ملخص لكثيرات الحدود

مع مجموعة من التمرينات

الدوال كثيرات الحدود : نسمي دالة كثيرة حدود كل دالة p معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي يسمى درجة كثيرة الحدود و a_0 ، a_1 ، ..... ، a_n هي أعداد حقيقية ثابتة تسمى بالمعاملات .

عمليات على كثيرات الحدود :

مجموع و فرق و جداء كثيرات الحدود هو كثيرات حدود .

جداء كثيري حدود غيرمعدومين درجتاهما n و m على الترتيب هو كثير حدود درجته $n+m$.

يكونا كثيري حدود متساويان إذا وفقط إذا كان من نفس الدرجة و كانت المعاملات من نفس الدرجة متساوية .

تحليل كثير حدود :

- ✓ العدد α الذي يحقق $p(\alpha) = 0$ يسمى جذراً لكثير الحدود p .
- ✓ إذا كان α هو جذر لكثير الحدود أي يحقق : $p(\alpha) = 0$ فإنه يوجد كثير حدود Q وحيد بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x) = (x-\alpha).Q(x)$.

المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف : نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x كل معادلة من الشكل : $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة و $a \neq 0$.

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى المميز .

طريقة حل معادلة من الدرجة الثانية :

نحسب المميز Δ نتحصل على ثلاثة حالات :

1) إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين هما :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ، \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

و إشارته تكون من الشكل :

حيث : $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	مخالف لإشارة a	موافق لإشارة a	

✓ و تحليل عبارتها يكون من الشكل $a(x-x_1)(x-x_2)$.

) إذ كان

إشارته تكون من الشكل :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a		موافق لإشارة a

✓ و تحليل عبارتها يكون من الشكل $a(x-x_1)^2$.

3) إذ كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ ليست لها حلول ، ولا يوجد لها تحليل .

إشارته تكون من الشكل :

x	$-\infty$	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	

التمرين الأول

نعتبر كثير الحدود p المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x)=x^3-3x^2+4x-2$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1) العدد (-1) هو جذرا لـ $p(x)$. 2) $p(3)=0$.

3) $p(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$ 4) p له ثلاثة جذور .

التمرين الثاني

1) عيّن كثير حدود h من الدّرجة الثانية مُعرّف على $\mathbb{R}$ ويُحقّق: $h(x+1)-h(x)=x$.

2) ليكن f و g كثيرا حدود معرّفين على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=x^2+2x-3$ و $f(x)=(h\circ g)(x)$.

أ) أحسب $f(x)$ بدلالة x.

ب) أثبت أنّ العددين -3 و 1 جذران لـ f.

ج) حلّل f إلى جداء كثيري حدود من الدّرجة الثانية.

د) عيّن حلول المعادلة $f(x)=0$.

التمرين الثالث

نعتبر كثير الحدود P المعرّف على $\mathbb{R}$ بـ: $P(x)=x^3-5x^2+3x+1$ ، نفرض أنّ P يقبل ثلاث جذور حقيقيّة نرمز لها بـ α ، β و γ حيث α و γ مترافقان و α هو الجذر السّالب.

1) أثبت أنّ $\alpha+\beta+\gamma=5$ ، $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3$ و $\alpha\beta\gamma=1$.

2) أحسب $P(1)$ ، ماذا تستنتج؟

3) أكتب P على الشكل $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقيّة يُطلب تعيينها.

4) عيّن كل جذور كثير الحدود P.

التمرين الرابع

نعتبر كثير الحدود من الدرجة الثانية : $p(x)=ax^2+bx+c$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c و التي تحقق الشرطين :

✓ $p(x)$ ينعدم من أجل القيمتين 1 ، 2 .

✓ $p(-1)=-18$

التمرين الخامس

نعتبر كثير الحدود p المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x)=x^3+4x^2+x-6$

) أحسب p

$p(x)$

3) عين كل جذور كثير الحدود p .

التمرين السادس

بيّن أن العدد α هو جذر لكثير الحدود ثم استنتج تحليله في كل حالة من الحالات الاتية :

1) $p(x)=x^3+5x^2+5x-2$ ، $\alpha=-2$.

2) $p(x)=x^3-3x^2+3x-9$ ، $\alpha=3$.

3) $p(x)=x^3-2x^2-3x$ ، $\alpha=-1$.

التمرين السابع

a ، b عددان حقيقيان و $p(x)$ كثير الحدود حيث : $p(x)=-x^3+ax^2+bx+2$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث $p(2)=0$ و $p(1)=5$

2) استنتج تحليل بـ $p(x)$.

3) عيّن كل جذور $p(x)$.

التمرين الثامن

نعتبر كثير الحدود p المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $p(x)=2x^3-3x^2+5x-4$

1) أحسب $p(1)$ ماذا تستنتج ؟

2) عين تحليل للعبارة p .

3) أدرس حسب قيم المتغير x إشارة $p(x)$.

التمرين التاسع

في كل حالة مما يلي أدرس إشارة $p(x)$ ثم استنتج حل المتراجحات :

1) $p(x)=-5x^2+3x+2$ ، $p(x)>0$.

2) $p(x)=4x^2-16x+16$ ، $p(x)\geq 0$.

3) $p(x)=3x^2-2x+4$ ، $p(x)<$

4) $p(x)=(x^2-4)(x^2-1)$ ، $p(x)\leq 0$.

5) $p(x)=(x^2-x)(x^2+1)(x-1)$ ، $p(x)<0$.

6) $p(x)=(x^2-1)^2(x-5x+6)$ ، $p(x)\geq 0$.

التمرين العاشر

في الشكل المقابل مستطيل مساحته ثمان (8) مرّات مساحة المربّع. عيّن طول ضلع المربّع.

