ثانوية صديقي النوري – الجلفة | الموسم الدراسي: 2024–2025

الواجب المنزلي رقم (06)

(النهايات والسلوك التقاربي)

المستوى: ثانية ثانوي الشعب العلمية | الأستاذ: قويسم الخليل

سلم يوم: 22 / 01 / 2025 | يُعاد يوم: 29 / 01 / 2025

التمرين 01:

- احسب النهايات التالية (وفسّر النتائج هندسيا إن وجدت تفسيرات):

$$\bullet\ l_1 = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x(x-2)}\right)$$

$$\bullet\ l_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$$

$$\bullet\ l_3 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$$

$$\bullet\ l_4 = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$$

امسح الرمز لمشاهدة الحل

التمرين 02:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{(1+x)(1-x)^2}{2+x}$ ، وh دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^2-3x+5$

❶ عيّن العدد الحقيقي α بحيث من أجل كل $x\neq -2$ يكون: $f(x)=h(x)+\dfrac{\alpha}{2+x}$

❷ احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

التمرين 03:

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+6x+12$

و(C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

حيث (C_g) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=0$ في النقطة ذات الفاصلة α

حيث: $-1.47<\alpha<-1.48$

- بقراءة بيانية حدد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=\dfrac{x\cdot g(x)}{(x^2+2)^2}$

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❷ أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

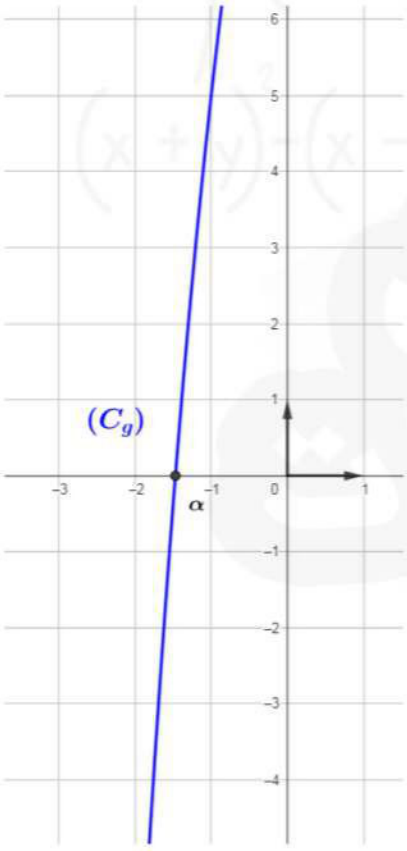
ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

❸ بيّن أنّ: $f(\alpha)-\dfrac{3}{2}\alpha=0$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

❹ مثّل بيانيا (Δ) وَ (C_f) (خذ $f(1.8)\approx 0$)

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^3+mx^2+2m-6=0$$



www.dze بالتوفيق

الواجب المنزلي رقم (06)

(النهايات والسلوك التقاربي)

المستوى: ثانية ثانوي الشعب العلمية
الأستاذ: قويســـــــم الخليل

تصحيح التمرين 01:

– حساب النهايات:

• $l_1 = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x(x-2)}\right)$

$= \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x}\right)$

$= \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)$

$= \boxed{2}$

التفسير الهندسي: منحنى الدالة $x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x(x-2)}$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته: $y = 2$

• $l_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(-x)$

$= \boxed{-\infty}$

• $l_3 = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right) = -\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x-0}\right)$

نضع: $\begin{cases} f(x) = \cos x \\ f(0) = \cos x = 1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f'(x) = -\sin x \\ f'(1) = -\sin 0 = 0 \end{cases}$

وعليه:

$l_3 = -\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x-0}\right)$

$= -\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$

$= -f'(0) = \boxed{0}$

• $l_4 = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$

نضع: $\begin{cases} f(x) = \sin(\pi x) \\ f(1) = \sin(\pi(1)) = 0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} f'(x) = \pi\cos(\pi x) \\ f'(1) = \pi\cos(\pi(1)) = -\pi \end{cases}$

وعليه:

$l_4 = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)$

$= f'(1) = \boxed{-\pi}$

تصحيح التمرين 02:

1) تعيين a حتى يكون: $f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$:

من أجل كل $x \neq -2$

$= \dfrac{(x^2-2x+1)(x+1)}{x+2}$

$= \dfrac{x^3-2x^2+x+x^2-2x+1}{x+2}$

$= \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x+2}$

ولدينا:

$f(x) = g(x) + \dfrac{a}{x+2}$

$= x^2-3x+5+\dfrac{a}{x+2}$

$= \dfrac{(x^2-3x+5)(x+2)+a}{x+2}$

$= \dfrac{x^3-x^2-x+10+a}{x+2}$

بالمطابقة نجد: $10 + a = 1$

ومنه: $\boxed{a = -9}$

إذن: $f(x) = g(x) - \dfrac{9}{x+2}$

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{9}{x+2}\right] = 0$

▪ تفسير النتيجة هندسيا:

المنحنى الممثل للدالة f والمنحنى الممثل للدالة g متقاربان بجوار $+\infty$ و $-\infty$

تصحيح التمرين 03:

I) تعيين إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

1) أ– حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب– حساب $f'(x)$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x) = \dfrac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{x\times g(x)}{(x^2+2)^2}$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x				
$g(x)$				
$f'(x)$				

▪ جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗	$+\infty$

❷ أ-تبيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-6-2x}{x^2+2}\right)$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

لدينا من أجل كل x حقيقي: $f(x)-x=\frac{-2x-6}{x^2+2}$

لدينا: $(x^2+2)>0$ ومنه الإشارة من $(-2x-6)$:

لدينا: $-2x-6=0$ ومنه: $-2x=6$

ومنه: $x=-3$ وعليه:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		0		$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(Δ) يقطع (C_f)		(Δ) تحت (C_f)

❸ تبيان أن: $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha$$
$$= \frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2}$$
$$= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2}=0$$

▪ حصر $f(\alpha)$:

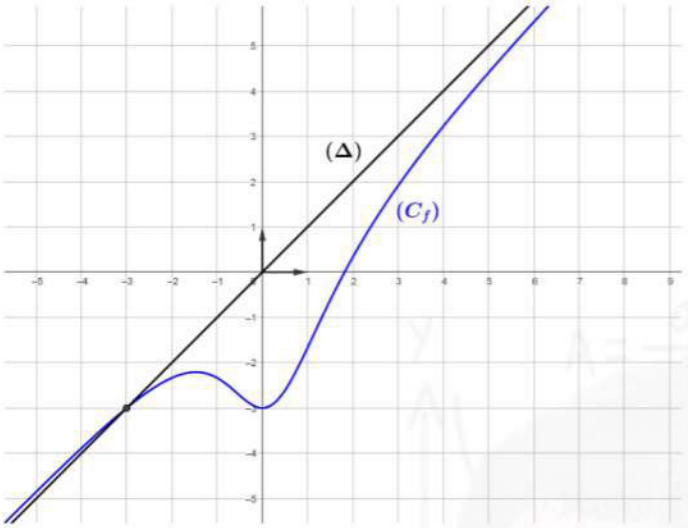
لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$

ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

ومنه: $\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$

ومنه: $-2.22<f(\alpha)<-2.21$

❹ إنشاء (Δ) و (C_f):



❺ المناقشة البيانية:

لدينا: $x^2(x-m)=2(m+3)$

ومنه: $x^3-mx^2=2(m+3)$

ومنه: $x^3-mx^2=2m+6$

ومنه: $x^3-6=mx^2+2m$

ومنه: $x^3-6=m(x^2+2)$

ومنه: $\frac{x^3-6}{x^2+2}=m$

ومنه: $f(x)=m\ldots(E)$

إذن حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=m$، وهي:

لما: $m<-3$ لـ (E) حل سالب تماما

لما: $m=-3$ لـ (E) حل معدوم وحل سالب تماما

لما: $-3<m<f(\alpha)$ لـ (E) حل موجب تماما وحلان سالبان تماما

لما: $m=f(\alpha)$ لـ (E) حل موجب تماما وحل سالب تماما

لما: $m>f(\alpha)$ لـ (E) حل موجب تماما



نُشر يوم: 30 جانفي 2025

كتبه الأستاذ: قويسم الخليل