الفرض الثاني للفصل الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثانية ثانوي شعبة علوم تجريبية — الأستاذ: قويسم الخليل

المدة: ساعة و15 د — يوم: 28 فيفري 2023

التمريـــــن 01 | 06 نقاط

ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي، حيث $AB = AC = BC = \alpha$

لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

1. تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ)
2. بيّن أن الشعاع $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M
3. لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-4);(C;1)\}$

أ/ بيّن أن $GM = \alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ب/ استنتج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

ج/ بأخذ $\alpha = 2$، أنشئ المجموعة (Γ)

التمريـــــن 02 | 12 نقاط

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{2x - 2}$

حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

- عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة ذات الاحداثيات $(0;-1)$

II) نضع فيما يلي: $\alpha = -2$ و $\beta = 2$:

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسّر النتائج هندسيا إن وُجدت.
2. أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-2}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3. أ/ بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا: $f(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4. أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر لـ (C_f)

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل النقطة ω

5. ارسم كل من (Δ) و (C_f)
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = \dfrac{1}{2}x + m$
7. وضّح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة $h: x \mapsto f(|x|)$ انطلاقا من (C_f)، ثم أنشئه

سؤال إضافي | 02 نقطة

- أثبت ما يلي:

إنتهى

تصحيح مقترح للموضوع التحضيري رقم ❷

المستوى: ثانية ثانوي — الأستاذ: قويسم الخليل

التمريـــــن 01 — 06 نقاط

❶ التحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ):

لدينا: $\|\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\|$

ومنه: $\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\|$

إذن: $B\in(\Gamma)$

❷ تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M:

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$$
$$=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

إذن الشعاع $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$ مستقل عن M

❸

أ/ تبيين أن $GM=\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$:

لدينا: G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-4);(C;1)\}$

ومنه: $\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

معناه: $\|(1-4+1)\overrightarrow{MG}\|=\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$

معناه: $\|-2\overrightarrow{MG}\|=\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$

معناه: $2MG=\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$

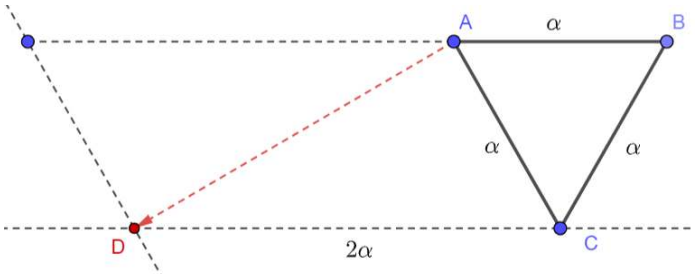
معناه:

$$MG=\frac{\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|}{2}$$

• نحسب $\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$:

نضع: $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

ومنه:



لدينا حسب فيثاغورس: $AD^2+AC^2=CD^2$

ومنه: $AD=\sqrt{CD^2-AC^2}$

ومنه: $AD=\sqrt{(2\alpha)^2-\alpha^2}$

ومنه: $-\alpha^2$

ومنه:

ومنه: $\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{AD}\|=\|\sqrt{3}\alpha\|=\sqrt{3}\alpha$

وعليه:

$$MG=\frac{\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|}{2}\Rightarrow\boxed{MG=\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}}$$

ب/ استنتاج طبيعة المجموعة (Γ) :

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}$

ج/ إنشاء المجموعة (Γ) حيث $\alpha=2$:

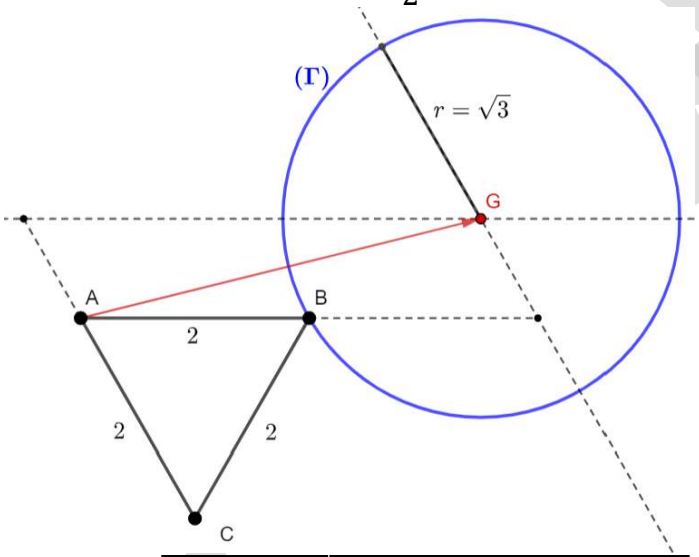
$$MG=\frac{\sqrt{3}\times 2}{2}=\sqrt{3}$$

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{3}$

لدينا: G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-4);(C;1)\}$

ومنه:

$$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



التمريـــــن 02 — 12 نقاط

I) تعيين α و β :

لدينا: $f(0)=-1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2+\alpha(0)+\beta}{2(0)-2}=-1\Rightarrow\frac{\beta}{-2}=-1$$
$$\Rightarrow\boxed{\beta=2}$$

ولدينا: تقبل قيمة حدية لـ معناه:

$$f'(x)=\frac{(2x+\alpha)(2x-2)-2(x^2+\alpha x+\beta)}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{4x^2-4x+2\alpha x-2\alpha-2x^2-2\alpha x-2\beta}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x-2\alpha-2\beta}{(2x-2)^2}$$

ولدينا: $f'(0)=0$ **ومنه:**

$$\frac{2(0)^2-4(0)-2\alpha-2\beta}{(2(0)-2)^2}=0\Rightarrow -2\alpha-2\beta=0$$
$$\Rightarrow -2\alpha=2\beta$$
$$\Rightarrow \alpha=-\beta$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha=-2}$$

ومنه:

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}}$$

(II

❶ **احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها :**

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار** $+\infty$ **معادلته** $x=1$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار** $-\infty$ **معادلته** $x=1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}\right)=-\infty$

❷

أ/ **تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :**

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}$$
$$=\frac{(ax+b)(2x-2)+c}{2x-2}$$
$$=\frac{2ax^2-2ax+2bx-2b+c}{2x-2}$$
$$\frac{2ax^2+(2b-2a)x-2b+c}{}$$

بالمطابقة

$$\begin{cases}2a=1\\2b-2a=-2\\-2b+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{2}\\c=1\end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-2}}$$

ب/ **استنتاج أنّ (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار $\pm\infty$:**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2x-2}\right]$$
$$=0$$

ومنه (C_f) **يقبل مستقيم مقارب مائل** (Δ) **بجوار** $\pm\infty$ **معادلته**

$$y_{(\Delta)}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

ج/ **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):**

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x-2=0$ **معناه:** $x=1$ **ومنه:**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$		$+$
الوضع النسبي	(C_f) **تحت** (Δ)		(C_f) **فوق** (Δ)

❸

أ/ **تبيين أن:** $f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$ **:**

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(2x-2)-2(x^2-2x+2)}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{4x^2-4x-4x+4-2x^2+4x-4}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ **دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:**

لدينا: $(2x-2)^2>0$

ومنه: إشارة $f'(x)$ **من إشارة** $2x(x-2)$**:**

لدينا:

$$2x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}2x=0\\ \text{أو}\\ x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{أو}\\ x=2\end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$

❹

أ/ ايجاد إحداثيي النقطة ω :

نعوض $x=1$ في معادلة المستقيم (Δ):

$$y=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}\Rightarrow y=0$$

ومنه: $\omega(1;0)$

ب/ تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر لـ (C_f) :

مركز التناظر:

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha-x\in D_f \\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha+x)\in D_f \\ (\alpha-x)\in D_f \\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta \end{cases}$$

• لدينا: $x\in D_f$

معناه: $x\in\ ]-\infty;1[\cup\ ]1;+\infty[$

معناه: $x>1$ أو $x<1$

معناه: $(-x)<-1$ أو $(-x)>-1$

معناه: $(2(1)-x)<1$ أو $(2(1)-x)>1$

معناه: $(2(1)-x)\in\ ]-\infty;1[\cup\ ]1;+\infty[$

معناه: $(2(1)-x)\in D_f$

• ولدينا:

$$f(2(1)-x)+f(x)=$$
$$=\frac{(2-x)^2-2(2-x)+2}{2(2-x)-2}+\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$$
$$=\frac{4-4x+x^2-4+2x+2}{4-2x-2}+\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$$
$$=0\frac{x^2-2x+2}{-(2x-2)}+\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$$
$$=0=2(0)$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

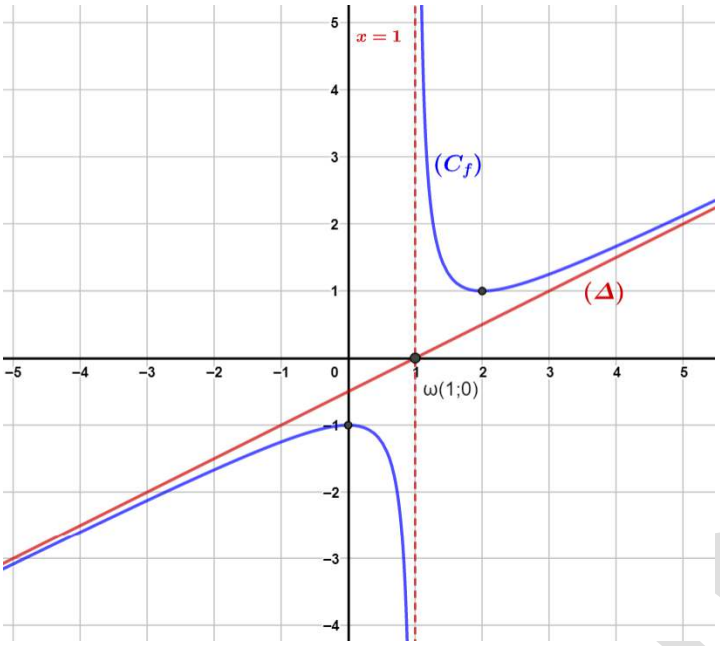
ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ f يشمل معناه يوجد

$$\Rightarrow f'(a)(1-a)+f(a)=0$$
$$\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}-\frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a+\frac{a^2-2a+2}{2a-2}=0$$
$$\Rightarrow 4a-4=0$$
$$\Rightarrow a-1=0$$
$$\Rightarrow a=1$$

لدينا: $a\notin\mathbb{R}-\{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يشمل ω

❺ رسم كل من (Δ) و (C_f) :



❻ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=\frac{1}{2}x+m$ ، وهي:

لما $m\in\ ]-\infty;-1[$ للمعادلة حل موجب تماما

لما $m=-1$ للمعادلة حل مضاعف معدوم

لما $m\in\ ]-1;-\frac{1}{2}[$ للمعادلة حل سالب تماما

لما $m=-\frac{1}{2}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m\in\ ]-\frac{1}{2};0[$ للمعادلة حل موجب تماما

لما $m=0$ للمعادلة حل مضاعف موجب تماما

لما $m\in\ ]0;+\infty[$ للمعادلة حل موجب تماما

❼ توضيح كيف يمكن إنشاء (C_h):

لدينا:

$$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

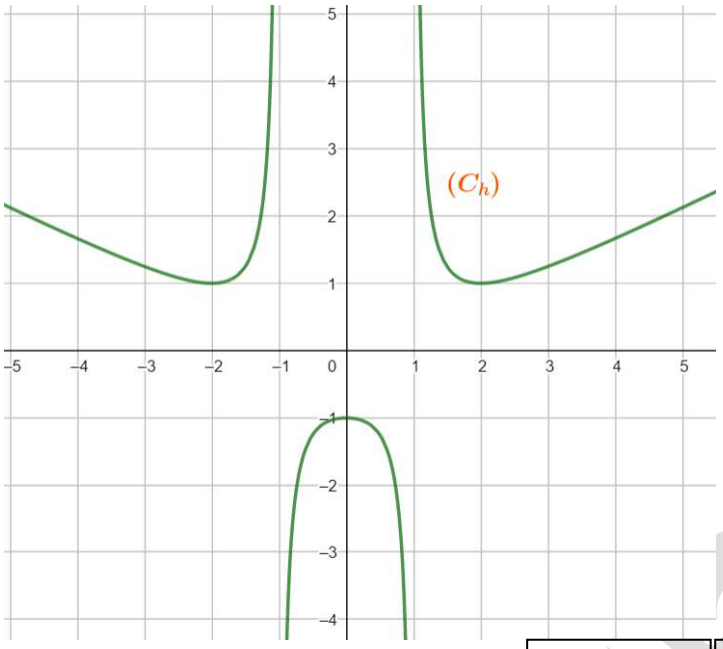
ومنه الدالة h زوجية

ولدينا:

$$h(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & ;\ x\geq 0 \\ f(-x) & ;\ x\leq 0 \end{cases}$$

ومنه h ينطبق على f لما

- إنشاء (C_h)



سؤال إضافي	02 نقطة

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cdots$$
$$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-3\sin(-(\pi-x))+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\cos(x)-2\sin(x)+3\sin(x)-\cos(x)$$
$$=\sin(x)$$

#الخليل_للرياضيات

الخليل للرياضيات