المتتاليات العددية

السنة الثانية 2 شعب علمية

- ملخص الدرس+أمثلة
- أسئلة
- تمالرين محلولة
- تمارين مقترحة

انجاز الأستاذ: شعبان أسامة

موقع راية التعليم

5min Ma

ملخص الدرس

1.متتالية عددية

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$.هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:

- المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-5n^2+2$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}-\{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n\geq 1}$.
- المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ و نكتب $(w_n)_{n\geq 6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

❑**مثال:** المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b\in\mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a $(a$ عدد طبيعي أصغر من $b)$ هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2.طرق توليد متتالية عددية.(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

1-توليد متتالية عددية بالحد العام:

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

❑**مثال:** المتتالي $\mathbb{N}$ 3 ^{2}

موقع راية التعليم

ب- توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

• لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$

الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

❑**مثال:** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n$.

لدينا $u_0=1$ و منه $u_1=3u_0=3$ ، $u_2=3u_1=9$ ، $u_3=3u_2=27$ و هكذا ...

❑**مثال:** **لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :** $u_n=-3n^2+1$.

1) **أحسب** u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .
2) **أكتب بدلالة** n **الحدود** u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-3x^2+1$.

حل: 1) $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_3=-3(3)^2+1=-26$

$u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$ ، $u_{134}=-3(134)^2+1=-53867$.

2) $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

$u_{3n+2}=-3(3n+2)^2+1=-27n^2-36n-11$.

❑**مثال:** **لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :** $u_0=2$ **من أجل كل عدد طبيعي** n $u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n}$.

1) **أحسب** u_1 ، u_2 ، u_3 .
2) **أحسب** u_{10} ، u_{11} و u_{12} .**ثم ضع تخمينا**

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل عدد حقيقي موجب x : $f(x)=\dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0,+\infty[$ وبما أن $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

1) $u_1=\dfrac{3}{2+u_0}=\dfrac{3}{4}$ ، $u_2=\dfrac{3}{2+u_1}=\dfrac{3}{2+\frac{3}{4}}=\dfrac{12}{11}$ ، $u_3=\dfrac{3}{2+u_2}=\dfrac{3}{2+\frac{12}{11}}=\dfrac{33}{34}$.

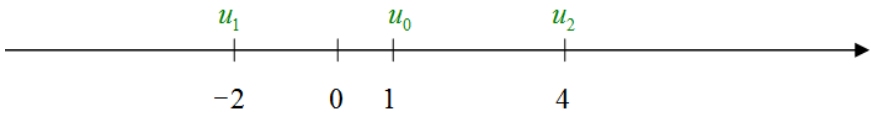
2) الحاسبات تبين أن $u_{10}\approx 1$ ، $u_{11}\approx 1$ و $u_{12}\approx 1$. نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقا من $n=10$.

3. التمثيل البياني لمتتالية عددية.

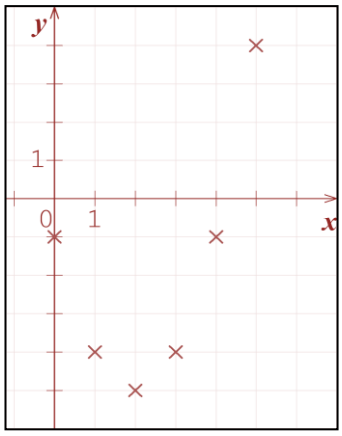
موقع راية التعليم

- **يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور**

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=(-2)^n$.



- **يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).**



مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-4n-1$.

(u_n)معرفة كذالك $u_n=f(n)$ حيث: $f:x\mapsto x^2-4x-1$ نعرف f على المجال $[0,+\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n,f(n))$ من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. **مجموعة النقط** $M(n,f(n))$ **هي التمثيل البياني للمتتالية** (u_n) .

2.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n,f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة) .

4. إتجاه تغير متتالية عددية.

❶ **.متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❷ **.متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❸ **.متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

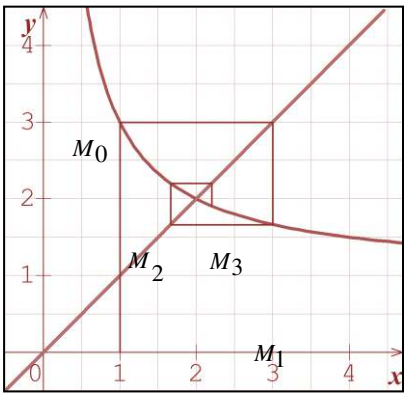
❹ **. متتالية رتيبة:** المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

- مثل بيانيا الم

موقع راية التعليم

لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n,u_{n+1})$. $y=x$.



حل: (C_f) هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$

نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة

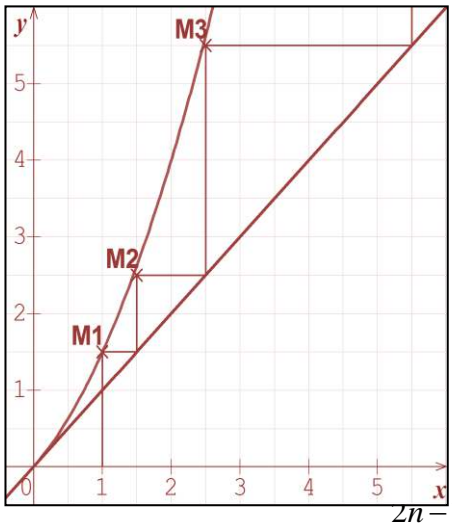
$M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق

(Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على

النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$

و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n^2+u_n$.



- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$ المعرفة على $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة

$y=x$.نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

مثال:

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=\dfrac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

1) **ندرس إشارة $u_{n+1}-u_n$ أو**
2) **نقارن بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 .**
3) **إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .**

حل: • اتجاه تغير المتتالية (u_n). $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2n-1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• (v_n)متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

موقع راية التعليم

المتتالية الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=u_n+r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p+(n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الالحد الأخير-دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=r$ و منه:

- إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n+2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع: $S=u_0+u_1+.....+u_n$.

الحل:

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}-u_n=\left[-3(n+1)+2\right]-\left[-3n+2\right]=-3$

المتتالية الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=q \quad \text{أو} \quad u_{n+1}=u_n\times q$$

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n=u_0\times q^n$ و $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن1 فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن:

$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه:

*إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

*إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

*إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

*إذا كان $q=0$ تكون كل حدودالمتتالية معدومة ابتداء من الحد2 .

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.

n

موقع راية التعليم

$S=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\frac{2-3n+2}{2}$ و منه $S=\frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.	1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$. 2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$. $S=v_1+v_2+.....+v_n=v_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ و منه: $S=3\times\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$

6.نهاية متتالية عددية

1.متتالية عددية متقاربة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ أو $\lim\limits_{n\to-\infty}u_n=l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظة:

- إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
- إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

2.نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة.

مبرهنة: لتكن المتتالية (u_n)المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

3.نهاية غير منتهية لمتتالية عددية.

تعريف: (u_n) متتالية عددية .

- المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $(\alpha\in\mathbb{R})$ $]\alpha,+\infty[$يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $(\alpha\in\mathbb{R})$ $]-\infty,\alpha[$يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

موقع راية التعليم

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $n^2 \in]\alpha,+\infty[$ إبتداءا من $n \geq n_0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

❑ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = -n^2 - 1$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2-1) \in]-\infty,\alpha[$ إبتداءا من $n \geq n_0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مبرهنة: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة: النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

❑ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. • عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي :

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

❑ **مثال:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n+3}$. • عين نهاية المتتالية (u_n).

حل: نحول العبارة $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n+3}$.

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = n \times \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} .$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n} = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}} = \dfrac{1}{2}$. إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ و المتتالية (u_n) متباعدة .

7. نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر.

مبرهنة:: (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.

موقع راية التعليم

مبرهنة: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

مبرهنة: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

مثال: $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\dfrac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{4n}{2n+3}$.

• عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

حل: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = 2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

موقع راية التعليم

Ask me i'm ready



1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20} . **2.** أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

* أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = 2v_n + 5$.

1. أحسب v_1 و v_2. **2.** عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.

4. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1. **2.** أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

5. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3. **2.** أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n. **3.** أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$.

6. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n. **2.** استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

7. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

1.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول. **2.** ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

8. بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.. **2.** كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

9. (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ ، و $u_5 = \dfrac{1}{32}$.

في النظر ☹

الأجابة

موقع راية التعليم



حل السؤال ❶:

1. $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.
2. $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

حل السؤال ❷:

$$u_1=-2u_0+1=-2\times 2+1=-3$$
$$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$$
$$u_3=-2u_2+1=-2\times 7+1=-13$$

حل السؤال ❸:

1. $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$ و $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.
2. $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$

و منه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$

و منه $v_{n-1}=\frac{v_n-5}{2}$.

حل السؤال ❹:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1}-u_n$ عدد ثابت r.

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=[-3(n+1)+2]-[-3n+2]=-3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

3. لدينا: $S=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\frac{2-3n+2}{2}$ و منه $S=\frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

حل السؤال ❺:

موقع راية التعليم

2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

$S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S = 3 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n - 1\right)$

حل السؤال ❻:

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

1. $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - (n+1)\right] - \left(n^2 - n\right)$ و منه $u_{n+1} - u_n = 2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n \geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

حل السؤال ❼:

1. $v_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \dfrac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3^n}{2^{n+1}} = \dfrac{3}{2} v_n$. و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{2}$
2. بما أن $\dfrac{3}{2} > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1} - v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$.

حل السؤال ❽:

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لنرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $n + 2005$ و منه $u_0 = 3000$ و $u_2 = 3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $n + 2005$ وعدد السكان خلال السنة الموالية هي: $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1+\alpha) u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ و منه $q^2 = \dfrac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$ و بالتالي $q = 1,1$. نستنتج أن $\alpha = 0,1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2005 + 25 = 2030$. لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ و منه $u_{25} = 3000 \times (1,1)^{25}$ أي $u_{25} \approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

حل السؤال ❾:

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

إذا $u_{2007} = u_5 \times q^{2007-5} = \dfrac{1}{32} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2002} = \dfrac{1}{2^{2007}}$.

•

موقع راية التعليم

تمارين

رقم	نص التمرين

1 (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.احسب u_0، u_1 ، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

2 نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$.

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49}$.

3 (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1.بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

4.استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$

4 (u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.عين الأساس r للمتتالية (u_n).

2.بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n-5$.

3.أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟

4. احسـ

موقع راية التعليم

5 نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.أحسبالحد u_4علما أن: $u_3+u_5=20$.

2.أحسب الحد u_5علما أن: $2u_4-u_5=7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

6 في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1هو:

أ- -17 ب- -14 ج- -11 .

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب- $\frac{1-3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3.نضع من أجل كل xعدد حقيقي : $a=2x+2$ ، $b=6x-3$ ، $c=4x$.الأعداد الحقيقية a ، b ، cبهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ ب- $x=0$ ج- $x=\frac{3}{4}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

7 اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n)متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n)هي:

أ- $v_n=3\times2^n$ ب- $v_n=3\times2^{n-1}$ ج- $v_n=2\times3^n$

3.المجموع : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$ ب- $\left(2^n-1\right)$ ج- $2\left(3^n-1\right)$

8 (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها qحيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1.بين أن $u_1=24$ ، ثم استنتج قيمة u_0.

2.بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times4^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n)وعين رتبته.

5.احسب

موقع راية التعليم

أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

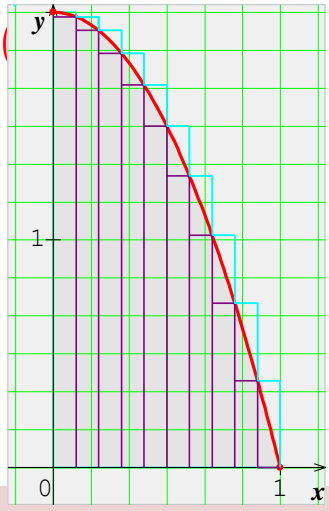
ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

10 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x) = 2 - 2x^2$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. نريد حساب المساحة A مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين المعرفينبالمعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

نقسم المجال $[0,1]$ إلى n جزءًا متساوية حيث أن كل جزء يساوي $\frac{1}{n}$.

كما هو مبين في الرسم المقابل.



ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين . نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E . و عليه لدينا $u_n \le A \le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

1) عين u_n و v_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2) إستنتج قيمة A يعطى المجموع $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1 لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

1 $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين u_n و v_n بدلالة n .

5) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

1 في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد $10000\,DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500\,DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

2 نرمز بـ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1. كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟
2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1{,}05\,u_n - 1500$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. $v_n = u_n - 30000$ n

موقع راية التعليم

5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$.

1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+...+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$\begin{cases} v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n+2a^2-a \\ v_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ ، a عدد حقيقي

1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

موقع راية التعليم

حل التمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.حساب u_0، u_1 ، u_2 و u_3.

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_3 = 7 \end{cases}$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - 3n + 2 \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = 1954$$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $n = 652 \in \mathbb{N}$

$u_{652} = 1954$ رتبته 653 لأن الحد الأول هو u_0.

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\frac{(-2+3n-2)}{2} \\ &= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) \end{aligned}$$

و منه .

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

موقع راية التعليم

$$\frac{3n^2-n-4}{2}=328$$

معناه: $3n^2-n-4=2(328)$

$$3n^2-n-660=0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_1=15\in\mathbb{N}$ و $n_2=\frac{-44}{3}\notin\mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n=15$ لدينا: $S_n=328$

حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

نجمع المعادلات نتحصل: $\begin{cases}u_1=u_0+r=u_0+3\\u_2=u_0+2r=u_0+6\\u_3=u_0+3r=u_0+9\end{cases}$ أي: $u_0+u_0+3+u_0+6+u_0+9=10$ و بالتالي: $4u_0+18=10$ و $u_0=-2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=-2+3n$

3.تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n=145$.

أي: $u_n=-2+3n=145$ يعني: $n=49$ $u_{49}=145$

4. حساب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}$.

$$\begin{aligned}S&=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}\\&=50\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right)\\&=50\left(\frac{-2+145}{2}\right)\\&=3575\end{aligned}$$

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n=2u_n+3$.

احسب المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}$.

$$\begin{aligned}S'&=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}\\&=2S+3(50)\\&=2(3575)+150\\&=7300\end{aligned}$$

حل التمرين 3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1=20$ و $u_3=320$.

1.اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

موقع راية التعليم

$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

$\frac{u_3}{u_1} = q^2$

من القانون : نضع: $n=3; p=1$.

$q^2 = \frac{320}{20} = 16$

$q = 4, q = -4$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q = 4$

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n: $u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$= 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)$$
$$= \frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)$$

4.استنتاج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$ $S' = \frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right) = 27305$

حل التمرين 4: ❑

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:

$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$
$$10r - 10 = 50$$
$$10r = 60$$
$$r = 6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

$u_0 = -5$

موقع راية التعليم

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة: $6n-5=2017$
$n=337\in\mathbb{N}$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0=-5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$S=u_0+u_1+u_2+...+u_n$$
$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
أي:
$$=(n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)$$
$$=(n+1)(-5+3n)$$
$$=3n^2-2n-5$$

حل التمرين 5: ❑

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$u_3+u_5=2u_4$$
و بالتالي: $2u_4=20$
$u_4=10$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.لدينا:

$u_4=10$
معناه: $2u_4-u_5=7$
$2(10)-u_5=7$
$u_5=13$

$r=u_5-u_4$
3.استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان: $r=13-10$
$r=3$

$$u_4=u_0+4r$$

حساب u_0.نأخذ ا

موقع راية التعليم

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n-2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$
و بالتالي:
$$= (n+1)\left(\frac{-2+3n-2}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4+3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$

حل التمرين 6: ❑

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي : $a = 2x+2$ ، $b = 6x-3$ ، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

حل التمرين ❑

موقع راية التعليم

أ- متزايدة تماما

لأن: $u_{n+1}-u_n>0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3.المجموع : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$

حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1.اثبات أن $u_1=24$،

لدينا: $u_0\times u_2=576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0\times u_2=u_1^{\,2}$$

و بالتالي: $u_1^{\,2}=576$

$u_1=24;u_1=-24$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1=24$ استنتاج قيمة u_0.:

$$u_0+u_1=30$$

لأن: $u_0=30-u_1=30-24$

$u_0=6$

$$u_1=u_0\times q$$

2.بين أن $q=4$، نعلم أن: $q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{24}{6}=4$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=6\times 4^n$

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$،

لدين: $u_n=6\times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1}=6\times 4^{n+1}$.

موقع راية التعليم

$$u_{n+1}-u_n = 6\times4^{n+1}-6\times4^n$$
$$= 6\times4^n\times4^1-6\times4^n$$
$$= 6\times4^n(4-1)$$
$$= 6\times4^n(3)=18\times4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1}-u_n = 18\times4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4.حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

$$u_n = 1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6\times4^n = 1536$

$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$. رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع : $S_n = u_1+u_2+...+u_n$

معناه:

$$S_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$
$$= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$

أي: $= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)$

$$= -6\left(1-4^n\right)$$
$$= 6\left(4^n-1\right)$$

حل التمرين 9: ❑

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

لأن: (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = ... = u_0 = 3$ (كل حدودها متساوية)

- من أجل كل

موقع راية التعليم

ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}\ u_n - 3$ و منه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $(v_0 = u_0 - 3)$ $v_0 = -1$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n = u_n - 3$ و منه $u_n = v_n + 3$. إذن $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

3. لدينا $S = v_0 + 3 + v_1 + 3 + \ldots + v_n + 3 = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + 3 + 3 + \ldots + 3$

و منه $S = S' + 3\ n+1$ حيث $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S' = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 10: ❑ .

1) مساحة المستطيل الأول المحتوى في E هي $\frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$، مساحة المستطيل المحتوى في E و المجاور

له هي $\frac{2}{n}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$،مساحة المستطيل الموالي هي $\frac{2}{n}\left(1 - \frac{9}{n^2}\right)$ وهكذا حتى آخر مستطيل $\frac{2}{n}\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$ وبالتالي

أي $u_n = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right) + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{9}{n^2}\right) + \ldots + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

$u_n = \frac{2n}{n} - \frac{2}{n^3}\left(1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2\right)$ و منه $u_n = 2 - \frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1} p^2$ إذن $u_n = 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$.

مساحة المستطيل الأول من الفيئة الثانية هي $\frac{2}{n}$،مساحةالمستطيل الثاني هي $\frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$،مساحة المستطيل الثالث هي

$\frac{2}{n}\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$ و هكذا إلى آخر مستطيل مساحته $\frac{2}{n}\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$

موقع راية التعليم

$v_n = 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3}$ إذن $v_n = 2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}\sum_{p=1}^{n-1} p^2$ ومنه $v_n = \frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n^3}\left(1+4+...+(n-1)^2\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} = \frac{4}{3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3n^3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

3) بما أن $u_n \le A \le v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $A = \frac{4}{3}$.

حل التمرين 11: ❑

1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$
$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12} w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = 11$. ومنه $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$
$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

3) نحسب : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = -\frac{2}{3} w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4} w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

5) $-1 < \frac{1}{12} < 1$ $\lim \left(\frac{1}{\quad}\right)^n = 0$ $\lim u = 4$ $\lim v = 4$

موقع راية التعليم

حل التمرين 12:

1) $u_0 = 10000$ ، $u_1 = 90000$ u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

حيث: $u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 - 1500$ و منه $u_2 = 7950$

2) $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 10000 - 1500$ و منه $u_{n+1} = 1,05\,u_n - 1500$

3) نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(x) = 1,05\,x - 1500$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1 - u_0 < 0$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

4) $v_{n+1} = u_{n+1} - 30000 = 1,05u_n - 31500$.

و منه $v_{n+1} = 1,05(u_n - 30000)$ أي $v_{n+1} = 1,05\,v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$ و حدها الأول $v_0 = -20000$.

- لدينا $v_n = v_0 q^n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n$.

بما أن $u_n = v_n + 30000$ فإن $u_n = -2 \times 10^4 \times (1,05)^n + 3 \times 10^4$

و منه $\lim u_n = -\infty$

5) لدينا $u_8 = 540,89$ و $u_9 = -1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده

يكون دائنا ابتداء من سنة 2010.

حل التمرين 13:

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

1) أساس هذه المتتالية : $\begin{aligned} u_2 &= u_0 + 2r = -1 + 2r \\ u_4 &= u_0 + 4r = -1 + 4r \end{aligned}$

و بالتعويض نجد : $r = 1$ بما أن : $r = 1 > 0$ فان (u_n) متتالية متزايدة

2) أكتب u_n بدلالة n. $u_n = -1 + n$

موقع راية التعليم

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+...+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}S_n &= u_1+u_2+...+u_n+\frac{1}{2}n\\ &= n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)+\frac{1}{2}n\\ &= n\left(\frac{-1+n}{2}\right)+\frac{1}{2}n\end{aligned}$$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases}v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n+2a^2-a\\ v_0=\frac{1}{2}\end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n)متتالية حسابية:

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1}=v_n+2a^2-a$ أي: $\left(a^2-3\right)=1$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a=-2, a=2$.

2) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n)متتالية هندسية .

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n$ أي: $2a^2-a=0$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a=\frac{1}{2}, a=0$.

موقع راية التعليم

تمارين مقترحة

.1

أ) احسب الحد الاول والثاني والثالث والعاشر للمتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية :

1) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n - \frac{7}{2}$

2) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = n^2 - 2n$

3) (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^* - \{1;2;3\}$ بـ:

$$u_n = \sqrt{2n-8} - \frac{1}{2}$$

ب) (v_n) للمتتالية المعرفة بـ:

$$\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$$

1) علم على حامل محور الفواصل الحدود v_3, v_2, v_1, v_0 دون حسابها.

2) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (v_n)

3) احسب الحدود v_3, v_2, v_1, v_0

ج) مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) المعرفة على بـ: $u_n = n^2 - 6n + 5$

.2

ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n = -5n - \frac{1}{2}$ 2) $u_n = n^2 - 6n + 1$

3) $u_n = 2(\frac{3}{5})^n$ 4) $u_n = -5(\frac{3}{2})^n$

5) $u_n = \frac{2n-3}{-n-3}$ 6) $u_n = \frac{n-1}{2n+5}$

.3

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .

عبر عن u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية

1) الحد الأول : $u_0 = -1$ و $r = 4$.

2) الحد الاول $u_1 = \frac{3}{2}$ و $r = -5$

3) الحد الاول: $u_3 = \sqrt{3}$ و $r = \frac{5}{4}$.

.4

(u_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 3 و حدها الاول u_2 حيث $u_2 = -2$

1) أكتب u_n بدلالة n

موقع راية التعليم

3) أحسب المجموع : $u_2 + u_3 + ... + u_{19}$

.5

أ) (u_n) متتالية حسابية حيث : $u_{10} = 16$ و $u_{15} = 41$

أحسب المجموع : $S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + ... + u_{29}$

ب) (v_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحيث: $v_3 = 23$ و $v_{10} = 65$

1) اوجد الأساس والحد الأول للمتتالية (v_n)

2) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

3) احسب الحد v_{15} والحد السابع والعشرون

4) احسب المجموع : $S = v_{10} + v_{11} + v_{12} + ... + v_{29}$

.6

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـ :

$u_0 = -1$ و $u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}$.

و نعتبر المتتالية w_n حيث : $w_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

1) برهن أن المتتالية w_n حسابية . عين حدها الأول وأساسها .

2) عبر عن الحد العام w_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

.7

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـ : $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n}$.

و نعتبر المتتالية (v_n) حيث : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية عين حدها الأول وأساسها .

2) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

.8

) (u_n) متتالية هندسية أساسها q .

أكتب u_n بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية :

1) $u_0 = -\dfrac{1}{4}$ و $q = 7$.

2) $u_1 = 3$ و $q = 3$.

3) $u_4 = \sqrt{2}$ و $q = -\dfrac{1}{2}$.

ب) (u_n) متتالية هندسية حيث : $u_7 = \dfrac{1}{216}$ و $u_{10} = \dfrac{27}{1331}$

جد الاساس والحد الاول u_1 للمتتالية (u_n)

جـ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أ $u_2 + u_2 + ... + u_9$

موقع راية التعليم

.9 a ، b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية . أحسب a، b و c علما أن: $\begin{cases} a+b+c=36,75 \\ abc=343 \end{cases}$

.10 (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$.

1) أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج u_1 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ بدلالة n .

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $s_n=728$.

.11 (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث: $u_0=2$ و $u_3=9\,u_1$.

1) عين أساس المتتالية (u_n). ثم أحسب u_n بدلالة n

2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$$

.12 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$u_0=-1$ و $u_{n+1}=2-\dfrac{4}{u_n+3}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) لا حسابية و لا هندسية.

3) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

4) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n . واستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

5) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

.13 (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0=1$ ومن أجل $n\geq 1$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{2}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=u_n+\alpha$.

- عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .
- عبر عن v_n بدلالة n .
- استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.

.14 نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=1$ و $3u_{n+1}=2u_n+n+3$.

.1

موقع راية التعليم

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .



موقع راية التعليم