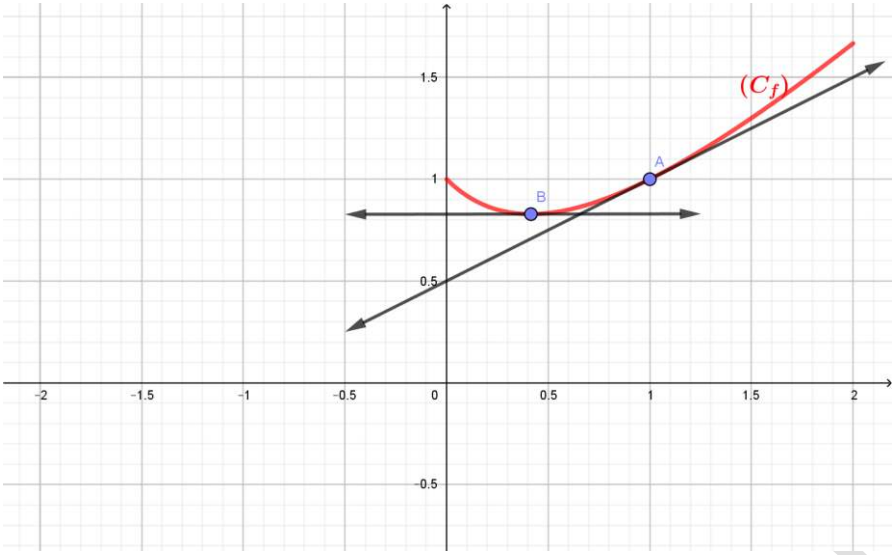
الجزء الأول

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بتمثيلها البياني (C_f)، المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين $A(1;1)$ و $B(-1+\sqrt{2};2\sqrt{2}-2)$.

كما في الشكل المقابل:



1) أحسب العددين $f'(1)$ و $f'(-1+\sqrt{2})$ ، ثم عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة التي ترتيبتها $2\sqrt{2}-2$.

2) عين تقريبا تآلفيا لـ $f(x)$ بجوار العدد 1 ثم استنتج قيمة مقربة $f(0,98)$, $f(1,03)$.

3) حل في $[0;2]$ المعادلات التالية:

$f(x)=0$, $f'(x)=0$.

4) حل في $[0;2]$ المتراجحات التالية: $f(x)\leq 0$, $f'(x)\leq 0$.

الجزء الثاني

f هي الدالة المعرّفة في الجزء الأول على المجال $[0;2]$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$ حيث a و b عددان حقيقيان

1) عين قيمتي a و b.

2) بفرض أن $a=0$ و $b=1$

أ- احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

جـ- عين القيمة الحدية المحلية للدالة f مع التبرير

د- عين حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[1;2]$

الجزء الثالث

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ $g(x)=\dfrac{x^2+1}{|x|+1}$

1) بين أن الدالة g زوجية ثم اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) اشرح كيفية تمثيل (C_g) منحنى الدالة g، ثم مثله في نفس المستوي السابق.

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $g(x)=m$

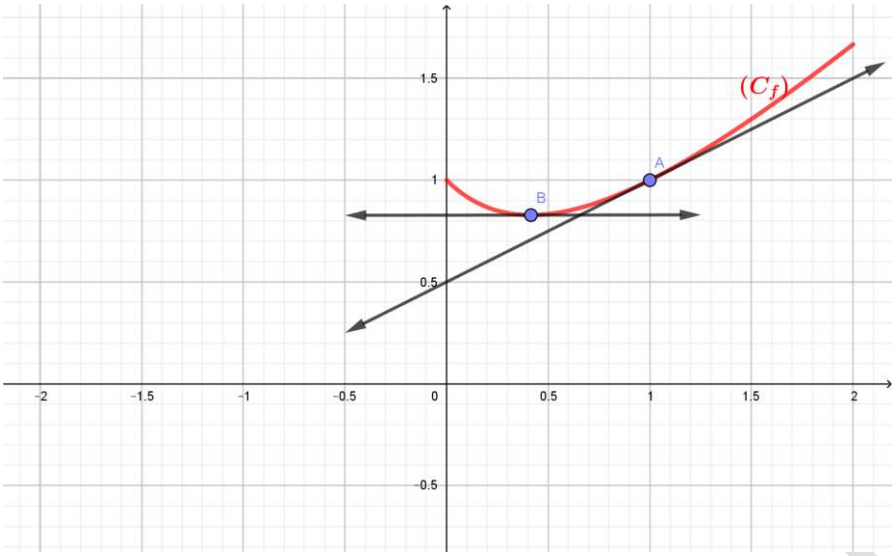
الجزء الرابع

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[-1;0]$ بـ $h(x)=f(-2x)$.

- احسب $h'(x)$ (h)

حل الجزء الأول

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بتمثيلها البياني (C_f)، المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين $A(1;1)$ و $B\left(-1+\sqrt{2};2\sqrt{2}-2\right)$.



كما في الشكل المقابل:

1) حساب العددين $f'(1)$ و $f'\left(-1+\sqrt{2}\right)$:

$f'(1)$ هو معامل توجيه المماس في النقطة ذات الفاصلة 1 وعليه نختار نقطتين من المماس و لتكن $A(1;1)$ و $C(0;0,5)$ ومنه:

$$f'(1)=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{1-0,5}{1-0}=\frac{0,5}{1}=\frac{1}{2}$$

و $f'\left(-1+\sqrt{2}\right)=0$ لان المماس في النقطة $B\left(-1+\sqrt{2};2\sqrt{2}-2\right)$ موازي إلى حامل محور الفواصل .

- تعيين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة التي ترتيبتها $2\sqrt{2}-2$:

$$y=f'\left(-1+\sqrt{2}\right)\left(x-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)+f\left(-1+\sqrt{2}\right)$$
$$=0\left(x-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)+2\sqrt{2}-2$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

2) تعيين تقريبا تآلفيا لـ $f(x)$ بجوار العدد 1 ثم استنتج قيمة مقربة $f(0,98)$, $f(1,03)$.

لدينا لما x قريب إلى 1 :

$$f(x)\simeq f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$\simeq\frac{1}{2}(x-1)+1$$
$$\simeq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

و عليه

$$f(1,03)\simeq\frac{1}{2}(1,03)+\frac{1}{2}$$
$$\simeq 1,015$$
$$f(0,98)\simeq\frac{1}{2}(0,98)+\frac{1}{2}$$
$$\simeq 0,99$$

3) حل في $[0;2]$ المعادلات التالية: $f(x)=0$, $f'(x)=0$.

$f(x)=0$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل أي $S=\varnothing$

$f'(x)=0$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) التي يمكن عندها تمثيل مماس لـ (C_f) موازي إلى حامل محور الفواصل أي $S=\left\{-1+\sqrt{2}\right\}$

4) حل في $[0;2]$ المتراجحات التالية: $f(x)\leq 0$, $f'(x)\leq 0$.

$f(x)\leq 0$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) التي تقع تحت أو تقطع حامل محور الفواصل أي $S=\varnothing$

$f'(x)\leq 0$ معناه تعيين المجالات التي تكون عليها الدالة f متناقصة تماما أي $S=\left[0;-1+\sqrt{2}\right]$.

حل الجزء الثاني

f هي الدالة المعرّفة في الجزء الأول على المجال $[0;2]$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$ حيث a و b عددان حقيقيان

1) تعين قيمتي a و b.

من التمثيل البياني لدينا $f(0)=1$ معناه $b=1$ وكذلك لدينا $f(1)=1$ معناه $\dfrac{1^2+a+b}{2}=1$ معناه $\dfrac{2+a}{2}=1$ معناه $2+a=2$ ومنه $a=0$

2) بفرض أن $a=0$ و $b=1$

لدينا $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

أ- حساب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;2]$ ومن اجل كل $x\in[0;2]$:

$$f'(x)=\frac{(2x)(x+1)-(1)(x^2+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\left[x^2+2x-1\right]$ لأن $(x+1)^2>0$

نحل المعادلة $x^2+2x-1=0$: $\begin{cases}\Delta=8\\ x_1=-1+\sqrt{2}\\ x_2=-1-\sqrt{2}\end{cases}$ ومنه

x	0	$-1+\sqrt{2}$	2
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	

ب- جدول تغيرات الدالة f

x	0	$-1+\sqrt{2}$	2
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	1	$2\sqrt{2}-2$	$\frac{5}{3}$

جـ- عين القيمة الحدية المحلية للدالة f مع التبرير

f' انعدمت وغيرت من إشارتها في القيمة $-1+\sqrt{2}$ إذن يوجد مجال مفتوح $]0;1[$ يشمل $-1+\sqrt{2}$ وعليه $f\left(-1+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة على المجال $]0;1[$

د- تعين حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[1;2]$

بما أن $x\in[1;2]$ معناه $1\le x\le 2$ و بما أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[1;2]$ فإن $f(1)\le f(x)\le f(2)$ إذن $1\le f(x)\le\frac{5}{3}$.

حل الجزء الثالث

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ $g(x)=\dfrac{x^2+1}{|x|+1}$

1) تبين أن الدالة g زوجية .

لدينا من أجل كل $x\in[-2;2]$ نجد $-x\in[-2;2]$ و $g(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{|-x|+1}=\dfrac{x^2+1}{|x|+1}=g(x)$ $\quad(|-x|=|x|)$

✓ كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

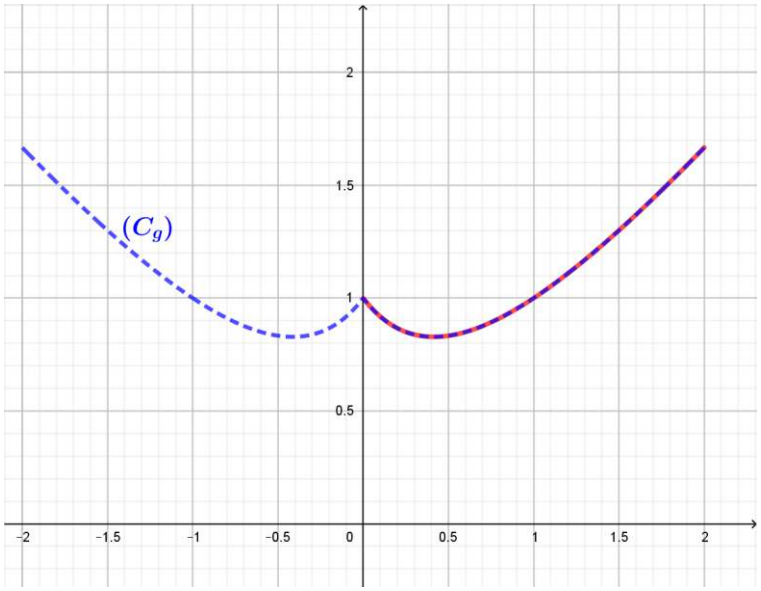
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1}=f(x) & ;x\in[0;2]\\ \dfrac{x^2+1}{-x+1} & ;x\in[-2;0]\end{cases}$$

2) شرح كيفية تمثيل (C_g) منحنى الدالة g ، ثم مثله في نفس المستوي السابق .

بما أن $g(x)=f(x)$ على المجال $[0;2]$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) و نكمل التمثيل على المجال $[-2;0]$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لأن g دالة زوجية.

3) مناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $g(x)=m$

عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$



لما $m\in]-\infty;2\sqrt{2}-2[$ ليس للمعادلة حل على المجال $[-2;2]$

لما $m=2\sqrt{2}-2$ للمعادلة حلان كلاهما مضاعف في المجال $x\in[-2;2]$

لما $m\in]2\sqrt{2}-2;1[$ للمعادلة أربعة حلول على المجال $[-2;2]$

لما $m=1$ للمعادلة ثلاثة حلول على المجال $[-2;2]$

لما $m\in\left]1;\frac{5}{3}\right]$ للمعادلة حلان على المجال $[-2;2]$

لما $m\in\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ليس للمعادلة حل على المجال $[-2;2]$

حل الجزء الرابع

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[-1;0]$ بـ $h(x)=f(-2x)$.

- حساب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h (دون حساب عبارة الدالة h)

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $[-1;0]$ ومن اجل كل $x\in[-1;0]$: $h'(x)=-2f'(-2x)$

✓ ندرس إشارة $f'(-2x)$:

لدينا $f'(x)\le 0$ لما $0<x\le -1+\sqrt{2}$

نستبدل $-2x$ بـ x نجد : $f'(-2x)\le 0$ لما $0<-2x\le -1+\sqrt{2}$ يكافئ $\frac{-1+\sqrt{2}}{-2}\le x<0$ أي لما $x\in\left[\frac{-1+\sqrt{2}}{-2};0\right[$

ولدينا $f'(x)\ge 0$ لما $-1+\sqrt{2}\le x<2$

نستبدل $-2x$ بـ x نجد : $f'(-2x)\ge 0$ لما $-1+\sqrt{2}\le -2x<2$ يكافئ $-1<x\le\frac{-1+\sqrt{2}}{-2}$ أي لما $x\in\left]-1;\frac{-1+\sqrt{2}}{-2}\right]$

وعليه:

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{2}}{-2}$		0
$f'(-2x)$		$+$	0	$-$	
-2		$-$		$-$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{-1+\sqrt{2}}{-2};0\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[-1;\frac{-1+\sqrt{2}}{-2}\right]$