مجلة المفيد في الرياضيات

لتلاميذ الثانية ثانوي شعب علمية

MATH

الاحتمـــالات



ملخص الدرس

10 تمارين محلولة

للأستاذ بلحودي حمو

ملخـــــص الدرس

خـــــــــواص

الخاصية	الحوادث
$0 \le p(A) \le 1$	A حادثة كيفية
$p(E)=1$ ؛ $p(\phi)=0$	الحادثتان الأكيدة ، المستحيلة
$p(A \cup B)=p(A)+p(B)$	A ، B غير متلائمتين
$p(\overline{A})=1-p(A)$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A
$p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$	A ، B كيفيتان

تجربة عشوائية:

نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة

مجموعة الإمكانيات :

مجموعة الإمكانيات(المخارج) هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة العشوائية ونرمز لها بالرمز E أو Ω ويسمى كل عنصر منها بالإمكانية (مخرج)

الحادثة:

نسمي كل جزء A من E بالحادثة

لتكن A ، B حادثتين كيفيتين

الحادثة A و B هي الحادثة تشمل جميع العناصر المشتركة بين A و B ونرمز لها بالرمز $A \cap B$

الحادثة: A أو B هي الحادثة تشمل عناصر A أو عناصر B ونرمز لها بالرمز $A \cup B$

إذا كان $A \cap B = \phi$ نقول عن الحادثتين A ، B غير المتلائمتين

تعريف قانون الإحتمال

لتكن E مجموعة المخارج لتجربة عشوائية ذات n عنصرا أي $E=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

نعرف قانون احتمال على E بإرفاق كل حادثة اولية $\{x_i\}$ بعدد موجب p_i حيث $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$\{x_i\}$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	.....	$\{x_n\}$
p_i	p_1	p_2	.....	p_1

تعريف تساوي الإحتمال:

نقول عن تجربة عشوائية أنها متساوية الاحتمال اذا كان لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال نقول قانون الاحتمال متساوي التوزيع أي (من أجل كل i : $p(\{x_i\}) = p_i = \frac{1}{n}$)

نتيجة: في حالة تساوي احتمال فإنه من أجل كل حادثة A : $p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$

الأمل الرياضياتي ؛ التباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي

الأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال لمتغير عشوائي X هو: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

التباين لقاذ

تمـــــاريـــــن محلولـــــة

التمرين -1-

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة مرقمة من 1 إلى 10،نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس و نسجل رقمها .

1.عين Ω مجموعة الامكانيات .

2.احسب احتمال الحوادث: A " ظهور رقم زوجي " B " ظهور رقم مضاعف لـ 3 "

C " ظهور رقم أصغر تماما من 11 " D " ظهور رقم سالب " E " ظهور رقم أكبر تماما من 9 "

9.احسب احتمال الحادثة $\overline{A}$ بطريقتين .

10.احسب احتمال الحادثة $A\cap B$ ، ثم استنتج احتمال الحادثة $A\cup B$.

11.احسب احتمال الحادثة $B\cap E$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للحادثتين B و E ،استنتج احتمال الحادثة $B\cup E$.

التمرين -2-

يحتوي صندوق 6 كريات لا نميز بينها عند اللمس ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 2 و كرية تحمل الرقم3 ، نسحب كرية واحدة عشوائيا

1.عين E مجموعة المخارج.

2.عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة .

3.احسب احتمال الحادثة A : " الحصول على رقم فردي " .

التمرين -3-

1. A ، B حادثتان حيث $p(A)=0.3$ ، $p(A\cup B)=0.7$ ، $p(A\cap B)=0.2$ ، احسب $p(B)$.

2. A ، B حادثتان ، $p(A)=0.45$ ، $p(B)=0.37$ ، $p(A\bigcup B)=0.82$ ، احسب $p(A\bigcap B)$.

3. A ، B حادثتان غير متلائمتان ، $p(A)=0.55$ ، $p(B)=0.31$ ، احسب $p(A\bigcup B)$.

التمرين -4-

1.نرمي قطعة نقود متوازنة تحمل الوجهين p و F.

أ.عين E مجموعة المخارج.

ب. عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة .

2. نرمي القطعة مرتين .

أ.عين E مجموعة المخارج.

ب. عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة .

3.قطعة نقود مزيفة بحيث عند رميها يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الحرف A ضعف احتمال ظهور الوجه الآخر و الذي يحمل الحرف B .

أ.أحسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(A\cap B)$.

ب.نفرض أن ظهور الوجه A يعطى ربح 100 دج و ظهور الوجه B يعطي خسارة 50 دج ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم الربح أو الخسارة

-أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X -أحسب الأمل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير X

التمرين -5-

.ليكن قانون احتمال المتغير العشوائي X التالي :

X_i	1	2	3
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	2α

1.عين قيمة α .

2.احسب $p(X^2-1=0)$

التمرين -6-

كيس غير شفاف به 7 كريات متماثلة ، منها 3 سوداء و 4 حمراء . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس .

1. شكل جدول

و إذا سحب كرة حمراء يخسر $30(DA)$ و نعتبر X متغير عشوائي يمثل مقدار الربح أو الخسارة .

أ. عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، هل اللعبة في صالح اللاعب ؟

التمرين -7-

كيس غير شفاف به 5 كريات متماثلة ، منها 3 سوداء و 2 حمراء .

نسحب عشوائيا كرتين **في آن واحد** من الكيس .

1.أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة.

ب.احسب احتمال الحادثة A "سحب كرتين مختلفتين في اللون" .

ج.احسب احتمال الحادثة B : "سحب كرتين من نفس اللون ".

د.احسب احتمال الحادثة C : "الحصول على كرة سوداء على الأقل" .

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها .

أ.عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي .

ب. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

ج. أحسب التباين $Var(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين -8-

كيس غير شفاف به 5 كريات متماثلة ، منها 3 سوداء و 2 حمراء .

نسحب عشوائيا كرتين **على التوالي بإرجاع** من الكيس .

1.أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة.

ب.احسب احتمال الحادثة A "سحب كرتين حمراوين " .

ج.احسب احتمال الحادثة B : "الكرة المسحوبة الثانية فقط حمراء ".

د.احسب احتمال الحادثة C : الكرة المسحوبة الثانية حمراء " .

التمرين -9-

كيس غير شفاف به 7 كريات متماثلة ، منها 3 سوداء و 4 حمراء .

نسحب عشوائيا كرتين **على التوالي دون ارجاع** من الكيس .

1.أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة.

ب.احسب احتمال الحادثة A "" من بين الكرتين المسحوبتين ، واحدة فقط حمراء " .

2.نقترح اللعبة التالية : يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ حيث α عدد طبيعي معطى ويسحب كرتين ، إذا سحب كرتين سوداوين يتحصل على $100(DA)$ و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50(DA)$ و إذا سحب كرتين حمراوين يخسر ما دفعه. و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α

أ.برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ،ثم عرف قانون احتماله .

ب.أثبت أن الأمل الرياضياتي لـ X هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.ثم أوجد أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب .

التمرين -10-

كيس غير شفاف به 7 كريات متماثلة ، منها 3 سوداء تحمل الرقم 1 و أربع حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 .

نسحب عشوائيا من الكيس كرتين على التوالي دون ارجاع .

نرمز بـ N_1 للكرة السوداء المرقمة بـ 1 و بـ R_1 للكرة الحمراء المرقمة بالرقم 1 و بـ R_2 للحمراء المرقمة بالرقم 2 .

1.أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة .

2. نعتبر A "حادثة سحب كرتين حمراوين " و الحادثة B : "سحب كرتين تحمل كل منهما الرقم 1 ".

أحسب : $p(A)$ و $p(B)$ و $p(A\cap B)$ ثم استنتج $p(A\cup B)$.

X X

الحـلـــــــــــــول

حل التمرين -1-

1.عين Ω مجموعة الامكانيات . $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

2.احسب احتمال الحوادث:

A " ظهور رقم زوجي " : $A=\{2;4;6;8;10\}$ ، $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

B " ظهور رقم مضاعف لـ 3 " : $B=\{3;6;9\}$ ، $P(B)=\frac{3}{10}$.

C " ظهور رقم أصغر تماما من 11 " : $C=\Omega$ ، $P(C)=1$ ، C هي حادثة أكيدة .

D " ظهور رقم سالب " : $D=\varnothing$ ، $P(D)=0$ ، D هي حادثة مستحيلة .

E " ظهور رقم أكبر تماما من 9 " : $E=\{10\}$ ، $P(E)=\frac{1}{10}$ ، D هي حادثة أولية .

9.احسب احتمال الحادثة $\overline{A}$ بطريقتين .

طريقة 1 : $\overline{A}=\{1;3;5;7;9\}$ ، $P(\overline{A})=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ ، $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A .

طريقة 1 : $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

10.احسب احتمال الحادثة $A\cap B$ ،

$A\cap B=\{6\}$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

ثم استنتج احتمال الحادثة $A\cup B$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

11.احسب احتمال الحادثة $B\cap E$ ،

$B\cap E=\varnothing$ ، $P(B\cap E)=0$

ماذا تستنتج بالنسبة للحادثتين B و E : غير متلائمان .

استنتج احتمال الحادثة $B\cup E$. $P(B\cup E)=P(B)+P(E)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$

حل التمرين -2-

1.عين E مجموعة المخارج. $E=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

2.عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة . معرف بالشكل:

$\{x_i\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
p_i	**1/2**	**1/3**	**1/6**

3.احسب احتمال الحادثة A : " الحصول على رقم فردي " $A=\{1\,,\,3\}$ ، $p(A)=p\{1\}+p\{3\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

حل التمرين -3-

1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ و منه $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0.7-0.3+0.2=0.6$

2. $P(A\cap B)$

$P(A\cap B)$

حل التمرين -4-

1.أ.عين E **مجموعة المخارج.** $E=\{P;F\}$

ب. عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة .

معرف بالشكل:

$\{x_i\}$	$\{P\}$	$\{F\}$
p_i	**1/2**	**1/2**

2. أ.عين E **مجموعة المخارج.** $E=\{PP;PF;FP;FF\}$

ب. عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة.

معرف بالشكل:

$\{x_i\}$	$\{PP\}$	$\{PF\}$	$\{FP\}$	$\{FF\}$
p_i	**1/4**	**1/4**	**1/4**	**1/4**

3. أ.أحسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(A\cap B)$

$P(A)=2P(B)$ و $P(A)+P(B)=1$

$P(A)=2P(B)$ و منه $3P(B)=1$ و منه: $P(B)=\frac{1}{3}$

$P(A)+P(B)=1$ و $P(A)=\frac{2}{3}$ ، $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{1}{3}$ ، $P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ معناه $1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-P(A\cap B)$ ومنه:

ب.قانون احتمال للمتغير العشوائي :

X	100	-50
$P(X)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X)=100\times\frac{2}{3}+(-50\times\frac{1}{3})=50$

$V(X)=\frac{2}{3}(100-50)^2+\frac{1}{3}(-50-50)^2=5000$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=70.7$

حل التمرين -5-

1.عين قيمة α **.**

$\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+2\alpha=1$ و منه $1+\alpha+4\alpha=2$ و منه $5\alpha=1$ و منه $\alpha=\frac{1}{5}$

X_i	1	2	3
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$

2.احسب $p(X^2-1=0)$

$X^2-1=0$ معناه $X=1$ أو $X=-1$ مرفوض . اذن : $p(X^2-1=0)=p(X=1)=\frac{1}{2}$

حل التمرين -6-

1. حدد Ω **مجموعة الامكانيات .** $\Omega=\{N;R\}$

2.احسب احتمال الحادثة A **"سحب كرة حمراء " .** $p(A)=\frac{4}{7}$

3.أ. عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

	50	-30

ب. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، هل اللعبة في صالح اللاعب ؟

$E(X)=50\times\frac{3}{7}+(-30\times\frac{4}{7})=\frac{30}{7}$ ، اللعبة في صالح اللاعب لأن $E(X)\succ 0$

حل التمرين -7-

1.أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة.

	N	N	N	R	R
N		NN	NN	NR	NR
N			NN	NR	NR
N				NR	NR
R					RR
R					

ب.احسب احتمال الحادثة A "سحب كرتين مختلفتين في اللون" .

$A=\{NR\}$ ، $p(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

ج.احسب احتمال الحادثة B : "سحب كرتين من نفس اللون ".

$B=\{NN;RR\}$ ، $p(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

د.احسب احتمال الحادثة C : "الحصول على كرة سوداء على الأقل" .

$C=\{NR;NN\}$ ، $p(A)=\frac{9}{10}$

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها .

	N	N	N	R	R
N		0	0	1	1
N			0	1	1
N				1	1
R					2
R					

أ.عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي .

X_i	0	1	2
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

ب. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

ج. أحسب التباين $Var(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X

$V(X)=\left(0-\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{3}{10}+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{6}{10}+\left(2-\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{10}=\frac{53}{250}$ $\quad\sigma(X)=\sqrt{\frac{53}{250}}$

حل التمرين -8-

أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة.

1 \ 2	N	N	N	R	R
N	NN	NN	NN	NR	NR
N	NN	NN	NN	NR	NR
N	NN	NN	NN	NR	NR
				RR	RR

ب.احسب احتمال الحادثة A "سحب كرتين حمراوين " .

$A=\{RR\}$ ، $p(A)=\frac{4}{25}$

ج.احسب احتمال الحادثة B : "الكرة المسحوبة الثانية فقط حمراء ".

$B=\{NR\}$ ، $p(B)=\frac{6}{25}$

د.احسب احتمال الحادثة C : الكرة المسحوبة الثانية حمراء " .

$C=\{NR;RR\}$ ، $p(C)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$

حل التمرين -9-

كيس غير شفاف به 7 كريات متماثلة ، منها 3 سوداء و 4 حمراء .

نسحب عشوائيا كرتين **على التوالي دون ارجاع** من الكيس .

1.أ. شكل جدول الامكانيات الموافق لهذه التجربة ثم حدد عدد الامكانيات .

	R	R	R	R	N	N	N
R		R R	R R	R R	R N	R N	R N
R	R R		R R	R R	R N	R N	R N
R	R R	R R		R R	R N	R N	R N
R	R R	R R	R R		R N	R N	R N
N	N R	N R	N R	N R		N N	N N
N	N R	N R	N R	N R	N N		N N
N	N R	N R	N R	N R	N N	N N	

ب.احسب احتمال الحادثة A "" من بين الكرتين المسحوبتين ، واحدة فقط حمراء " .

$A=\{NR;RN\}$ ، $p(A)=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$

أ.برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{100-\alpha,50-\alpha,-\alpha\}$ ،ثم عرف قانون احتماله .

سحب كرتين سوداوين يحصل على $100DA$ ودفع في بداية اللعبة aDA ومنه $X=100-\alpha$

سحب كرتين مختلفتين يحصل $50DA$ ودفع في بداية اللعبة aDA ومنه $X=50-\alpha$

سحب كرتين حمراوين يخسر ما دفعه أي $X=-\alpha$

قانون احتمال X :

X_i	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
P_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

ب.أثبت أن الأمل الرياضياتي لـ X هو : $E(X)=-\alpha+\frac{300}{7}$.

$$E(X)=(100-\alpha)\left(\frac{1}{7}\right)+(50-\alpha)\left(\frac{4}{7}\right)+(-\alpha)\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{100-\alpha+200-4\alpha-2\alpha}{7}=\frac{300-7\alpha}{7}=-\alpha+\frac{300}{7}$$

ثم أوجد أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب .

اللعبة في صالح اللاعب إذا كان: $E(X)\succ 0$ تعني $-\alpha+\frac{300}{7}\succ 0$ ومنه $\alpha\prec\frac{300}{7}$ ومنه $\alpha\prec 42,85$.

ومنه أكبر قيمة α $\alpha=42$

	R1	R1	R2	R2	N1	N1	N1
R1		R1 R1	R1 R2	R1 R2	R1 N1	R1 N1	R1 N1
R1	R1 R1		R1 R2	R1 R2	R1 N1	R1 N1	R1 N1
R2	R2 R1	R2 R1		R2 R2	R2 N1	R2 N1	R2 N1
R2	R2 R1	R2 R1	R2 R2		R2 N1	R2 N1	R2 N1
N1	N1 R1	N1 R1	N1 R2	N1 R2		N1 N1	N1 N1
N1	N1 R1	N1 R1	N1 R2	N1 R2	N1 N1		N1 N1
N1	N1 R1	N1 R1	N1 R 2	N 1R1	N1 N1	N1 N1	

2. نعتبر A "حادثة سحب كرتين حمراوين " و الحادثة B : "سحب كرتين تحمل كل منهما الرقم 1 ".

أحسب : $p(A)$:

$$A=\{R1R1;R1R2;R2R2;R2R1\} \quad ، \quad p(A)=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

أحسب $p(B)$:

$$B=\{R1R1;R1N1;N1R1;N1N1\} \quad ، \quad p(B)=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$$

أحسب $p(A\cap B)$:

$$A\cap B=\{R1R1\} \quad ، \quad p(A\cap B)=\frac{2}{42}=\frac{1}{22}$$

ثم استنتج $p(A\cup B)$.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{2}{7}+\frac{10}{21}-\frac{1}{22}=\frac{331}{462}$$

3.نسمي X **المتغير العشوائي المساوي لمجموع الرقمين الظاهرين .**

	R1	R1	R2	R2	N1	N1	N1
R1		2	3	3	2	2	2
R1	2		3	3	2	2	2
R2	3	3		4	3	3	3
R2	3	3	4		3	3	3
N1	2	2	3	3		2	2
N1	2	2	3	3	2		2
N1	2	2	3	3	2	2	

أ. قانون احتمال المتغير العشوائي X

X_i	2	3	4
P_i	$\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$	$\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$	$\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$

وفقكـــــــــــم الله