$

أ. تبين أن عبارة الدالة f تكتب على الشكل : $f(x)=(x+1)^2-4$ . ..... (01)

$$(x+1)^2-4=x^2+2x+1-4=x^2+2x-3=f(x)$$

ب. تفكيك f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما. ..... $(1,5)$

$$\begin{cases} u(x)=x+1 \\ v(x)=x^2-4 \\ f=v\circ u \end{cases}$$ لدينا $f(x)=(x+1)^2-4$ ومنه

ت. دراسة إتجاه تغير الدالة f :..... (02)

- على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

ومن أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ نجد $u(x)\in]0;+\infty[$ ومنه الدالة v متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

- على المجال $]-\infty;-1[$:

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

ومن أجل كل $x\in]-\infty;-1[$ نجد $u(x)\in]-\infty;0[$ ومنه الدالة v متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

3. أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها. ..... (01)

لدينا $f(x)=(x+1)^2-4$ ومنه (C_f) صورة منحنى الدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

4. تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر لـ (C_f): $2a-x=-2-x$ ..... $(1,5)$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $-2-x\in\mathbb{R}$

$$f(2a-x)=f(-2-x)=\big((-2-x)+1\big)^2-4=(-1-x)^2-4=\big(-(1+x)\big)^2-4=(x+1)^2-4=f(x)$$

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2+2|x|-2$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

1. تبين أن g دالة زوجية . ..... (01)

2. تبين أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$: $g(x) = f(x) + 1$ ..... (01)

من أجل كل $x \in [0;+\infty[$: $|x| = x$ ومنه

$$g(x) = x^2 + 2|x| - 2 = x^2 + 2x - 2 = x^2 + 2x - 3 + 1 = f(x) + 1$$

3. استنتج كيفية تمثيل (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم مثله. ..... (02)

لما $x \in [0;+\infty[$: (C_g) صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ($\vec{v} = \vec{j}$)

و بما أن g دالة زوجية نكمل التمثيل بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

1. حساب $h(-2)$: ..... (01)

$$h(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$$

- نستنتج أن -2 جذر لكثير الحدود $h(x)$ ..... (0,5)

2. برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها. ... (1,5)

بإستعمال المطابقة أو القسمة الإقليدية أو خوارزمية هورنر نجد $h(x) = (x+2)(x^2 + 2x - 3)$

أي $h(x) = (x+2) f(x)$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $h(x) = 0$: ..... (1,5)

$h(x) = 0$ يكافئ $(x+2) f(x) = 0$ يكافئ $x + 2 = 0$ أو $f(x) = 0$ يكافئ $x = -2$ أو $x = 1$ أو $x = -3$

ومنه $S = \{-3;-2;1\}$

4. تعين إشارة $h(x)$: ..... (1,5)

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

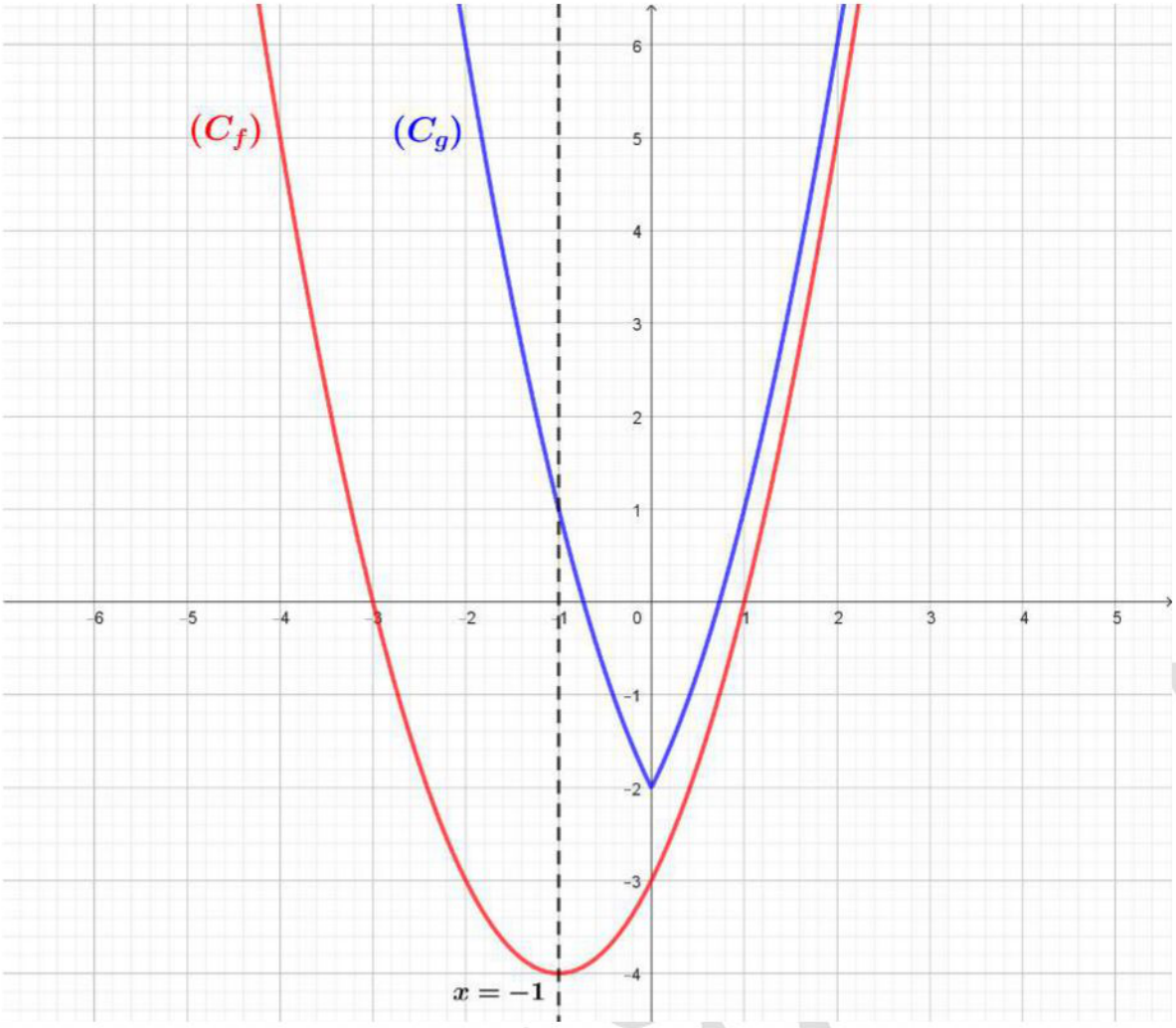
استنتاج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المتراجحة $h(x) \leq 0$ ..... (01)

لما $x \in]-\infty;-3] \cup [-2;1]$ و عليه $S =]-\infty;-3] \cup [-2;1]$ $h(x) \leq 0$

5. استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة : $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = 0$ . ..... (01)

$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = 0$ يكافئ $\left(x^2\right)^3 + 4\left(x^2\right)^2 + \left(x^2\right) - 6 = 0$ بوضع $t = x^2$ مع $t \geq 0$ تصبح $t^3 + 4t^2 + t - 6 = 0$

ومن السؤال 5، نجد $t = -3$ أو $t = -2$ (مرفوضين لأن $t \geq 0$) أو $t = 1$ وعليه $x^2 = 1$ إذن $x = 1$ أو $x = -1$ وعليه $S = \{-1;1\}$.


(C_f)
(C_g)
$x = -1$

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-03-

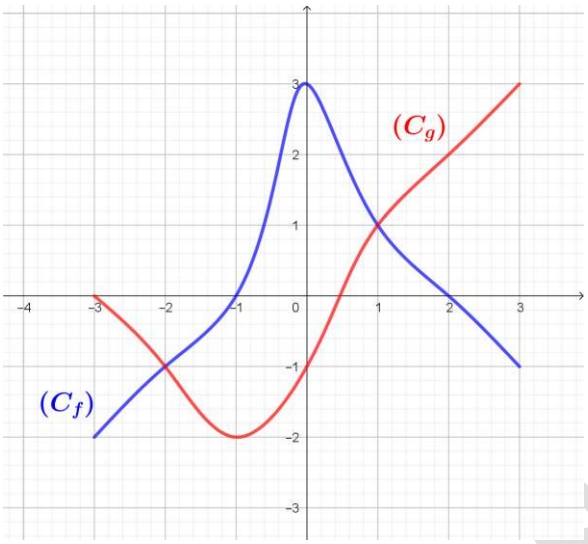
التمرين الأول :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على الترتيب بـ: $f(x)=\dfrac{8-3x}{2+\sqrt{3x-4}}$ و $g(x)=2-\sqrt{3x-4}$

- بين أن الدالتين f و g متساويتين.

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو موضح في الشكل المقابل:



1. عين $D_{g\circ f}$
2. عين كل من $(g\circ f)(-1)$، $(g\circ f)(0)$ و $(g\circ f\circ g)(-1)$
3. حل بيانيا المعادلتين : $(g\circ f)(x)=-1$ ، $(f\circ g)(x)=-1$
4. حل بيانيا المتراجحتين: $(g\circ f)(x)>-1$، $(f\circ g)(x)<-1$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x+m+1$ و $g(x)=mx+1$

جد قيم العدد الحقيقي m التي تحقق : $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$

حل التمرين الأول :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على الترتيب بـ: $f(x)=\dfrac{8-3x}{2+\sqrt{3x-4}}$ و $g(x)=2-\sqrt{3x-4}$

- تبين أن الدالتين f و g متساويتين:

الدلة معرفة f لما $\begin{cases}2+\sqrt{3x-4}\neq 0\\ \text{و}\\ 3x-4\geq 0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\sqrt{3x-4}\neq -2 \quad .....(*)\\ \text{و}\\ x\geq\dfrac{4}{3}\end{cases}$ العلاقة $(*)$ محققة مهما كان $x\in\mathbb{R}$ ومنه $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ \text{و}\\ x\in\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right[\end{cases}$ ومنه

$D_f=\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right[$ أي $x\in\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right[$

ومن جهة الدالة معرفة g لما $3x-4\geq 0$ اي من أجل $x\geq\dfrac{4}{3}$ أي $x\in\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right[$ ومنه $D_g=\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right[$

إذن $D_f=D_g$.....(1)

ومن جهة :

$$g(x)=2-\sqrt{3x-4}=\frac{\left(2-\sqrt{3x-4}\right)\left(2+\sqrt{3x-4}\right)}{\left(2+\sqrt{3x-4}\right)}=\frac{(2)^2-\left(\sqrt{3x-4}\right)^2}{2+\sqrt{3x-4}}=\frac{4-(3x-4)}{2+\sqrt{3x-4}}=\frac{8-3x}{2+\sqrt{3x-4}}=f(x)$$

إذن $g(x)=f(x)$.....(2)

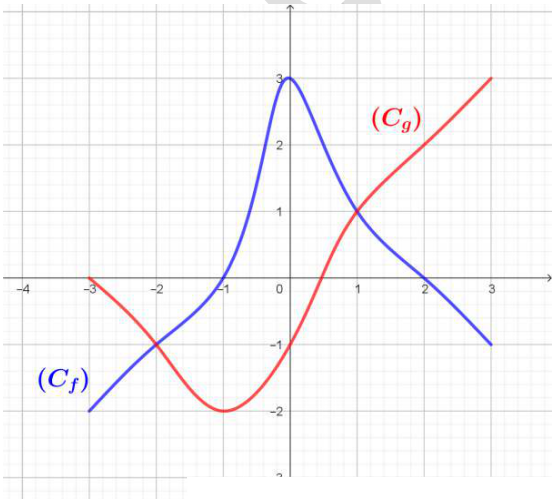
من (1)و (2) نستنتج أن الدالتين f و g متساويتين

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو موضح في الشكل المقابل:

1. تعين $D_{g\circ f}$

$$\begin{aligned}D_{g\circ f}&=\{x\,/\,x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}\\&=\{x\,/\,x\in[-3;3]\wedge f(x)\in[-3;3]\}\\&=\{x\,/\,x\in[-3;3]\wedge -3\leq f(x)\leq 3\}\\&=\{x\,/\,x\in[-3;3]\wedge x\in[-3;3]\}\\&=\{x\,/\,x\in[-3;3]\}\end{aligned}$$



2. تعين كل من $(g\circ f)(-1)$، $(g\circ f)(0)$ و $(g\circ f\circ g)(-1)$:

$$(g\circ f)(-1)=g\left[f(-1)\right]=g(0)=-1$$
$$(g\circ f)(0)=g\left[f(0)\right]=g(3)=3$$
$$(g\circ f\circ g)(-1)=g\left[f\left[g(-1)\right]\right]=g\left[f(-2)\right]=g(-1)=-2$$

3. حل بيانيا المعادلتين : $(g\circ f)(x)=-1$ ، $(f\circ g)(x)=-1$

✓ $(g\circ f)(x)=-1$ يكافئ $g\left[f(x)\right]=-1$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-1$

معناه 0

www.dzexams

$f(x)=-2$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ لما $x=-3$

ومنه حلول المعادلة $(g\circ f)(x)=-1$ هي $S=\{-3;-1;2\}$

✓ $(f\circ g)(x)=-1$ يكافئ $f[g(x)]=-1$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-1$

معناه $g(x)=3$ أو $g(x)=-2$

$g(x)=3$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=3$ (محور الفواصل) لما $x=3$

$g(x)=-2$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ لما $x=-1$

ومنه حلول المعادلة $(f\circ g)(x)=-1$ هي $S=\{-1;3\}$

4. حل بيانيا المتراجحتين: $(g\circ f)(x)>-1$ ، $(f\circ g)(x)<-1$

✓ $(g\circ f)(x)>-1$ يكافئ $g[f(x)]>-1$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_g) الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-1$

معناه $-2<f(x)\leq -3$ أو $0<f(x)\leq 3$

$-2<f(x)\leq -3$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) الواقعة بين المستقيمين ذو المعادلتين $y=-3$ و $y=-2$ أي $S=\varnothing$

$0<f(x)\leq 3$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) الواقعة بين المستقيمين ذو المعادلتين $y=0$ و $y=3$ أي $x\in]-1;2[$

ومنه حلول المتراجحة $(g\circ f)(x)>-1$ هي $S=]-1;2[$

✓ $(f\circ g)(x)<-1$ يكافئ $f[g(x)]>-1$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-1$

معناه $-2<g(x)<3$

$-2<g(x)<3$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_g) الواقعة بين المستقيمين ذو المعادلتين $y=-2$ و $y=3$ أي

$x\in[-3;-1[\cup]-1;3[$

ومنه حلول المتراجحة $(f\circ g)(x)<-1$ هي $S=[-3;-1[\cup]-1;3[$

حل التمرين الثالث :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x+m+1$ و $g(x)=mx+1$

✓ إيجاد قيم العدد الحقيقي m التي تحقق : $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$:

$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$ يكافئ $g[f(x)]=f[g(x)]$ يكافئ $mf(x)+1=g(x)+m+1$ يكافئ

$m(x+m+1)+1=mx+1+m+1$ يكافئ $mx+m^2+m+1=mx+m+2$ يكافئ $m^2+1=2$ يكافئ $m^2=1$ ومنه $m=1$ أو $m=-1$

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات-04-

التمرين الأول :

لتكن f الدالة المعرّفة على $D =]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$ جزء من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{2x-1}$

1. تحقق أنّ من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}$
2. من أجل كل عدد حقيقي x من D نضع : $h(x) = \frac{1}{2x-1}$.
   - بين أنّ : $h = g \circ k$ حيث g هي الدالة " مقلوب" ($x \mapsto \frac{1}{x}$) ، و k دالة يطلب تعيينها
   - عين اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $]-\infty;\frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2};+\infty[$ ثم استنتج عندئذ اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;\frac{1}{2}[$ ، $]\frac{1}{2};+\infty[$.
4. بين أنّ النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم $(O,I;J)$.
5. حدّد طريقة لرسم (C_f) انطلاقا من المنحني البياني للدالة $\left(v : x \mapsto \frac{1}{4x}\right)$ ،ثم أرسم (C_f) في معلم $(O,I;J)$.

(إرشاد : يمكن كتابة الدالة f على الشكل: $\left(\quad \right)$) .

6. بين أن الدالة p المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $p(x) = f(|x|)$ زوجية ، وأن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ و $x \neq \frac{1}{2}$ لدينا : $p(x) = f(x)$ ثم اشرح كيف يمكن رسم منحنى الدالة p ثم ارسمه .

التمرين الثاني :

ليكن $P_m(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x و m وسيط حقيقي $p_m(x) = (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m - 4$

1. بين أن -1 جذرا لـ $P_m(x)$ من أجل كل m من $\mathbb{R}$
2. عين $Q_m(x)$ بحيث من أجل كل x حقيقي فان : $P_m(x) = (x+1) \times Q_m(x)$
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$
4. عين قيم m في كل حالة من الحالات التالية:
   - للمعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول متميزة في $\mathbb{R}$.
   - للمعادلة $P_m(x) = 0$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.
   - للمعادلة $P_m(x) = 0$ ثلاث حلول في $\mathbb{R}$. من نفس الإشارة.
   - $P_m(x) = 0$

التمرين الأول : لتكن f الدالة المعرّفة على $D=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ جزء من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$

1. تحقق أنّ من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2x-1}$

$$\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{2x-1}=\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2x-1}=\frac{x}{2x-1}=f(x)$$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من D نضع : $h(x)=\dfrac{1}{2x-1}$.

- تبيين أنّ : $h=g\circ k$ حيث g هي الدالة " مقلوب" ($x\mapsto\dfrac{1}{x}$)، و k دالة يطلب تعيينها

$h:x\xrightarrow{k}2x-1\xrightarrow{g}\dfrac{1}{2x-1}$ وعليه $k(x)=2x-1$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ و $h=g\circ k$

- تعيين اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ، $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

أ- على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$: الدالة $k:x\to 2x-1$ متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ لأن $a=2>0$

ولدينا من أجل كل $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ نجد $2x-1\in]-\infty;0[$ وعليه الدالة $g:x\to\dfrac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

وعليه الدالة $h=g\circ k$ متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

ب- على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$: الدالة $k:x\to 2x-1$ متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ لأن $a=2>0$

ولدينا من أجل كل $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ نجد $2x-1\in]0;+\infty[$ وعليه الدالة $g:x\to\dfrac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

وعليه الدالة $h=g\circ k$ متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

✓ استنتج عندئذ اتجاه تغير الدالة f على المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ، $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$: لدينا $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2x-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}h(x)$

بما أن الدالة h متناقصة على المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ، $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإن الدالة $\frac{1}{2}h$ $(\frac{1}{2}>0)$ تبقى متناقصة على المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

عليه فالدالة $f=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}h$ متناقصة تماما على المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ ، $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

4. بين أنّ النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم $(O,I;J)$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ أي $-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ يكافئ $1-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ وعليه $2a-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f(2a-x)+f(x)=f(1-x)+f(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2(1-x)-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{1-2x}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}\right)$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}}{1-2x}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}=2+\frac{\frac{1}{2}}{-(2x-1)}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}=1=2\left(\frac{1}{2}\right)=2b$$

3. تحديّد طريقة لتمثيل (C_f) ، ثم تمثيل (C_f) في معلم $(O,I;J)$.

لدينا $\left(\quad\right)$ يكافئ $f(x)=\frac{1}{2}+l\left(x-\frac{1}{2}\right)$ حيث $l(x)=\frac{1}{4x}$ و عليه (C_f) صورة منحنى الدالة $x\to\frac{1}{4x}$ بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

5. تبين أن الدالة p المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $p(x)=f(|x|)$ زوجية : لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$ نجد $-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$

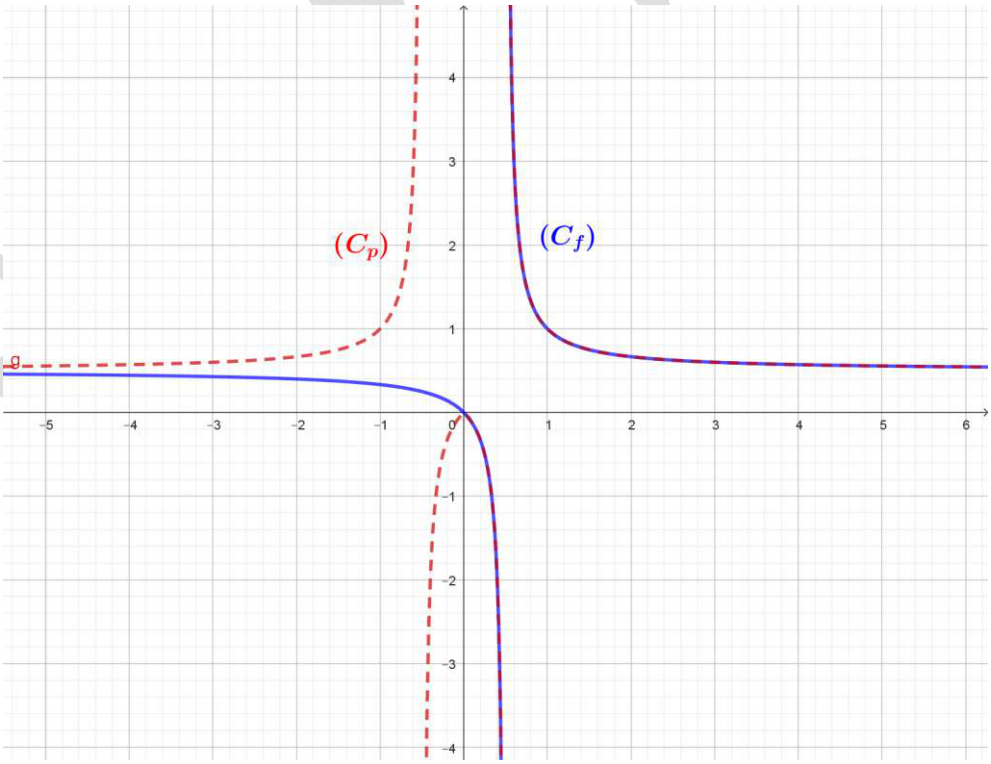
$$p(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=p(x)$$

ومنه الدالة p المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $p(x)=f(|x|)$ زوجية

- تبيين أن من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ و $x\neq\frac{1}{2}$ لدينا : $p(x)=f(x)$ ثم اشرح كيف يمكن رسم منحنى الدالة p ثم ارسمه .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ و $x\neq\frac{1}{2}$: $|x|=x$ ومنه يكون لدينا : $p(x)=f(|x|)=f(x)$

ومنه (C_P) منحنى الدالة ينطبق على (C_f) من أجل $x\geq 0$ و $x\neq\frac{1}{2}$ و بما أن الدالة p زوجية نكمل التمثيل بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب



التمرين الثاني: ليكن $P_m(x)$ كثير حدود لمتغير حقيقي x و m وسيط حقيقي $p_m(x)=(2m-1)x^3+(5m-5)x^2+(4m-8)x+m-4$

1. عين $Q_m(x)$ بحيث من أجل كل x حقيقي فان: $P_m(x)=(x+1)\times Q_m(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية أو خوارزمية هورنر نجد :

$P_m(x)=(x+1)\left[(2m-1)x^2+(3m-4)x+m-4\right]$ إذن $Q_m(x)=(2m-1)x^2+(3m-4)x+m-4$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)}\geq 0$

المتراجحة $\frac{P_4(x)}{P_1(x)}\geq 0$ معرفة لما $P_1(x)\neq 0$ أي $P_1(x)=(x+1)\left[x^2-x-3\right]\neq 0$ وعليه $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2};-1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

$$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}=\frac{(x+1)\left[7x^2+8x\right]}{(x+1)\left[x^2-x-3\right]}=\frac{7x^2+8x}{x^2-x-3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$		$-\frac{8}{7}$		-1		0		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$7x^2+8x$	+		+		0	−		−	0	+		+	
x^2-x+-3	+		−			−		−		−		+	
$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}$	+		−		0	+		+	0	−		+	

$$x\in\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left[\frac{-7}{8};-1\right[\cup\left]\frac{1-\sqrt{13}}{2};+\infty\right[\text{ لما } \frac{P_4(x)}{P_1(x)}\geq 0$$

5. تعيين قيم m في كل حالة من الحالات التالية: أ) للمعادلة $P_m(x)=0$ تقبل ثلاث حلول متمايزة في $\mathbb{R}$.

$P_m(x)=0$ تقبل ثلاث حلول متمايزة في $\mathbb{R}$ أي للمعادلة $Q_m(x)=0$ حلان مختلفان في $\mathbb{R}$ مع $2m-1\neq 0$ أي من أجل $m\neq\frac{1}{2}$ أي $\Delta>0: m\in\left]-\infty;-12\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ لما $\Delta>0$ أي $\Delta=(3m-4)^2-4(2m-1)(m-4)=m^2+12m$

ب) للمعادلة $P_m(x)=0$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

m	$-\infty$		-12		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+		+	

أي المعادلة $Q_m(x)=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ و عليه $\Delta<0$ ومنه $m\in\left]-12;0\right[$

- للمعادلة $P_m(x)=0$ ثلاث حلول في $\mathbb{R}$ ، حلان منهما متعاكسان في الإشارة.

أي $\Delta>0$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{m-4}{2m-1}>0$ و $S=\frac{-b}{a}=\frac{-(3m-4)}{2m-1}>0$ (حلان موجبان و حل سالب هو 1−)

أو $\Delta>0$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{m-4}{2m-1}<0$ (حلان مختلفان في الإشارة و حل سالب هو 1−)

m	$-\infty$		-12		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
$-b=-3m+4$	+		+		+		+	0	−		−		
$c=m-4$	−		−		−		−		−	0	+		
$a=2m-1$	−		−		−		+		+		+		
P	+		+		+		−		−	0	+		
S	−		−		−		+	0	−		−		
Δ	+	0	−	0	+		+		+		+		

وعليه $m\in\left]\frac{1}{2};4\right[$