Maths

# 2AS

رياضيات

# ملخصات
# الأستاذ مصطفى

## للسنة الثانية ثانوي





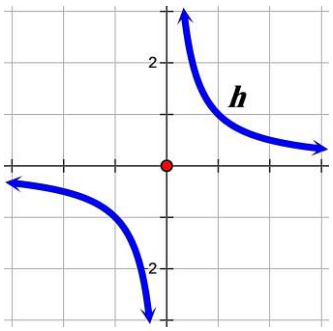
# الفهرس


| الرقم | الدرس | الصفحة |
|---|---|---|
| ❶ | مجموعة التعريف | 1 |
| ❷ | الدوال المرجعية | 3 |
| ❸ | الدوال العددية | 4 |
| ❹ | الدوال كثيرات الحدود | 6 |
| ❺ | الاشتقاقية | 8 |
| ❻ | تطبيقات الاشتقاقية | 9 |
| ❼ | النهايات | 10 |
| ❽ | مخطط دراسة دالة | 13 |
| ❾ | المرجح في المستوي | 14 |
| ❿ | الزوايا الموجهة | 16 |
| ⓫ | الاحتمالات | 19 |
| ⓬ | التحاكي | 21 |
| ⓭ | الجداء السلمي | 22 |
| ⓮ | المتتاليات العددية | 24 |
| ⓯ | الهندسة الفضائية | 27 |
| ⓰ | الاحصاء | 29 |

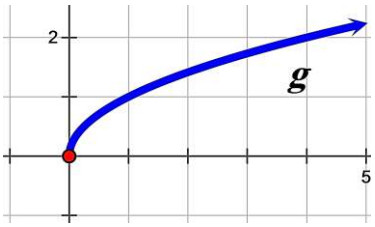
# مجموعة التعريف $D$

Prof Mustapha
KHALDI

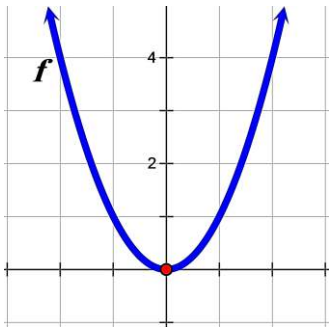
## ❖ بيانيا:



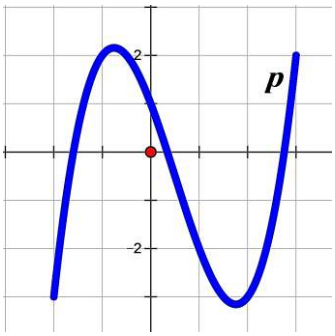

$D_h = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$



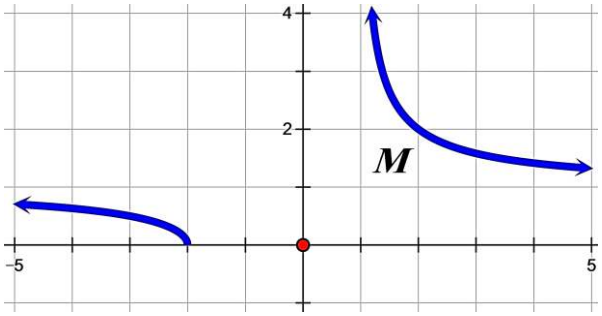

$D_g = [0; +\infty[$



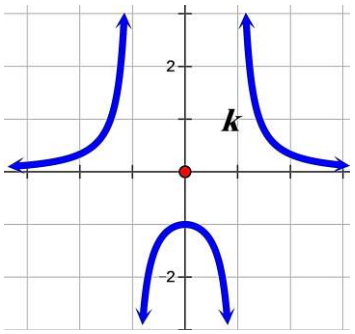

$D_f = ]-\infty; +\infty[$




$D_p = [-2; 3]$




$D_M = ]-\infty; -2] \cup ]1; +\infty[$




$D_k = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$

## ❖ حسابيا:

لا جذر ولا كسر مثل: $f(x) = 6x^2 - 15x + 8$

نكتب: $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

**1) كسر** مثل $f(x) = \frac{x^2+7}{x-2}$ نكتب:

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ أي $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

**2) جذر** مثل $f(x) = \sqrt{x-3}$ نكتب:

$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$D_f = [3; +\infty[$

**3) كسر و جذر**

مثال1: $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+5}}$ نكتب:

$x + 5 > 0$

$x > -5$

$D_f = ]-5; +\infty[$

مثال2: نكتب:

$x$ و

$D_f$

**إذن القاعدة:**

❶ **لا كسر و لا جذر:** $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$

❷ **في الكسر نكتب:** $\neq 0$ المقام

❸ **في الجذر نكتب:** $\geq 0$ ما داخل الجذر

❹ **في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر:** $D_f$ **هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال**

## ❖ الملخص:

| الدالة | مجموعة التعريف |
|---|---|
| كثير الحدود $= f(x)$ | $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$ |
| $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ | $D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \neq 0\}$ |
| $f(x) = \sqrt{g(x)}$ | $D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$ |
| $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$ | $D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) > 0\}$ |
| $f(x) = \sqrt{g(x)} + \frac{h(x)}{k(x)}$ | $D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0 \wedge k(x) \neq 0\}$ |
| $f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$ | $D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0 \wedge h(x) > 0\}$ |
| $f(x) = \sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$ | $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{g(x)}{h(x)} \geq 0 \wedge h(x) \neq 0\right\}$ |

**حيث $g(x)$، $h(x)$ و $k(x)$ كلها دوال كثيرات حدود**

## ❖ العمليات على الدوال ومجموعة التعريف:

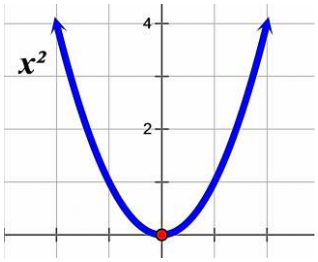
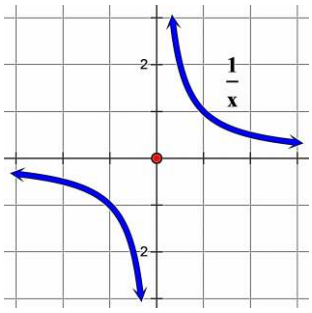
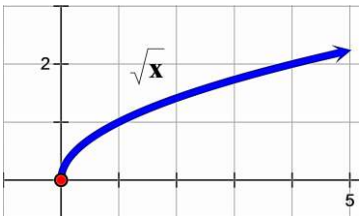
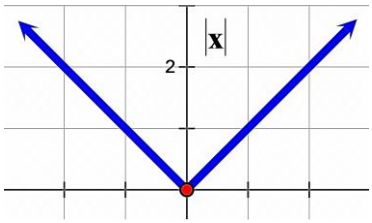
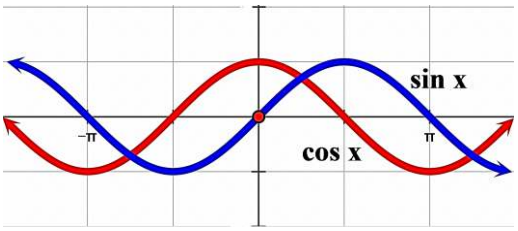
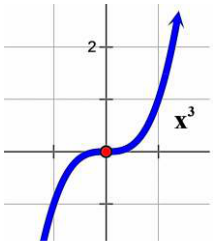
**$f$ و $g$ دالتان معرفتان على $D_f$ و $D_g$ على الترتيب. $\lambda$ و $k$ عددان حقيقيان.**

| العملية | مجموعة التعريف |
|---|---|
| $f + k$ | $D_f$ |
| $\lambda f$ | $D_f$ |
| $f + g$ | $D_f \cap D_g$ |
| $f \times g$ | $D_f \cap D_g$ |
| $\frac{f}{\ }$ | |
| | |

Prof Mustapha
KdHA-LDG

Prof. Mustapha KHALDI

# الدوال المرجعية

| الدالة المرجعية | الشكل المرجعي | التمثيل البياني للدالة المرجعية |
|---|---|---|
| **مربع**<br>$f(x) = x^2$<br>(زوجية) | $f(x) = \lambda(x+b)^2 + k$<br>لرسم الدالة المرجعية:<br>1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^2$<br>2) نرسم المنحنى الجديد $C_f$ إما:<br>• بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$<br>• أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$ |  |
| **مقلوب**<br>$f(x) = \frac{1}{x}$<br>(فردية) | $f(x) = \frac{\lambda}{x+b} + k$<br>لرسم الدالة المرجعية:<br>1) نرسم المنحنى $y = \frac{\lambda}{x}$<br>2) نرسم المنحنى الجديد $C_f$ إما:<br>• بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$<br>• أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$ |  |
| **جذر تربيعي**<br>$f(x) = \sqrt{x}$<br>(لا زوجية لا فردية) | $f(x) = \lambda\sqrt{x+b} + k$<br>لرسم الدالة المرجعية:<br>1) نرسم المنحنى $y = \lambda\sqrt{x}$<br>2) نرسم المنحنى الجديد $C_f$ إما:<br>• بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$<br>• أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$ |  |
| **قيمة مطلقة**<br>$f(x) = \lvert x \rvert$<br>(زوجية) | $f(x) = \lambda\lvert x+b \rvert + k$<br>لرسم الدالة المرجعية:<br>1) نرسم المنحنى $y = \lambda\lvert x \rvert$<br>2) نرسم المنحنى الجديد $C_f$ إما:<br>• بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$<br>• أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$ |  |
| **الدالتان**<br>$\sin x$<br>(فردية)<br>و<br>$\cos x$<br>(زوجية) | $f(x) = \lambda \sin(x+b) + k$<br>$g(x) = \lambda \cos(x+b) + k$<br>لرسم الدالة المرجعية:<br>1) نرسم المنحنى $y = \lambda \sin x$<br>أو $y = \lambda \cos x$<br>2) نرسم المنحنى الجديد $C$ إما:<br>• بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$<br>• أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$ |  |
| **مكعب**<br>$x^3$<br>(فردية) | $f(x) = \lambda(x+b)^3 + k$<br>لرسم الدالة المرجعية:<br>1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^3$<br>2) نرسم المنحنى الجديد إما: |  |

# الدوال العددية

Prof Mustapha
KHALDI

## I]. العمليات على الدوال

1) تساوي دالتين: $f$ و $g$ متساويتين $\Leftarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

2) العمليات الجبرية: $f$ و $g$ دوال عددية $k$ و $\lambda$ أعداد حقيقية

| العملية | التعريف |
|---|---|
| $f + k$ | $(f + k)(x) = f(x) + k$ |
| $f + g$ | $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ |
| $\lambda f$ | $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ |
| $f \times g$ | $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ |

3) تركيب الدوال: $(fog)(x) = f[g(x)]$

## II]. اتجاه التغير

1) مراجعة

| | إذا كان | فإن |
|---|---|---|
| ❶ | $x_1 < x_2$ و $f(x_1) < f(x_2)$ | $f$ متزايدة |
| ❷ | $x_1 < x_2$ و $f(x_1) > f(x_2)$ | $f$ متناقصة |
| ❸ | $f(x_1) = f(x_2)$ | $f$ ثابتة |

✱ملاحظة❶: $f$ رتيبة على مجال معناه $f$ متناقصة أو متزايدة على هذا المجال

✱ملاحظة❷: (الفرق بين متزايدة ومتزايدة تماما، متناقصة ومتناقصة تماما)

| $f$ متزايدة تماما | $f$ متزايدة |
|---|---|
| معناه $f$ متزايدة دون أن تكون ثابتة | معناه $f$ متزايدة ثم ثابتة أو ثابتة ثم متزايدة أو متزايدة ثم ثابتة ثم متزايدة...الخ |

- نفس الأمر بالنسبة لمتناقصة و متناقصة تماما

✱ملاحظة مهمة❸: (الخطأ الشائع)

$f$ متزايدة ليس معناه $f$ موجبة و $f$ متناقصة ليس معناه $f$ سالبة و لا علاقة أبدا بين تغيرات الدالة و إشارتها

2) العمليات على الدوال واتجاه التغير

| الدالة | اتجاه التغير |
|---|---|
| $f + k$ | $f$ و $f + k$ لهما نفس اتجاه التغير |
| $\lambda f$ | إذا كان $\lambda > 0$ فإن $f$ و $\lambda f$ لهما نفس اتجاه التغير |
| | إذا كان $\lambda < 0$ فإن $f$ و $\lambda f$ متعاكسين في اتجاه التغير |
| $fog$ | إذا كان $f$ و $g$ لهما نفس اتجاه التغير فإن $fog$ متزايدة تماما على $I$ |
| | إذا كان $f$ و $g$ متعاكسين في اتجاه التغير فإن $fog$ متناقصة تماما على $I$ |
| | لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين |
| | لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين |

$v$

## III]. التمثيل البياني

| إذا كان | فإن |
|---|---|
| $g(x)=f(x)+k$ | $C_g$ هو صورة $C_f$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{0}{k}$ |
| $g(x)=f(x+b)$ | $C_g$ هو صورة $C_f$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{0}$ |
| $g(x)=f(x+b)+k$ | $C_g$ هو صورة $C_f$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{k}$ |
| $g(x)=\lambda f(x)$ | نرسم $C_g$ بالاحتفاظ بفواصل $C_f$ و ضرب ترتيب $C_f$ في $\lambda$ |
| $g(x)=\lambda f(x+b)+k$ | $C_g$ هو صورة $C_{\lambda f}$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{k}$ |
| $g(x)=-f(x)$ | $C_g$ هو نظير $C_f$ بالنسبة لمحور الفواصل |
| $g(x)=f(-x)$ | $C_g$ هو نظير $C_f$ بالنسبة لمحور التراتيب |
| $g(x)=-f(-x)$ | $C_g$ هو نظير $C_f$ بالنسبة للمبدأ |
| $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ | $C_g$ منطبق على $C_f$ لما $f(x)\geq 0$ و $C_g$ نظير $C_f$ بالنسبة لمحور الفواصل لما $f(x)\leq 0$<br>✱ بتعبير اخر: $C_g$ منطبق على $C_f$ لما $C_f$ فوق محور الفواصل و $C_g$ نظير $C_f$ بالنسبة لمحور الفواصل لما $C_f$ تحت محور الفواصل |
| $g(x)=f(\lvert x\rvert)$ | $C_g$ منطبق على $C_f$ لما $x\geq 0$ و $C_g$ نظير $C_f$ بالنسبة لمحور التراتيب لما $x\leq 0$ |

## IV]. دساتير تغيير معلم

العلاقة بين إحداثيات نقطة $M(x,y)$ في معلم قديم $(O;\vec{i},\vec{j})$ و احداثياها $M(X,Y)$ في معلم جديد $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$
حيث $(x_0,y_0)$ هي احداثيات $\Omega$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي:

$$\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$$

Prof Mustapha
KdHA-LDI

### مركز التناظر

✓ طريقة 1:

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow$ $f(2a-x)+f(x)=2b$

✓ طريقة 2:

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow$ $f(a+x)+f(a-x)=2b$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow$ $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$Y=f(a+X)-b$

2) إثبات أن $Y$ دالة فردية.

### محور التناظر

✓ طريقة 1:

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow$ $f(2a-x)=f(x)$

✓ طريقة 2:

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow$ $f(a-x)=f(a+x)$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow$ $\begin{cases} x=a+X \\ y=Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$Y=f(a+X)$

2) إثبات أن $Y$ دالة زوجية.

# الدوال كثيرات الحدود

## I]. تعريف كثير الحدود: عبارة الدالة كثير الحدود تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث:
$n$ درجة كثير الحدود
$a_0$، $a_1$،...، $a_n$ معاملاته
$a_p x^p$ الحد الذي درجته $p$

**أمثلة:**
الدالة الثابتة $f(x) = a$ هي دالة كثير حدود درجته 0
الدالة الخطية $f(x) = ax$ و التآلفية $g(x) = ax + b$ هي دوال كثيرات حدود من الدرجة 1

✱**ملاحظة:** كل الدوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

## II]. عمليات على كثير الحدود

### 1) قواعد الحساب الجبري:

- مجموع، فرق وجداء كثيرات الحدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود درجتهما $n$ و $p$ هو كثير حدود درجته $n + p$

### 2) جذر كثير حدود: (جذر مرادف كلمة حل)

$\alpha$ جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(\alpha) = 0$

### 3) تحليل كثير حدود:

إذا كان $\alpha$ جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ بحيث $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

### 4) طرق تحليل كثير حدود: هناك ثلاث طرق لتحليل كثير حدود من الدرجة $n$

✱ مثال: تحليل كثير حدود $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ جذره 2

✓ **طريقة 1:** (المطابقة)

$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$
بالنشر:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$
$f(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$
بالمطابقة مع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b=-13 \\ -2c=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2=-6 \\ c-2b=-13 \\ c=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-21 \end{cases}$$

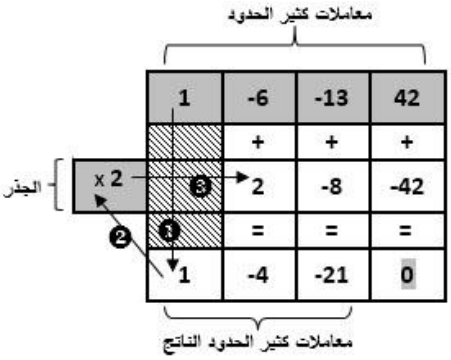
ومنه $f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

✪ **طريقة 2:** (القسمة الإقليدية)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 - 13x + 42 & x - 2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 - 4x - 21 \\ \hline -4x^2 - 13x + 42 & \\ -(-4x^2 + 8x) & \\ \hline -21x + 42 & \\ -(-21x + 42) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

✪ **طريقة 3:** (هورنر Horner)




$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x - 21)$

## III]. المعادلات من الدرجة الثانية (مراجعة)

### 1) الشكل النموذجي:

Prof Mustapha
KdH

2) ملخص حل واشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

| $\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$ | | | |
|---|---|---|---|
| إذا كان | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
| فإن المعادلة | لا تقبل حلول | تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$ | تقبل حلين متمايزين $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| إشارتها | $x$ \| $-\infty$ ... $+\infty$ <br> $E$ \| إشارة $a$ | $x$ \| $-\infty$ ... $\frac{-b}{2a}$ ... $+\infty$ <br> $E$ \| إشارة $a$ \| $0$ \| إشارة $a$ | $x$ \| $-\infty$ ... $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ... $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ... $+\infty$ <br> $E$ \| إشارة $a$ \| $0$ \| عكس إشارة $a$ \| $0$ \| إشارة $a$ |
| تحليلها | لا تقبل تحليلا | $a(x - x_0)^2$ | $a(x - x_1)(x - x_2)$ |

## IV]. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

Prof Mustapha
KHALDI

إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta \geq 0$ فإن:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز $S$ و للجداء بالرمز $P$

$$S = \frac{-b}{a} \quad ; \quad P = \frac{c}{a}$$

✱ نتائج:

❶ حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين فيمكن حساب الحل الآخر باستعمال المجموع: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ أو الجداء: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

❷ حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما باستعمال العلاقة: $x^2 - Sx + P = 0$

❸ تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية $(ax^2 + bx + c = 0)$

| إذا كان | | فإن |
|---|---|---|
| $\frac{c}{a} < 0$ | | المعادلة تقبل حلين من إشارتين مختلفتين |
| $\frac{c}{a} > 0$ | و $-\frac{b}{a} > 0$ | المعادلة تقبل حلين موجبين |
| | و $-\frac{b}{a} < 0$ | المعادلة تقبل حلين سالبين |

## V]. المعادلات مضاعفة التربيع $(ax^4 + bx^2 + c = 0)$:

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4 + bx^2 + c = 0$ إلى حل الجملة: $X = x^2$ ; $aX^2 + bX + c = 0$

# الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

## I]. تعاريف

### 1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة $f$ عند 0 هي $l$ (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$

### 2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

$f$ قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0$ معناه: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ أو $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ حيث $(h = x - x_0)$

$f$ غير قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0$ معناه: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$

✱ العدد المشتق: يسمى $l$ العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ و نرمز له $f'(x_0)$ أي $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

✱ نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة $f$ بين $x_0$ و $x_0 + h$ و نرمز له ب $g(h)$

✱قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

### 3) الدالة المشتقة لدالة $f$

- $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ معناه $f$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من $D_f$
- مشتقة الدالة $f$ هي الدالة التي ترفق بكل $x$ من $D_f$ العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها $f'$ حيث $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

## II]. التفسير الهندسي للعدد المشتق

### 1) معادلة المماس عند نقطة:

مماس المنحني $C_f$ عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل $A$

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

### 2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل $a, n$ باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a + h$ حيث $a$ الجزء الصحيح و $h$ الجزء العشري ($h$ قيمة قريبة من 0) $f(a + h) = f'(a)h + f(a)$

✱ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند $a$ فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

## III]. مشتقات الدوال المألوفة

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $ax + b$ | $a$ |
| $b$ | $0$ |
| $ax$ | $a$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $ax^n$ | $n \times ax^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $-$ | $-$ |

## VI]. عمليات على الدوال المشتقة

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $(u + v)$ | $u' + v'$ |
| $(u \times v)$ | $u'.v + v'.u$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u^n$ | $nu' \times u^{n-1}$ |
| $\lambda u$ | $\lambda u'$ |
| $\frac{1}{\quad}$ | $\frac{v'}{\quad}$ |
| ( | |
| $u($ | |

# تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

## 1 تحديد اتجاه تغير دالة

| المشتقة $f'$ | تغيرات $f$ |
|---|---|
| $f'$ موجبة تماما على $I$ | $f$ متزايدة تماما على $I$ |
| $f'$ سالبة تماما على $I$ | $f$ متناقصة تماما على $I$ |
| $f'$ معدومة على $I$ | $f$ ثابتة على $I$ |

## 2 معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة $f'$ عند قيمة $c$ من $I$ مغيرة إشارتها فإن $f$ تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت $f'$ موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن $f$ تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة $f'$ عند قيمة $c$ من $I$ فإن $f$ تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

## 3 نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى $f'$ عند قيمة $c$ من $I$ و لا تغير إشارتها فإن $f$ تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''$ عند قيمة $c$ من $I$ مغيرة إشارتها فإن $f$ تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

## 4 حصر دالة

- $f$ متزايدة تماما على $[a,b] \Leftarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$
- $f$ متناقصة تماما على $[a,b] \Leftarrow f(b) \le f(x) \le f(a)$

## 5 الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $k \ge f(x) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و يسمى $k$ عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
- $k \le f(x) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و يسمى $k$ عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)

*ملاحظة:

$f$ تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant

$f$ تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

## 6 نظرية القيم المتوسطة

$f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ على المجال $[a,b] \Leftarrow$ $\left.\begin{matrix} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a,b] \\ f(a)\times f(b)<0 \end{matrix}\right\}$

## 7 المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- بيانيا
  - $C_f$ فوق $C_g \Leftarrow f(x) > g(x)$
  - $C_f$ تحت $C_g \Leftarrow f(x) < g(x)$
  - $C_f$ تقطع $C_g \Leftarrow f(x) = g(x)$
- حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

| $x$ | $a$ / $b$ | $x_0$ / $0$ |
|---|---|---|
| إشارة | | |

Prof Mustapha
KHALDI

# النهايات ①
## (السلوك التقاربي لمنحن)

### مفاهيم

❶ بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

❷ إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ حيث $a \in D_f$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

❸ إذا قبلت دالة $f$ نهاية عند عدد $a$ تكون هذه النهاية وحيدة

❹ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثل $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

## I]. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن ل $f$ نهاية منتهية $l$ عند $a$ معناه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = l$

## II]. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت $f$ دالة من الشكل $f(x) = \dfrac{d}{g(x)}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، $d$ و $a$ عددان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

| إذا كانت إشارة $g(x)$ | وإشارة $d$ | فإن |
|---|---|---|
| $-\infty \quad < a > \quad +\infty$<br>$- \quad 0 \quad +$ | $d > 0$ | $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = -\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty$ |
| | $d < 0$ | $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = +\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = -\infty$ |
| $-\infty \quad < a > \quad +\infty$<br>$+ \quad 0 \quad -$ | $d > 0$ | $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = +\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = -\infty$ |
| | $d < 0$ | $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = -\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty$ |

*ملاحظة:

| إذا كانت | وإشارة $d$ | فإن |
|---|---|---|
| $f(x) = \dfrac{d}{[g(x)]^2}$ أو $f(x) = \dfrac{d}{\lvert g(x) \rvert}$ | $d > 0$ | $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = +\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty$ |
| | $d < 0$ | $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = -\infty$ |
| | | $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = -\infty$ |

## III]. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت $f$ دالة من الشكل $f(x) = \dfrac{d}{x}$ حيث $d$ عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{d}{x} = 0$

و منه نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{d}{x} + b = b$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{d}{x} + b = b$

# V]. المبرهنات الأولية على النهايات

| ① نهاية مجموع دالتين | | |
|---|---|---|
| فإن: $\lim[f(x)+g(x)]$ = | و $\lim g(x)$ = | إذا كانت $\lim f(x)$ = |
| $l+l'$ | $l'$ | $l$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $l$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $l$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| ح ع ت | $-\infty$ | $+\infty$ |
| ح ع ت | $+\infty$ | $-\infty$ |

| ② نهاية جداء دالتين | | |
|---|---|---|
| فإن: $\lim[f(x)\times g(x)]$ = | و $\lim g(x)$ = | إذا كانت $\lim f(x)$ = |
| $l\times l'$ | $l'$ | $l$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $l>0$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $l<0$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $l>0$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $l<0$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| ح ع ت | $+\infty$ | $0$ |
| ح ع ت | $-\infty$ | $0$ |
| $0^-$ | $0^+$ | $l<0$ |
| $0^+$ | $0^-$ | $l<0$ |

| ③ نهاية حاصل قسمة دالتين | | |
|---|---|---|
| فإن: $\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ = | و $\lim g(x)$ = | إذا كانت $\lim f(x)$ = |
| $\frac{l}{l'}$ | $l'$ | $l$ |
| $0$ | $+\infty$ | $l$ |
| $0$ | $-\infty$ | $l$ |
| $+\infty$ | $l>0$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $l<0$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $l>0$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $l<0$ | $-\infty$ |
| ح ع ت | $+\infty$ | $+\infty$ |
| ح ع ت | $-\infty$ | $+\infty$ |
| ح ع ت | $+\infty$ | $-\infty$ |
| ح ع ت | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $0$ | $+\infty$ | $0$ |
| $0$ | $-\infty$ | $0$ |
| ح ع ت | $0$ | $0$ |
| $+\infty$ | $0^+$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $0^-$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $0^+$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $0^-$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $0^+$ | $l>0$ |
| $-\infty$ | $0^+$ | $l<0$ |
| $+\infty$ | $0^-$ | $l>0$ |
| $+\infty$ | $0^-$ | $l<0$ |

| ④ حالات خاصة | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\sqrt{f(x)}$ = | $\lim\lvert f(x)\rvert$ = | فإن: $\lim[f(x)]^2$ = | إذا كانت $\lim f(x)$ = |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| | | | |

| ⑤ حالات عدم التعيين | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $0\times\infty$ | $+\infty-\infty$ |

Prof Mustapha
KdHALDI

# النهايات ②
# (التفسير الهندسي)

## ❶ المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب (عمودي)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Longleftarrow x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور التراتيب

## ❷ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b \Longleftarrow y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

## ❸ المستقيم المقارب المائل

### أ] البحث عن المستقيم المقارب المائل

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \Longleftarrow$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

إذا كان $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - ax] = b$ $\Longleftarrow y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $C_f$

### ب] اثبات أن مستقيم هو مقارب مائل ل $C_f$

لإثبات أن $y = ax + b$ مقارب مائل ل $C_f$ يكفي برهان أن: $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

### ج] دراسة وضعية $C_f$ بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - (ax + b)$

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| إشارة $f(x) - y$ | − | | + |
| الوضع النسبي بين $C_f$ و (Δ) | $C_f$ تحت (Δ) | $C_f$ يقطع (Δ) | $C_f$ فوق (Δ) |

✱ملاحظة: يسمى المنحنى الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $\frac{ax+b}{}$ مع و $ad$ قطعا

نـ

# مخطط دراسة دالة

## ❶ مجموعة التعريف

✪ تحديد مجموعة تعريف الدالة إن لم تكن قد أعطيت في النص

## ❷ دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة)

✪ قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مركز أو محور تناظر المنحنى

## ❸ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

## ❹ تحديد المستقيمات المقاربة

## ❺ دراسة اتجاه تغير الدالة

① حساب المشتقة

② دراسة إشارة المشتقة

③ استنتاج اتجاه تغير الدالة

④ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

## ❻ حساب نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

## ❼ تشكيل جدول التغيرات

## ❽ التمثيل البياني للدالة

① رسم المستقيمات المقاربة

② تمثيل النقط الحدية (الكبرى و الصغرى إن وجدت) مع رسم المماسات الأفقية عندها

③ تمثيل نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

④ تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب احداثياها

⑤ رسم المماسات المائلة (إن وجدت)

⑥ رسم محور التناظر أو تمثيل مركز التناظر (إن وجدو) لاستغلال التناظر و تسهيل الرسم

⑦ استغلال و استعمال جدول التغيرات لرسم الدالة

Prof M

# المرجح في المستوي ①

## ❖ مرجح نقطتين

* $G$ مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بالمعاملين $\alpha$ و $\beta$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$
  - $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان
  - تسمى الثنائية $(A,\alpha)$ نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين
* إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}\Leftarrow G$ منتصف $[AB]$ ; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=1$)

**مبرهنات:**

- $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة $M$ لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
- $G$ منتصف $[AB]\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة $M$ لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$

**خواص:**

- $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\Leftrightarrow G$ مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\Leftarrow$ فإن النقط $A$ , $B$ و $G$ على استقامة واحدة

**احداثيا مرجح نقطتين:**

$A(x_A;y_A)$ ; $B(x_B;y_B)$ ; $G(x_G;y_G)$ و $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

Prof Mustapha
KHALDI

**إنشاء مرجح نقطتين:**

$G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\Leftarrow\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من $A$ نضع $G$ على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

## ❖ مرجح 3 نقط

* $G$ مرجح النقط , $B$ و $C$ المرفقة بالمعاملات $\alpha$ , $\beta$ و $\gamma$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
  - $\alpha$ , $\beta$ و $\gamma$ أعداد حقيقية حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
* إذا كان $\alpha=\beta=\gamma$ و النقط $A$ , $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة فإن: $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=\gamma=1$)

**مبرهنة:**

- $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة $M$ لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

**خواص:**

- $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}\Leftrightarrow G$ مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$
- $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ , إذا كانت $D$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن: $G$ مرجح $\{(D,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$

**احداثيا مرجح 3 نقط:**

$A(x_A;y_A)$ ; $B(x_B;y_B)$ ; $C(x_C;y_C)$ ; $G(x_G;y_G)$ و $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

**إنشاء مرجح 3 نقط:**

$G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}\Leftarrow\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

**طريقة 1:**

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

2) نرسم الشعاع $\longrightarrow$ محصلة مجموع الشعاعين $\longrightarrow$ و $\longrightarrow$

**طريقة**

# المرجح في المستوي ②

## ❖ مجموعة النقط

| | إذا كان | فإن مجموعة النقط هي | |
|---|---|---|---|
| ❶ | $k' > 0$ حيث $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = k'$ | دائرة مركزها $G$ و نصف قطرها $r = k'$ | دائرة |
| | $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = AB$ | دائرة مركزها $G$ و نصف قطرها $r = AB$ (لأن $AB$ طول موجب ثابت) | |
| | $(MG)\perp(MH)$ | دائرة قطرها $GH$ و مركزها منتصف $[GH]$ | |
| ❷ | $k' < 0$ حيث $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = k'$ | مجموعة خالية | $\phi$ |
| ❸ | $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = 0$ | النقطة $G$ (أو هي النقطة $M$ منطبقة على $G$) | نقطة |
| ❹ | $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$ | مستقيم محور القطعة $[GH]$ | مستقيم |
| ❺ | $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| \leq k'$ | كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها $G$ و نصف قطرها $r = k'$ | جزء من المستوي |
| | $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| > k'$ | كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها $G$ و نصف قطرها $r = k'$ | |
| | $\|\|\overrightarrow{MG}\|\| < \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$ | نصف المستوي في جهة النقطة $G$ و حده محور $[GH]$ | |

✱**ملاحظة1:** لإثبات أن $B$ تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض $M$ ب $B$ في العلاقة المعطاة و نتحصل على علاقة صحيحة

✱**ملاحظة2:** لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن $M$ يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من $M$

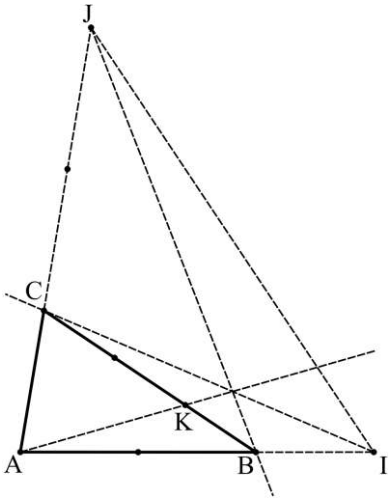
## ❖ اثبات تلاقي مستقيمات

**مثال:** $ABC$ مثلث و النقط $I$ , $J$ و $K$ معرفة كما يلي:

- $I$ نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى $B$
- النقطة $J$ تحقق: $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- النقطة $K$ تحقق: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) أرسم شكلا توضح فيه النقط $I$ , $J$ و $K$ مع التبرير.
2) أثبت أن كل نقطة من النقط $I$ , $J$ و $K$ هي مرجح لنقطتين من النقط $A$ , $B$ و $C$ يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.
3) أثبت أن المستقيمات $(CI)$ , $(BJ)$ و $(AK)$ متقاطعة.

Prof Mustapha
KdHA-LDG




**الحل:**

**1)** الإنشاء مع التبرير:

- $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AC} \iff 2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

**2)** اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$-2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه $I$ مرجح الجملة: $\{A(1), B(-3)\}$

* بنفس الطريقة نجد: $J$ مرجح : $\{A(2), C(-3)\}$ و $K$ مرجح : $\{B(2), C(1)\}$

**3)** إثبات أن المستقيمات $(CI)$ , $(BJ)$ و $(AK)$ متقاطعة:

ليكن $G$ مرجح $\{(A,2);(B,-6);(C,-3)\}$ , $G$ موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

**طريقة 1:** (باستعمال خاصية التجميع)

$G$ مرجح $\{(I,-4);(C,-3)\}$ و منه $G \in (IC)$

$G$ مرجح $\{(J,-1);(B,-6)\}$ و منه $G \in (JB)$

$G$ مرجح $\{(K,-9);(A,2)\}$ و منه $G \in (AK)$

و منه المستقيمات $(CI)$ , $(BJ)$ و $(AK)$ متقاطعة في النقطة

**طريقة 2:** (باستعمال الارتباط الخطي)

$2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{GI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}) - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

و منه ( $\frac{3}{7}\longrightarrow$ $\longrightarrow$ )

* بنفس الطريقة نجد: و

في $G$

# الزوايا الموجهة

➤ يوجه المستوي
- توجيها مباشرا (موجب) ← عكس عقارب الساعة
- توجيها غير مباشر (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

➤ نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الإتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

➤ نسمي الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين.

✪ إذا كان $x$ قيس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $\boxed{k\in\mathbb{Z}}$

✪ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ أو $]0,2\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$

✪ **إيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})=x$:**

❶ نكتب الشكل العام للزاوية أي: $(\vec{u},\vec{v})=x+2k\pi$

❷ نحصر الشكل العام للزاوية بين $\pi$ و $-\pi$ أي: $-\pi<x+2k\pi<\pi$

❸ يكفي إيجاد $k$ انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القيس الرئيسي.

✪ **علاقة شال:**

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

**نتائج:**

- $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$
- $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$

Prof Mustapha
KdHALDI

✪ **تقايس الزوايا الموجهة:**

لتكن $(\vec{u},\vec{v})=\alpha$ و $\left(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right)=\alpha'$

$(\vec{u},\vec{v})$ و $\left(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right)$ متقايستان $\Leftrightarrow \alpha'=\alpha+2k\pi$ أي $\alpha'-\alpha$ مضاعف ل $2\pi$

✪ **الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:**

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$
- $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi \Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه)
- أو
- $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi \Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين)

✪ **خاصية:**

$\{k;k'\}\in\mathbb{R}^*$

- إذا كان $k$ و $k'$ من نفس الإشارة فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
- إذا كان $k$ و $k'$ من إشارتين مختلفتين فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

➤ **الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:**

إذا كانت $A$، $B$ و $M$ ثلاث نقط متمايزة من دائرة مثلثية $(C)$ مركزها $O$ فإن:

## ❖ حساب المثلثات

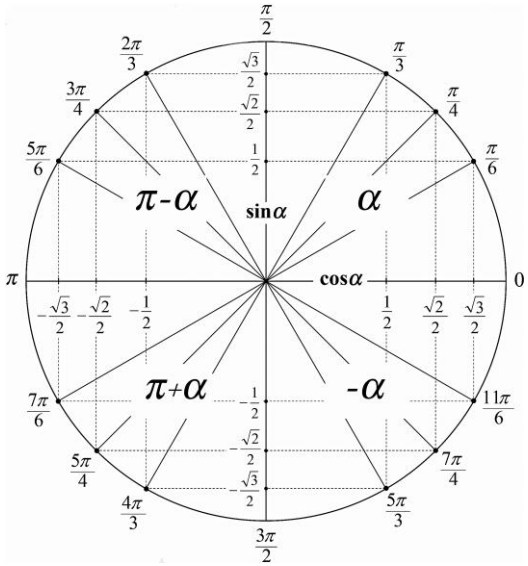
- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

- $-1 \leq cosx \leq 1$
- $-1 \leq sinx \leq 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

**جدول زوايا شهيرة:**

| $x$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $180°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $sinx$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $cosx$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |

**الدائرة المثلثية:**




## ❖ الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

ليكن $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس ولتكن $M$ نقطة من المستوي غير منطبقة على $O$

✱ تسمى الثنائية $M(x;y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة $M$

✱ تسمى الثنائية $M(r;\theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة $M$ حيث: $r = OM$ و $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$

مصطلحات: النقطة $O$ تسمى القطب، $(O;\vec{\imath})$ يسمى المحور القطبي، $r$ نصف القطر القطبي و $\theta$ زاوية قطبية

## ❖ العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

$$y = r\sin\theta \quad ; \quad x = r\cos\theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## ❖ المعادلات المثلثية

❶ $\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$

❷ $\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

❸ المعادلات من الشكل $\cos x = a$

- ✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول
- ✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$ :

1) نبحث عن القيس الرئيسي $c$ حيث $\cos c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = -c + 2k\pi \end{cases}$

❹ المعادلات من الشكل $\sin x = a$

- ✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول
- ✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$ :

1) نبحث عن القيس الرئيسي $c$ حيث $\sin c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = \pi - c + 2k\pi \end{cases}$

❺ المعادلات من الشكل $\cos u = \sin v$

- ✳ إما نحول $sin$ إلى $cos$ بالقانون $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ فتصبح المعادلة $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ أي من الشكل ❶
- ✳ أو نحول $cos$ إلى $sin$ بطريقتين:
  - بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = sin\, v$ أي من الشكل ❷
  - أو بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = sin\, v$ أي من الشكل ❷

# الاحتمالات

## I. مصطلحات

1) **تجربة عشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة

2) **مجموعة الإمكانيات $\Omega$:** هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل:
(الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة أو مجموعة المخارج)

3) **الحادثة $A$:** هي مجموعة جزئية من $\Omega$

1.3) **الحادثة الأولية:** هي حادثة تحتوي على عنصر وحيد

2.3) **الحادثة المستحيلة $\phi$:** هي الحادثة الخالية

3.3) **الحادثة العكسية $\overline{A}$:** هي الحادثة التي تحوي كل عناصر $\Omega$ ما عدا عناصر $A$

* لتكن $B$ حادثة أخرى من $\Omega$:

4) $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين $A$ و $B$

5) $A \cup B$: هي العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين $A$ و $B$ بدون تكرار

6) $A$ و $B$ غير متلائمتين $\Leftarrow A \cap B = \phi$

7) $A$ و $B$ حادثتان مستقلتان: احتمال الحادثة $A$ لا يؤثر في احتمال الحادثة $B$ و العكس.

## II. قانون الاحتمال

لتكن $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots\dots\dots, e_n\}$ حيث $e_i$ هو المخرج رقم $i$ مع $i \in \mathbb{N}^*$

1) **قانون الاحتمال $P_i$:** هو احتمال تحقق المخرج $e_i$

2) **احتمال الحادثة $A$:** يرمز له ب $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة $A$

3) خواص:

- $0 \leq P_i \leq 1$ و $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ أي $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 1$
- $P(\Omega) = 1$ و $P(\phi) = 0$

Prof Mustapha
KHALDI

## III. تساوي الاحتمال

1) **تجربة متساوية الاحتمال:** هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال

2) **مصطلحات تساوي الاحتمال:**
"زهر نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقود متوازنة" ، "كريات لا نفرق بينها عند اللمس" ...

*ملاحظة مهمة جدا: لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار تساوي الاحتمال بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا (و يمكن للمجموعة الشاملة $\Omega$ أن تتغير من سؤال لآخر في نفس التمرين)

3) **نتائج:**

في حالة تساوي الاحتمال يكون قانون الاحتمال متساوي التوزيع حيث:

## IV. خواص الاحتمالات:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت $A$ و $B$ حادثتين غير متلائمتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- إذا كانت $A \subset B$ فإن: $P(A) \leq P(B)$
- اذا كانت $A$ و $B$ حادثتان مستقلتان فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

## V. تعاريف لقانون الاحتمال:

❶ الأمل $E$: $E = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

❷ التباين $V$: $V = \sum_{i=1}^{n} (e_i - E)^2 p_i$ أو $V = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i - E^2$

❸ الانحراف المعياري $\sigma$: $\sigma = \sqrt{V}$

✱ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا عناصر $\Omega$ هي قيم الطبع و قيم $P_i$ هي التواترات

## VI. المتغير العشوائي $X$

1. المتغير العشوائي $X$ هو دالة عددية معرفة على $\Omega$
2. عموما نرمز ب "$I$" لمجموعة قيم $X$ أي $I = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

## VII. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ هو احتمال تحقق المخرج $X_i$ من $I$ و نرمز له ب $P_i$ أو $P(X = x_i)$

## VIII. تعاريف للمتغير العشوائي $X$:

❶ الأمل الرياضياتي $E$: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

❷ التباين $V$: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P_i$ أو $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - (E(X))^2$

❸ الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Prof M

# التحاكي

## 1. تعريف: التحاكي هو تحويل نقطي معرف بالعلاقة

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$ (مثل علاقة الارتباط الخطي)

حيث $O$ هو مركز التحاكي و $k \in \mathbb{R}^*$ هي نسبته و $M'$ هي صورة $M$ بهذا التحاكي

* نرمز للتحاكي $h$ بالرمز: $h(O,k)$

نتيجة: $A, B, C$ على استقامة واحدة $\Leftarrow$ يوجد $h$ وحيد و $k$ وحيد يحقق: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

## 2. الخاصية المميزة:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$

Prof Mustapha
KHALDI

نتائج:

❶ بما أن $k \neq 0$ و $A$ تختلف عن $B$ فإن: $(A'B') \parallel (AB)$ و منه:

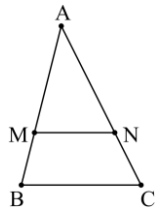
- صورة مستقيم $(d)$ بتحاك هي مستقيم $(d')$ يوازي $(d)$
- صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ بتحاك هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ حيث $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$

❷ $A'B' = |k|AB$

❸ إذا كان $G$ مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن صورته بالتحاكي هي $G'$ مرجح $\{(A',\alpha);(B',\beta)\}$

تذكير: مستقيم $(AB)$ هو مجموعة النقط $M$ مرجحات $\{(A,\alpha);(B,1-\alpha)\}$ مع $\alpha\epsilon\mathbb{R}$

## 3. المثلثات المتحاكية:




$ABC$ و $AMN$ مثلثان. $M \in (AB)$ و $N \in (AC)$ حيث: $(MN) \parallel (BC)$

التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $M$ يحول كذلك $C$ إلى $N$ (نظرية طالس)

## 4. صورة دائرة:

صورة دائرة $(C)$ مركزها $I$ و نصف قطرها $r$ بواسطة تحاكي $h$ نسبته $k$ هي دائرة $(C')$ مركزها $I' = h(I)$ و نصف قطرها $r' = |k|r$

## 5. خواص التحاكي:

① الحفاظ على استقامية النقط

② الحفاظ على التوازي

③ الحفاظ على الزوايا الموجهة

④ لا يحافظ على الأطوال و المساحات و الحجوم (التحاكي يضاعف الأطوال $|k|$ مرة و يضاعف المساحات $k^2$ مرة و يضاعف الحجوم $|k^3|$ مرة)

✱ ملاحظة: عندما يكون $|k| > 1$ يقوم التحاكي بتكبير الأشكال و عندما يكون $0 < k < 1$ فإن الشكل يصغر $k$ مرة

# الجداء السلمي

## 1. الجداء السلمي لشعاعين

$\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(x';y')$ بحيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

**حالات خاصة:**

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
* $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ و $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$
* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

## 2. تعامد شعاعين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$$

## 3. قواعد الحساب

**أ) خواص الجداء السلمي:**

❶ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ ; ❷ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ ; ❸ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

**ب) المتطابقات الشهيرة:**

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

## 4. الجداء السلمي والاسقاط العمودي

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$
* إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ و $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ و $C'$ و $D'$ المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين $C$ و $D$ على $(AB)$فإن:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$

**حالات خاصة:**

* إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$
* إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$

## 5. تطبيقات الجداء السلمي

**أ) في المستقيم:**

ليكن $(D)$ مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

**شعاع التوجيه:** $\vec{v}(-b;a)$ ; $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

**الشعاع الناظمي:** $\quad$ ; $a$

Prof Mustapha
KdHA-LDG

**ب) في الدائرة:**

❶ معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0; y_0)$ و نصف قطرها $r$ هي $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$

❷ الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط $M$ حيث $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}}$

✳ **ملاحظة:** لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و العكس غير صحيح.

## 6. حساب أطوال، مساحات وأقياس زوايا (العلاقات المترية في مثلث)

$ABC$ مثلث مساحته $S$ و نصف محيطه $p$ أي $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$

**أ) مبرهنة المتوسط**

$A$ و $B$ نقطتان و $I$ منتصف $[AB]$ من أجل كل نقطة $M$ لدينا: $\boxed{MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2}$

**ب) مبرهنة الكاشي**

❶ $\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}}$

❷ $\boxed{b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}}$

❸ $\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}}$

**ج) مبرهنة المساحة**

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Prof Mustapha
KdHA-LDI

**د) قاعدة هيرون**

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

**ه) مبرهنة الجيوب**

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}}$$

## 7. المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة $A(x_0; y_0)$ وبين مستقيم معادلته $ax+by+c=0$ هي:

$$\boxed{d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

## 8. دساتير الجمع

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos 2a=\boxed{\cos^2 a-\sin^2 a}=\boxed{2\cos^2 a-1}=\boxed{1-2\sin^2 a}$$

$$\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$



05 50 88 1

# المتتاليات العددية

## I]. تعاريف و رموز

المتتالية $u$ هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي $n$ العدد $u(n)$ حيث:

نرمز للمتتالية بالرمز $u_n$ بدلا من $u(n)$ حيث $u_n$ هي صورة $n$ بالمتتالية $u$

يسمى $u_n$ أيضا الحد العام للمتتالية $u$ او الحد الذي دليله $n$

إذا كان $n \geq p$ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq p}$

Prof Mustapha
KHALDI

$u_0$ هو الحد الأول للمتتالية $u$ إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$

$u_1$ هو الحد الأول للمتتالية $u$ إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$

$u_p$ هو الحد الأول للمتتالية $u$ إذا كانت معرفة من أجل $n \geq p$

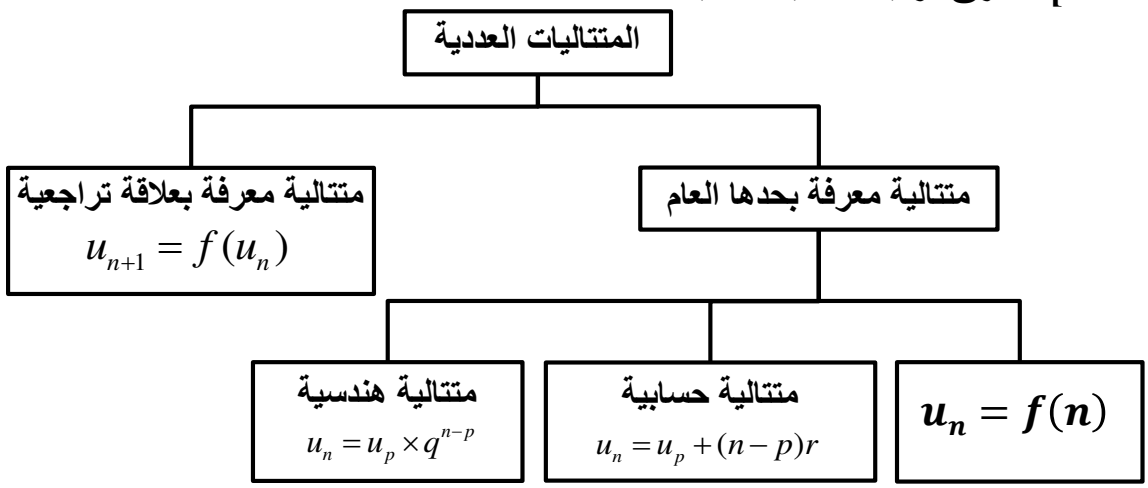
يسمى $n$ دليل المتتالية $u$ أو دليل الحد $u_n$

$p$ هو دليل الحد الأول للمتتالية $u$

$(n-p+1)$ هي رتبة الحد $u_n$

حساب الحد الذي رتبته $m$ أي حساب الحد $u_{(m-p+1)}$

## II]. طرق توليد متتالية عددية




## III]. اتجاه تغير متتالية عددية

عموما:

| إذا كانت | فإن |
|---|---|
| $u_{n+1} > u_n$ | $u$ متزايدة |
| $u_{n+1} < u_n$ | $u$ متناقصة |
| $u_{n+1} = u_n$ | $u$ ثابتة |

**طريقة ❶:** ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

| إذا كانت | فإن |
|---|---|
| $u_{n+1} - u_n > 0$ | $u$ متزايدة |
| $u_{n+1} - u_n < 0$ | $u$ متناقصة |
| $u_{n+1} - u_n = 0$ | $u$ ثابتة |

**طريقة ❷:** ندرس تغيرات إذا كانت المتتالية من الشكل:

**طريقة ❸:** نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و نقارنها مع $1$

| إذا كانت | فإن |
|---|---|
| $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ | $u$ متزايدة |
| $\frac{u_{n+1}}{}$ | متناقصة |
| | |

## IV]. المتتالية الحسابية

### ① تعريف

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$r$ هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

### ② عبارة الحد العام

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

✪ إذا كان الحد الأول هو $u_0$ فإن:

$$u_n = u_0 + nr$$

✪ إذا كان الحد الأول هو $u_1$ فإن:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

✱ملاحظة:

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

### ③ مجموع متتالية حسابية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### ④ البرهان أن المتتالية حسابية

طريقة ❶: نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

إذا كان: $u_{n+1} - u_n = r$ حيث $r$ عدد ثابت خالي من $n$ فإن $u_n$ حسابية

طريقة ❷: نكتب $u_n$ على الشكل

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

### ⑤ الوسط الحسابي

، و ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية

## V]. المتتالية الهندسية

### ① تعريف

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$q$ هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

### ② عبارة الحد العام

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو $v_0$ فإن:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

✪ إذا كان الحد الأول هو $v_1$ فإن:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

Prof Mustapha
KdHA-LDT

✱ملاحظة:

إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

### ③ مجموع متتالية هندسية

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$$

$$S_n = \text{الحد الأول} \left( \frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}} \right)$$

$$S_n = v_p \left( \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} \right)$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1-q}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

### ④ البرهان أن المتتالية هندسية

طريقة ❶: نحسب النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$

إذا كان: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$ حيث $q$ عدد ثابت خالي من $n$ فإن $v_n$ هندسية

طريقة ❷: نكتب $v_n$ على الشكل

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

### الوسط الهندسي

ندسية

$u_{n+1}$

## VI]. المتتالية الثابتة

① **تعريف:** هي المتتالية التي جميع حدودها **متساوية** أي $u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_n$

② **البرهان أن المتتالية ثابتة**

يكفي إثبات أن $u_{n+1} - u_n = 0$ أو أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ أو إثبات أن $u_{n+1} = u_n = u_0$

## VII]. إثبات أن المتتالية لا حسابية ولا هندسية

- يكفي برهان أن $u_{n+1} - u_n \neq r$ و أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq q$
- أو برهان أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ و أن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

## VIII]. تقارب وتباعد متتالية

$u_n$ متقاربة $\Leftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ، حيث $l \in \mathbb{R}$

$u_n$ متباعدة $\Leftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

✳ **مبرهنة:** إذا كانت $u_n = f(n)$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$

## IX]. نهاية متتالية باستعمال الحصر

❶ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \\ v_n \leq u_n \leq w_n \end{cases}$

❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \\ u_n \geq v_n \end{cases}$

❸ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \\ u_n \leq v_n \end{cases}$

## X]. نهاية متتالية هندسية

| | إذا كان | | النهاية | التقارب |
|---|---|---|---|---|
| ❶ | $q > 1$ | $v_0 > 0$ و | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ | متباعدة |
| ❷ | | $v_0 < 0$ و | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ | |
| ❸ | $-1 < q < 1$ | | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ | متقاربة |
| ❹ | $q \leq -1$ | | غير موجودة | متباعدة |

## XI]. إثبات أن المتتالية غير رتيبة (غير متزايدة وغير متناقصة)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

② نناقش حسب قيم $n$ الفرق $u_{n+1} - u_n$

نستنتج أن غير رتيبة

Prof M
KdHA

# التعليم في الفضاء
# (الهندسة الفضائية)

## 1. المعلم الديكارتي

**المعلم للفضاء:** هو كل رباعية نقط $(O; I, J, K)$ ليست من نفس المستوي

باعتبار المبدأ $O$ و بوضع $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ ، $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ نرمز للمعلم ب $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

- يسمى $(OI)$ محور الفواصل، $(OJ)$ محور التراتيب و $(OK)$ محور الرواقم
- يرمز للمستوي $(OIJ)$ ب $P(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

## 2. احداثيات نقطة واحداثيات شعاع

- نرمز لإحداثيات نقطة $M$ من الفضاء ب $M(x; y; z)$ حيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ مع $(x; y; z) \epsilon \mathbb{R}^3$
- نرمز لإحداثيات شعاع من الفضاء ب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ أو $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$

## 3. الحساب والخواص

$A(x_A; y_A; z_A)$ ، $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين من الفضاء، $\vec{u}(x; y; z)$ ، $\vec{v}(x'; y'; z')$ شعاعين من الفضاء و $\alpha \epsilon \mathbb{R}$

أ) **حساب احداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$:** $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

ب) **حساب احداثيات $M$ منتصف القطعة $[AB]$:** $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

ج) $\vec{u} + \vec{v}\ (x + x'; y + y'; z + z')$ و $\alpha\vec{u} = (\alpha x;\ \alpha y\ ;\ \alpha z)$

د) $\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$ و $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

## 4. الأشعة من نفس المستوي

$\vec{u}(a; b; c)$ ، $\vec{v}(a'; b'; c')$ و $\vec{w}(a''; b''; c'')$ 3 أشعة من الفضاء و $(x; y) \epsilon \mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي $\Leftrightarrow \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

أي الجملة $\begin{cases} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b'' \\ cx + c'y = c'' \end{cases}$ تقبل حلا $(x; y)$ في $\mathbb{R}^2$

Prof Mustapha
KdHA-LDI

## 5. معادلة مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

ليكن $(D)$ المستقيم الذي يشمل $A(x_A; y_A; z_A)$ و $\vec{u}(a; b; c)$ شعاع توجيه له

$$M(x; y; z) \epsilon (D) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x - x_A = \alpha a \\ y - y_A = \alpha b \\ z - z_A = \alpha c \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

و منه معادلة $(D)$ هي: $\begin{cases} b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ c(x - x_A) - a(z - z_A) = 0 \end{cases}$

## 6. المسافة

طويلة شعاع

## 7. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم

$(S)$ سطح كرة مركزها O مبدأ المعلم و نصف قطرها $\alpha$

$$M(x;y;z)\epsilon(S) \implies OM = \alpha \implies \boxed{x^2+y^2+z^2=\alpha^2}$$

## 8. معادلة المستويات الموازية لأحد مستويات الاحداثيات

### ❶ معادلات مستويات الاحداثيات

معادلة $P(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$ ، معادلة $P(O;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$ و معادلة $P(O;\vec{k};\vec{i})$ هي $y=0$

### ❷ معادلة لمستو موازٍ لأحد مستويات الإحداثيات

لتكن $D(a;b;c)$ نقطة من المستوي

- معادلة المستوي الذي يشمل $D$ ويوازي $P(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=c$
- معادلة المستوي الذي يشمل $D$ ويوازي $P(O;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=a$
- معادلة المستوي الذي يشمل $D$ ويوازي $P(O;\vec{k};\vec{i})$ هي $y=b$

## 9. معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الاحداثيات

ليكن $R$ نصف قطر الأسطوانة

- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها $(Oz)$ هي $x^2+y^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $z=c$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=c \end{cases}$
- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها $(Oy)$ هي $x^2+z^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $y=b$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y=b \end{cases}$
- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها $(Ox)$ هي $y^2+z^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $x=a$ هي $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x=a \end{cases}$

## 10. معادلة سطح المخروط الدوراني الذي رأسه $O$ ومحوره أحد محاور الاحداثيات

لتكن $\alpha$ قيس نصف زاوية رأس هذا المخروط

- معادلة سطح المخروط الذي محوره $(Oz)$ هي: $x^2+y^2-\tan^2\alpha\times z^2=0$
- معادلة سطح المخروط الذي محوره $(Oy)$ هي: $x^2+z^2-\tan^2\alpha\times y^2=0$
- معادلة سطح المخروط الذي محوره $(Ox)$ هي: $y^2+z^2-\tan^2\alpha\times x^2=0$

Prof Mustapha

# الاحصاء

Prof Mustapha
KdHA-LDJ

## I]. رموز ومصطلحات

$N$ : عدد التكرارات (المجموع الكلي)
$Q_1$ : الربعي الأول
$Q_3$ : الربعي الثالث
$D_1$ : العشري الأول
$D_9$ : العشري التاسع
$Med$ : الوسيط

## II]. الربعيان $Q_1$ و $Q_3$ و العشريان $D_1$ و $D_9$

| تحديد $Q_1$ ، $Q_3$ ، $D_1$ و $D_9$ | | |
|---|---|---|
| بالترتيب | طبع كمي متقطع | طبع كمي مستمر |
| ❶ نرتب القيم ترتيبا تصاعديا مع تكراراتها<br>❷ $Q_1$ هي القيمة التي رتبتها $\leq \frac{N}{4}$<br>❸ $Q_3$ هي القيمة التي رتبتها $\leq \frac{3N}{4}$<br>❹ $D_1$ هي القيمة التي رتبتها $\leq \frac{N}{10}$<br>❺ $D_9$ هي القيمة التي رتبتها $\leq \frac{9N}{10}$ | ❶* $Q_1$ هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{N}{4}$<br>* أو $Q_1$ هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{1}{4}$<br>❷* $Q_3$ هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$<br>* أو $Q_3$ هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3}{4}$ | ❶ $Q_1$ هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$<br>❷ $Q_3$ هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$<br>❸ $D_1$ هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{10}$<br>❹ $D_9$ هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{9}{10}$ |

## III]. خواص الربعيات

### 1) الانحراف الربعي $I = Q_3 - Q_1$

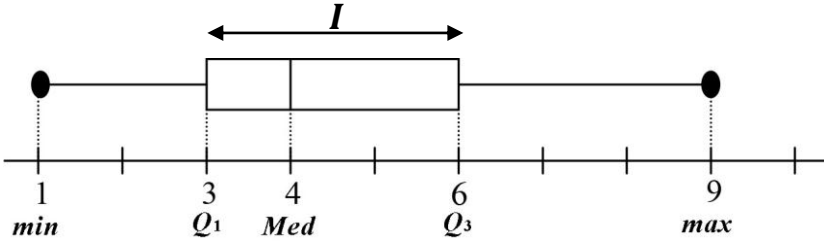
*ملاحظة1: الانحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

*ملاحظة2: في مضلع سلسلة مستمرة المستقيمات التي معادلاتها $x = Q_1$ ، $x = Med$ ، $x = Q_3$ تقسم المضلع إلى أربعة مجالات متساوية المساحات

### 2) المخطط بالعلب

① نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)
② نعين على هذا المحور القيم: $min$ ، $max$ ، $Q_1$ ، $Med$ ، $Q_3$
③ نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور بحيث طول المستطيل هو الانحراف الربعي وعرضه كيفي)

مثال: $min = 1$ ، $max = 9$ ، $Q_1 = 3$ ، $Med = 4$ ، $Q_3 = 6$




*ملاحظة: هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع احصائي والمقارنة بين عدة سلاسل احصائية

### 3) أثر تغيير تآلفي على الربعيين

$A$ سلسلة إحصائية $(x_i, n_i)$ وسيطها $Med$ و ربعيها $Q_1$ و $Q_3$
$B$ سلسلة إحصائية $(y_i, n_i)$ بنفس التكرارات وسيطها $Med'$ و ربعيها $Q_1'$ و $Q_3'$
من أجل كل لدينا:

•

•

## IV]. الوسط الحسابي $\overline{X}$

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i \quad \text{أو} \quad \overline{X}=\sum_{i=1}^{p}f_i x_i \quad \text{حيث:} \quad N=\sum_{i=1}^{p}n_i \quad \text{و} \quad f_i=\frac{n_i}{N}$$

## V]. التباين $V$

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2 \quad \text{أو} \quad V=\sum_{i=1}^{p}f_i\left(x_i-\overline{X}\right)$$

أيضا $V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i {x_i}^2-\overline{X}^2$ أو $V=\sum_{i=1}^{p}f_i {x_i}^2-\overline{X}^2$

## VI]. الانحراف

$$S=\sqrt{V}$$

## VII]. الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة $e_m$

$$e_m=\sum_{i=1}^{p}f_i\left|x_i-\overline{X}\right|$$

Prof Mustapha
KHALDI

## VIII]. خواص التباين والانحراف المعياري

### 1) الخاصية الأساسية

الدالة $g(a)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-a\right)^2$ تقبل قيمة حدية صغرى لما $a=\overline{X}$ و هذه القيمة هي التباين $V$

### 2) التغيير التآلفي

إذا كانت $A\ (x_i,n_i)$ سلسلة إحصائية تباينها $V_x$ و انحرافها $S_x$ و $B\ (y_i,n_i)$ سلسلة إحصائية تباينها $V_y$ و انحرافها $S_y$ بنفس التكرار و $\boxed{y_i=ax_i=b}$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ و من أجل $i\in\{1,2,3,\dots,p\}$ يكون لدينا:

$$\boxed{V_y=a^2V_x} \quad \text{و} \quad \boxed{S_y=|a|S_x}$$

## IX]. تلخيص سلسلة إحصائية

- يتم تلخيص سلسلة إحصائية بمِؤشرين (مؤشر موقع ومؤشر تشتت)
- عموما نختار الثنائية (الوسيط ، الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة) : $(Med\ ،\ e_m)$

  أو الثنائية (الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري) : $(\overline{X}\ ،\ S_x)$
- يمكن استعمال ثنائيات أخرى لتلخيص سلسلة كالثنائية (الوسيط ، المدى) لكن يعاب على المدى تأثره بالقيم الشاذة
- تستخدم أحيانا الثنائية (الوسيط ، الانحراف الربعي) لتلخيص السلسلة و هي ثنائية لا تتأثر بالقيم الشاذة
- تلخيص سلسة إحصائية يمكننا من مقارنته بسلسلة أخرى ملخصة بنفس الثنائية