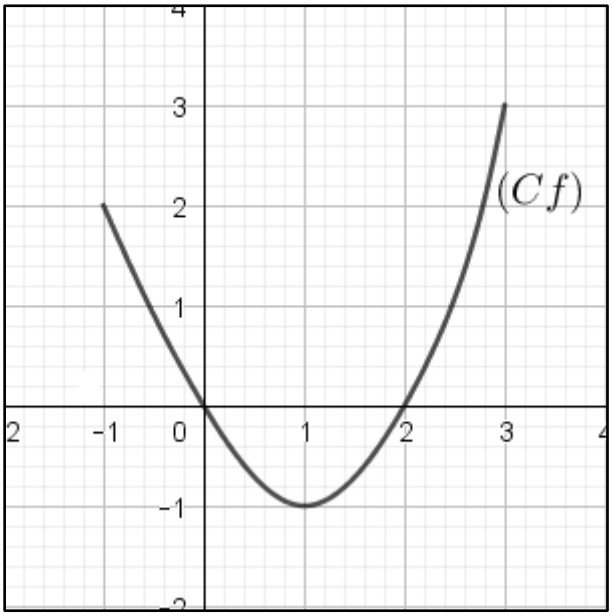
مجلة ريمي حول الاشتقاقية وتطبيقاتها

2022-2021

2 ثانوي علوم تجريبية + تقني رياضي

التمرين الأول



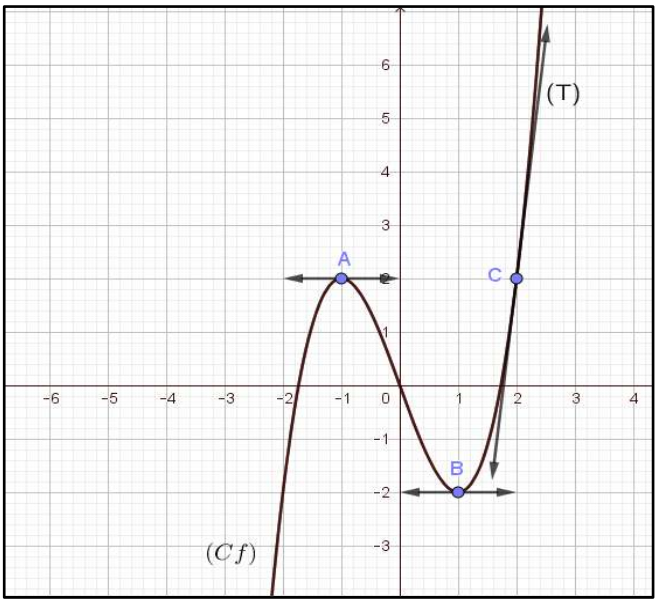
(c_f) التمثيل البياني لدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على المجال $[-1;3]$ في الشكل المقابل.

- ✓ بقراءة بيانية عين إشارة $f(x)$، ثم إشارة $f'(x)$.
- ✓ نعتبر الدالة g معرفة على المجال $[-1;3]$ حيث:

$$g(x) = [f(x)]^2$$

- أحسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و$f'(x)$.
- استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $[-1;3]$.
- شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-1;3]$.

التمرين الثاني



(c_f) التمثيل البياني لدالة f في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية:

1. أحسب $f(2)$ و $f'(1)$ و$f'(-1)$.
2. أوجد قيمة a حتى تكون معادلة المماس(T) للمنحنى (c_f) عند النقطة c من الشكل: $y = ax - 16$
3. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة c.
4. شكل جدول تغيرات الدالة f على R.
5. عين القيم الحدية المحلية لدالة f. ثم أعطي حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[-1;1]$.
6. استنتج في المجال $[-1;1]$ حل المعادلة $f(x) = 0$.

ثم استخرج إشارة $f(x)$ على المجال $[-1;1]$.

التمرين الثالث

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $[-1;3]$ كمايلي: $f(x)=ax^3+bx^2+c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية.

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$).

الجزء الأول: عين الأعداد a و b و c علما أن:

- ✓ التمثيل البياني للدالة f يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$، مماسا معامل توجيهه -3.
- ✓ $f(2)=-2$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f.

الجزء الثاني: نضع $a=1$ ، $b=-3$ و $c=2$

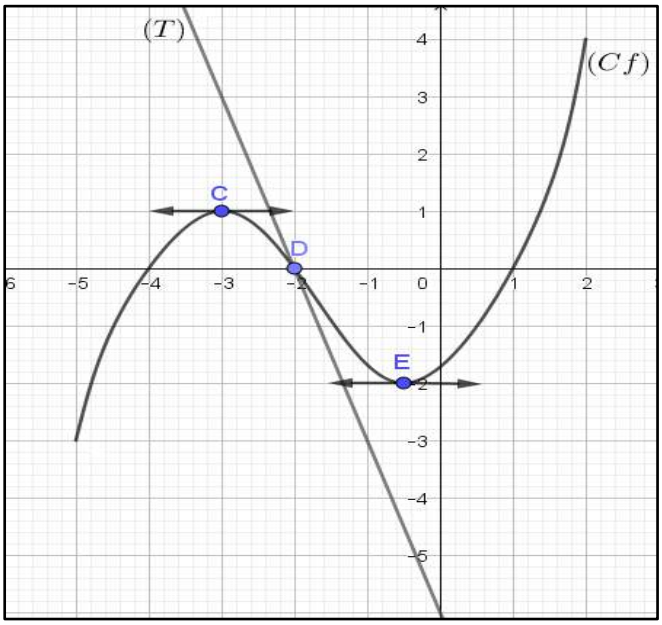
إعداد الأستاذ

ريمي

- ✓ أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
- ✓ بين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.
- ✓ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة A.
- ✓ حل في $[-1;3]$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حامل المحورين.
- ✓ أنشئ (T) و(c_f).
- ✓ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال$[-1;3]$: $g(x)=|f(x)|$ ، أنشئ (c_g).

التمرين الرابع

(c_f) التمثيل البياني لدالة f القابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها في الشكل المقابل.



بقراءة بيانية:

- ✓ عين مجموعة تعريف الدالة f.
- ✓ إستخرج إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريفها.
- ✓ شكل جدول تغيرات الدالة f.
- ✓ عين بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$ ، -2 و-3.
- ✓ استنتج معادلات المماسات للمنحنى (c_f) عند C و D ، E.

التمرين الخامس

- نعتبر الدالة g معرفة على $[-2;2]$ كمايلي: $g(x)=2x^3-x^2-1$
1. أدرس تغيرات الدالة g على $[-2;2]$.
2. استنتج أن للعبارة $g(x)$ جذر ، ثم عين تحليل لـ $g(x)$.
3. حدد حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

- نعتبر الدالة f معرفة على $[-2;0[\cup]0;2]$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^3-x^2+1}{3x}$

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول 3cm).

1. بين أنه من أجل كل x من $[-2;0[\cup]0;2]$: $f'(x)=\frac{g(x)}{3x^2}$
2. إستنتج إشارة $f'(x)$ على $[-2;0[\cup]0;2]$. وأدرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أعطي حصرا لـ $f(x)$ على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$.
4. بين أنه من أجل كل x من $[-2;0[\cup]0;2]$: $2x^3+3x^2-1=(x+1)(2x^2+x-1)$
5. بين أن (c_f) يقبل مماسين (T_1) و(T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$، يطلب تعيين معادلتهما.
6. بين أن (c_f) تقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها. ثم أرسم (T_1) و(T_2) و(c_f).

التمرين السادس

إعداد الأستاذ

ريمي

- نعتبر الدالة f معرفة على $[-4;4]$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل x من $[-4;4]$: $f'(x)=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
2. عين إشارة $f'(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f، و شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4.
4. بين أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f). وأكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A.
5. عين نقط تقاطع مع المحورين (c_f) . ثم أرسم (T) و(c_f).

- نعتبر الدالة g معرفة على $[-4;4]$ كمايلي: $g(x)=f(|x|)$
1. أدرس شفعية الدالة g ، وأكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
2. أرسم (c_g) إعتمادا على شرح كيفية رسمه.

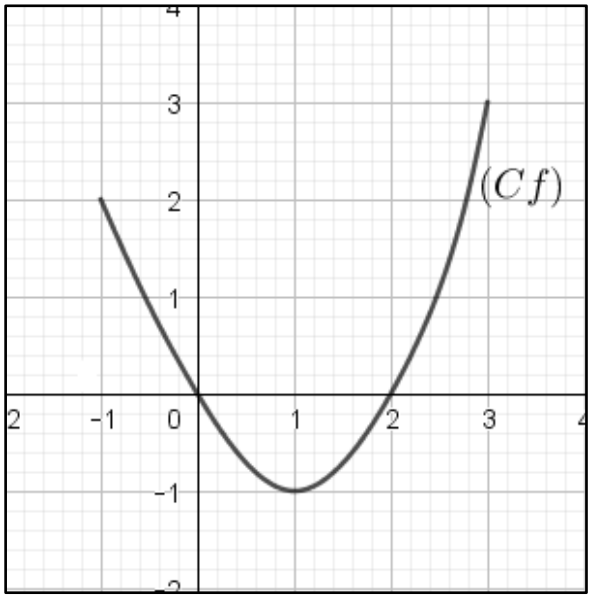
- نعتبر الدالة h معرفة على $[-2;2]$ كمايلي: $h(x)=f(x^2)$
1. بين أن من أجل كل x من $[-2;2]$: $h'(x)=2xf'(x^2)$
2. أدرس إشارة $h'(x)$ على $[-2;2]$، واستنتج إتجاه تغير الدالة h.

الحل النموذجي للتمارين

حل التمرين الأول

(c_f) التمثيل البياني لدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على المجال $[-1;3]$ في الشكل المقابل.

✓ **بقراءة بيانية نعيين إشارة $f(x)$:**



نلاحظ من الشكل المقابل التمثيل البياني (c_f) فوق حامل محور الفواصل على المجالين $[-1;0]$ و$[2;3]$ إذن $f(x) \geq 0$ على المجالين $[-1;0]$ و$[2;3]$. وكذلك (c_f) تحت حامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$ إذن $f(x) \leq 0$ على المجال $[0;2]$.

ومنه من أجل كلx من $[-1;3]$ جدول إشارة $f(x)$ يكون من الشكل:

x	-1		0		2		3
$f(x)$		+	0	−	0	+	

✓ **بقراءة بيانية نعيين إشارة$f'(x)$:**

نستنتج من التمثيل البياني (c_f) أن الدالة f متناقصة على المجال$[-1;1]$ إذن $f'(x) \leq 0$ على المجال $[-1;1]$.

ومتزايدة على المجال $[1;3]$ إذن $f'(x) \geq 0$ على المجال $[1;3]$.

x	-1		0		1		2		3
$f'(x)$		−			0	+			
$f(x)$	2	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	3

✓ **نعتبر الدالة g معرفة على المجال $[-1;3]$ حيث: $g(x) = [f(x)]^2$**

- **حساب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و$f'(x)$:**

وفق قاعدة مركب دالتين : $[[f(x)]^n]' = n \times [f(x)]^{n-1} \times f'(x)$ ، إذن تطبيقا للقاعدة:

$$g'(x) = [[f(x)]^2]' = 2 \times f(x) \times f'(x)$$

إعداد الأستاذ

ريمي

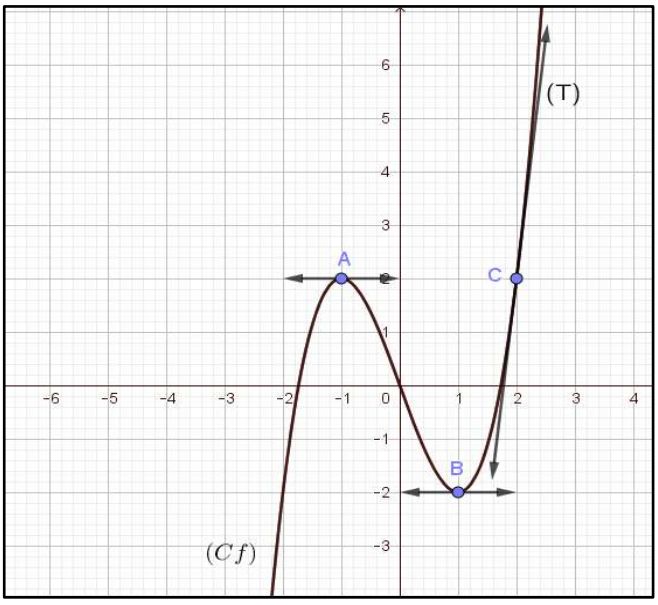
- استنتاج إشارة $g'(x)$ على المجال $[-1;3]$:

x	-1		0		1		2		3
$f(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$		−		−	0	+		+	
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

- تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-1;3]$:

x	-1		0		1		2		3
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$	4	↘	0	↗	1	↘	0	↗	9

حل التمرين الثاني



(c_f) التمثيل البياني لدالة f في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية:

1. حساب $f(2)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$:

✓ صورة 2 بـ (c_f) هو 2 ونكتب: $f(2)=2$.

✓ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند الفاصلة 1 إذن $f'(1)=0$ وهو معامل توجيه مماس لـ (c_f) معادلته $y=2$.

✓ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية كبرى عند الفاصلة -1 إذن $f'(-1)=0$ وهو معامل توجيه مماس لـ (c_f) معادلته $y=-2$.

2. إيجاد قيمة a حتى تكون معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة c حيث:

$(T)\ : y=ax-16 \dots (1)$

لدينا (T) مماس لـ (c_f) عند النقطة $c(2;2)$ حيث يحقق:

$(T)\ : y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$(T)\ : y=f'(2)x-2f'(2)+2 \dots (2)$

بمطابقة (1) و(2) نجد: $a=f'(2)$ و نجد: $-2a+2=-16$

وبحل المعادلة ذات المجهول a نجد: $a=9$.

إعداد الأستاذ

ريمي

3. **كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة c:**

$$(T) \ : y = 9x - 16$$

4. **تشكيل جدول تغيرات الدالة f على R:**

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		1.8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

5. **تعيين القيم الحدية المحلية لدالة f. ثم إعطاء حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[-1; 1]$:**

✓ تعيين القيم الحدية المحلية لدالة f:

الدالة تقبل قيمة حدية محلية كبرى 2 عند المتغير -1 و تقبل قيمة حدية محلية صغرى -2 عند المتغير 1.

6. **استنتج في المجال $[-1; 1]$ حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استخرج إشارة $f(x)$ على المجال $[-1; 1]$:**

(C_f) يقطع (xx') في النقطة $(0; 0)$ على المجال $[-1; 1]$ لنستنتج أن حل المعادلة $f(x) = 0$ هو $x = 0$.

(C_f) فوق حامل محور الفواصل (xx')على المجال $[-1; 0]$ إذن $f(x) \geq 0$ على المجال $[-1; 0]$. وكذلك

(C_f) تحت حامل محور الفواصل (xx') على المجال $[0; 1]$ إذن $f(x) \leq 0$ على المجال $[0; 1]$.

حل التمرين الثالث

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $[-1; 3]$ كمايلي: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية.

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$).

الجزء الأول: تعيين الأعداد a و b و c علما أن:

✓ التمثيل البياني للدالة f يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$، مماسا معامل توجيهه -3.

أي أن: $f'(1) = -3$

✓ $f(2) = -2$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f هذا يعني $f'(2) = 0$

لدينا من أجل كل x من $[-1; 3]$: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

و f دالة قابلة للإشتقاق على المجال $[-1; 3]$: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

مماسبق لدينا: $\begin{cases} f'(1) = -3 \\ f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$ أي أن: $\begin{cases} 3a + 2b = -3 \ldots (1) \\ 8a + 4b + c = -2 \ldots (2) \\ 12a + 4b = 0 \ldots (3) \end{cases}$

من المعادلة (3) نجد: $4b = -12a \longleftarrow b = -3a \ldots (4)$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (1) نجد: $3a + 2(-3a) = -3 \longleftarrow 3a - 6a = -3$

بحل المعادلة نجد: $a = 1$ وبتعويض قيمة a في المعادلة (4) نجد $b = -3$.

بتعويض قيمتي و في المعادلة نجد: $\longleftarrow c$

إعداد الأستاذ

ريمي

الجزء الثاني: بوضع $a=1$ ، $b=-3$ و $c=2$ نجد: $f(x)=x^3-3x^2+2$

✓ دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

إعداد الأستاذ
ريمي

حساب عبارة المشتق:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[-1;3]$: $f'(x)=3x^2-6x$

إشارة عبارة المشتق:

لدراسة إشارة عبارة المشتق نحل في المجال $[-1;3]$ المعادلة $f'(x)=0$

$3x^2-6x=0 \longrightarrow x(3x-6)=0$

إذن حلول المعادلة هي: $\begin{cases} x=0 \\ 3x-6=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

جدول إشارة عبارة المشتق:

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

استنتاج إتجاه تغير الدالة:

من جدول الإشارة $f'(x)\geq 0$ على المجالين $[-1;0]$ و$[2;3]$ لنستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجالين السابقين و $f'(x)\leq 0$ على المجال$[0;2]$ لنستنتج أن لدالة f متناقصة تماما على المجال السابق.

تشكيل جدول تغيرات الدالة:

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

✓ لنبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها:

نقطة الانعطاف:

نقطة الانعطاف هي النقطة:

- التي فاصلتها تنعدم عندها عبارة المشتق f' ولا تتغير إشارتها.
- التي فاصلتها تنعدم عندها عبارة المشتق f'' وتتغير إشارتها.
- التي **يخترق** فيها المماس المنحنى (C_f) أو المنحنى (C_f) **يقطع** فيها المماس.

حساب عبارة المشتق f'':

$$f''(x)=6x-6$$

إشارة عبارة المشتق f'':

لدراسة إشارة $f''(x)$ على المجال $[-1;3]$ نحل المعادلة: $f''(x)=0$

$$6x-6=0 \longrightarrow x=1$$

x	-1		1		3
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

نلاحظ أن الفاصلة 1 إنعدمت عندها عبارة المشتق f'' وتغيرت إشارتها من السالب إلى الموجب إذن النقطة $A(1;f(1)=0)$ تسمى نقطة إنعطاف.

إعداد الأستاذ ريمي

✓ تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة A:

يعني كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند فاصلة A:

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=-3(x-1)+0$$
$$(T): y=-3x+3$$

✓ نحل في $[-1;3]$ المعادلة $f(x)=0$ ثم نستنتج إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حامل المحورين:

$$x^3-3x^2+2=0$$

لحل معادلة من الدرجة الثالثة نقوم بتحليل العبارة x^3-3x^2+2 إلى جداء عبارتين حيث:

$$x^3-3x^2+2=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$$

حيث α جذر للعبارة x^3-3x^2+2

إيجاد الجذر α:

بما أن $1-3+2=0$ فإن $\alpha=1$ جذر للعبارة $f(x)$ حيث يحقق: $f(1)=0$

إيجاد المعاملات a و b و c :

بإستعمال طريقة هورنر نجد:

	2	0	-3	1
$\alpha=1$	-2	-2	1	0
	0	-2	-2	1
		$c=-2$	$b=-2$	$a=1$

إذن يمكن حل المعادلة $x^3-3x^2+2=0$ إعتمادا على تحليل العبارة x^3-3x^2+2 حيث:

$$(x-1)(x^2-2x-2)=0$$

إذن لحل المعادلة نجعل: $(x-1)=0$ أو $x^2-2x-2=0$ ومنه $x=1$ ولحل المعادلة من الدرجة الثانية $x^2-2x-2=0$ نستخدم المميز $\Delta=b^2-4ac$ لنجد: $\Delta=(-2)^2-4(1)(-2)$

إذن: $\Delta=12$ للمعادلة حلان متمايزان هما:

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$$

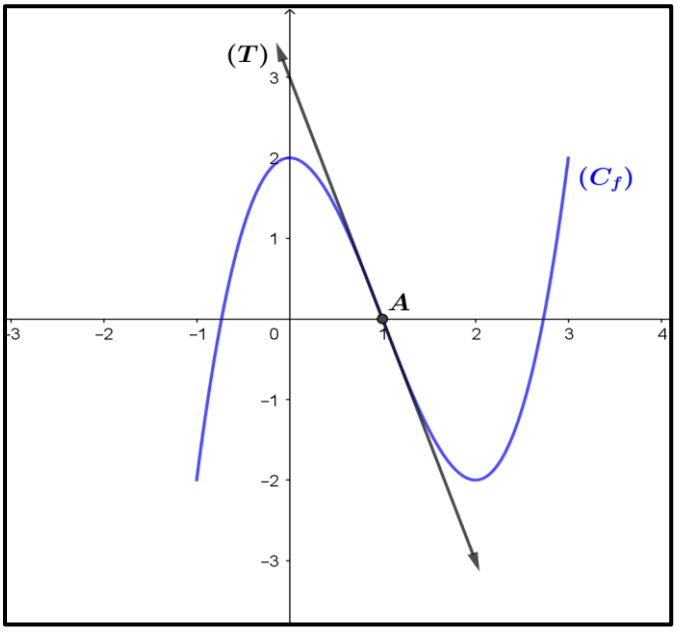
إذن حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال $[-1;3]$ هي: $s = \{1;\ 1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$

نستنتج إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حامل المحورين:

لدينا حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s = \{1;\ 1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$ فنستنتج أن $(xx') \cap (c_f)$ في النقط $(1;0)$ و$(1-\sqrt{3};0)$ و$(1+\sqrt{3};0)$.

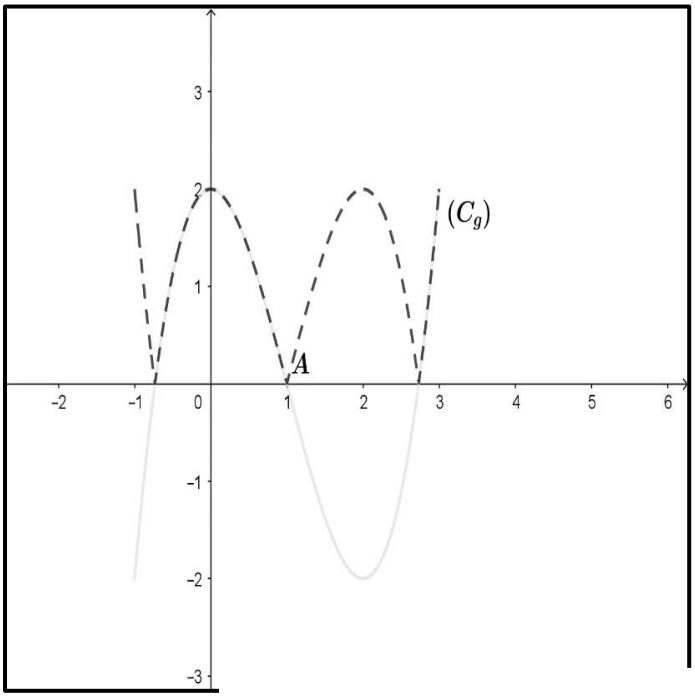
ولدينا من جدول التغيرات $f(0)=2$ فنستنتج أن $(yy') \cap (c_f)$ في النقطة$(0;2)$.

✓ **إنشاء (T) و(c_f):**



- $(T): y=-3x+3$ مماس يمر على نقطة الإنعطاف $A(1;0)$ والترتيبة 3 إذا قمنا بتوصيل بين النقطة A والترتيبة 3 نتحصل على مستقيم المماس (T).
- من جدول التغيرات **وضعية إنطلاق** (c_f) عند النقطة $(-1;-2)$ **ووضعية الوصول** (c_f)عند النقطة $(3;2)$.
- **نقط مرور** (c_f) هي النقط $(1-\sqrt{3};0)$ و$(0;2)$ و$(1;0)$ و$(2;-2)$ و$(1+\sqrt{3};0)$.

✓ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال$[-1;3]$: $g(x)=|f(x)|$ ، أنشئ (c_g).

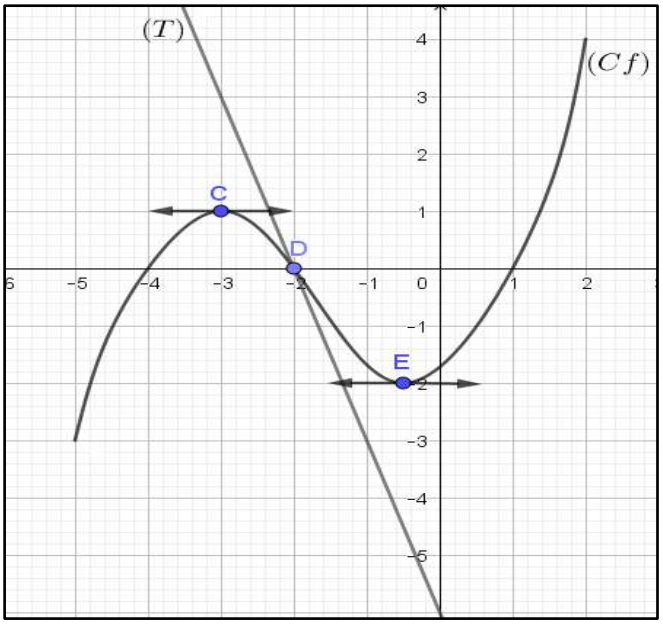


- (c_f) فوق (xx') منطبق على (c_g).
- (c_f) تحت (xx') نظير مع (c_g) بالنسبة (xx')

إعداد الأستاذ

ريمي

حل التمرين الرابع



(c_f) التمثيل البياني لدالة f القابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها في الشكل المقابل.

✓ **تعيين مجموعة تعريف الدالة f:**

$$D_f = [-5; 2]$$

✓ **إستخراج إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريفها:**

نستنتج من التمثيل البياني (c_f) أن الدالة f متزايدة على المجالين $[-5; -3]$ و$\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ إذن $f'(x) \geq 0$ على المجالين $[-5; -3]$ و$\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

ومتناقصة على المجال $\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$ إذن $f'(x) \leq 0$ على المجال $\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$.

✓ **تشكيل جدول تغيرات الدالة f:**

x	-5		-3		$-\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘		↗	4
	-3				-2		

✓ **تعيين بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$ ، -2 و-3:**

عند النقطة C ذات الفاصلة -3 الدالة f تقبل قيمة حدية محلية كبرى 1 إذن $f'(-3) = 0$.

عند النقطة E ذات الفاصلة $-\frac{1}{2}$ الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى -2 إذن $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

النقطة D ذات الفاصلة -2 هي نقطة اختراق المماس (T) للمنحنى (c_f) ومعادلة المماس (T) تكتب من الشكل:

$$(T) : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) \longleftarrow (T) : y = f'(-2)x + 2f'(-2) + 0$$

ومن الشكل المقابل لدينا: $(T) : y = f'(-2)x - 6$ بالمطابقة نجد: $2f'(-2) = -6$ إذن $f'(-2) = -3$

✓ **استنتج معادلات المماسات للمنحنى (c_f) عند C وE، D.**

عند النقطة C معادلة المماس هي: $y = 1$.

عند النقطة معادلة المماس هي:

عند النقطة

إعداد الأستاذ

ريمي

حل التمرين الخامس

إعداد الأستاذ
ريمي

➢ نعتبر الدالة g معرفة على $[-2;2]$ كمايلي: $g(x)=2x^3-x^2-1$

1. **دراسة تغيرات الدالة g على $[-2;2]$:**

- **حساب عبارة المشتق:**

g دالة قابلة للإشتقاق على $[-2;2]$: $g'(x)=6x^2-2x$

- **إشارة عبارة المشتق:**

لدراسة إشارة عبارة المشتق نحل في المجال $[-2;2]$ المعادلة $f'(x)=0$

$$6x^2-2x=0 \longrightarrow x(6x-2)=0$$

إذن حلول المعادلة هي: $\begin{cases} x=0 \\ 6x-2=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$

- **جدول إشارة عبارة المشتق:**

x	-2		0		$\frac{1}{3}$		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **استنتاج إتجاه تغير الدالة:**

من جدول الإشارة $f'(x)\geq 0$ على المجالين $\left[\frac{1}{2};2\right]$ و$[-2;0]$ لنستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجالين السابقين و $f'(x)\leq 0$ على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ لنستنتج أن لدالة f متناقصة تماما على المجال السابق.

- **تشكيل جدول تغيرات الدالة:**

x	-2		0		$\frac{1}{3}$		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-21	↗	-1	↘	$-\frac{28}{27}$	↗	11

2. **استنتاج أن للعبارة $g(x)$ جذر ، ثم تعيين تحليل $g(x)$:**

العبارة $g(x)$ من الدرجة الثالثة نقوم بتحليل العبارة $2x^3-x^2-1$ إلى جداء عبارتين حيث:

$$2x^3-x^2-1=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$$

حيث α جذر للعبارة $2x^3-x^2-1$

بما أن $2-1-1=0$ فإن $\alpha=1$ جذر للعبارة $g(x)$ حيث يحقق: $g(1)=0$

إيجاد المعاملات a و b وc :

بإستعمال طريقة هورنر نجد:

		-1	0	-1	2
1		1	1	2	0

إذن يمكن تحليل العبارة $g(x)$ من الشكل: $g(x) = (x-1)(2x^2+x+1)$.

3. تحديد حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

لتحديد إشارة العبارة $g(x)$ نحل في المجال $[-2;2]$ المعادلة $g(x)=0$ أي $(x-1)(2x^2+x+1)=0$

إذن لحل المعادلة نجعل: $(x-1)=0$ أو $2x^2+x+1=0$ ومنه $x=1$ ولحل المعادلة من الدرجة الثانية $2x^2+x+1=0$ نستخدم المميز $\Delta = b^2-4ac$ لنجد: $\Delta = (1)^2-4(2)(1)$

إذن: $\Delta = -7$ إذن ليس للمعادلة $2x^2+x+1=0$ حل.

ومنه حل المعادلة $g(x)=0$ هو $s=\{1\}$.

إعتمادا على جدول تغيرات الدالة g يمكن إستنتاج إشارة $g(x)$:

x	-2		0		$\frac{1}{3}$		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g(x)$	-21	↗	-1	↘	$-\frac{28}{27}$	↗	0	↗	11

$g(x) \leq 0$ من أجل كل x ينتمي للمجال $[-2;1]$ و $g(x) \geq 0$ من أجل كل x ينتمي المجال $[1;2]$.

➢ **نعتبر الدالة f معرفة على $[-2;0[\cup]0;2]$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^3-x^2+1}{3x}$**

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول 3cm).

1. لنبين أنه من أجل كل x من $[-2;0[\cup]0;2]$: $f'(x)=\frac{g(x)}{3x^2}$

f دالة قابلة للإشتقاق على $[-2;0[\cup]0;2]$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x)(3x)-(3)(x^3-x^2+1)}{(3x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{9x^3-6x^2-3x^3+3x^2-3}{9x^2}=\frac{6x^3-3x^2-3}{9x^2}=\frac{3(2x^3-x^2-1)}{3\times 3x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x^3-x^2-1)}{3x^2}=\frac{g(x)}{3x^2}$$

2. إستنتاج إشارة $f'(x)$ على $[-2;0[\cup]0;2]$. وندرس إتجاه تغير الدالة f، ثم نشكل جدول تغيراتها.

بما أن $3x^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $[-2;0[\cup]0;2]$.

x	-2		0		1		2
			‖				

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0;-2]$ و$[1;0[$ ومتزايدة تماما على المجال$[1;2]$.

x	-2		0		1		2
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$\frac{11}{6}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{5}{6}$

3. **أعطي حصرا لـ $f(x)$ على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$.**

من جدول التغيرات الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$. إذن من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2};1\right]$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x) \geq f(1)$$

$$f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{12}$$

إعداد الأستاذ

ربعي

4. **لنبين أنه من أجل كل x من $[-2;0[\cup]0;2]$: $2x^3+3x^2-1=(x+1)(2x^2+x-1)$:**

$$2x^3+3x^2-1=2x^3+x^2-x+2x^2+x-1$$

$$2x^3+3x^2-1=2x^3+3x^2-1$$

5. **لنبين أن (c_f) يقبل مماسين (T_1) و(T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$، ونعين معادلتهما:**

(c_f) يقبل مماسين (T_1) و(T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$ معناه نعين فاصلتا نقطتا المماسين (T_1) و(T_2) حيث تحقق: $f'(a)=-\frac{4}{3}$

$$\frac{(2a^3-a^2-1)}{3a^2}=-\frac{4}{3}$$

بجعل جداء الطرفين في الوسطين نجد: $3(2a^3-a^2-1)=-12a^2$ أي $6a^3-3a^2-3=-12a^2$

$$6a^3-3a^2-3+12a^2=0$$

$6a^3+9a^2-3=0$ ← إخراج العدد 3 عامل مشترك ← $2a^3+3a^2-1=0$

$2a^3+3a^2-1=0$ ← التعويض بالتحليل نجد ← $(a+1)(2a^2+a-1)=0$

إذن لحل المعادلة نجعل: $(a+1)=0$ أو $2a^2+a-1=0$ ومنه $a_1=-1$ ولحل المعادلة من الدرجة الثانية $2a^2+a-1=0$ نستخدم المميز $\Delta=b^2-4ac$ لنجد: $\Delta=(1)^2-4(2)(-1)$

إذن: $\Delta=9$ للمعادلة حلان متمايزان هما:

1	$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-1-\sqrt{9}}{4}$

إذن (c_f) يقبل مماسين (T_1) و(T_2) معامل توجيههما $-\frac{4}{3}$ في نقطتين ذات الفاصلتين -1 و$\frac{1}{2}$.

- معادلة المماس (T_1) عند الفاصلة -1: $(T_1) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$y = -\frac{4}{3}(x+1) + \frac{1}{3}$$

$$(T_1) : y = -\frac{4}{3}x - 1$$

- معادلة المماس (T_2) عند الفاصلة $\frac{1}{2}$: $(T_2) : y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{12}$$

$$(T_2) : y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{4}$$

6. لنبين أن (c_f) تقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها: ثم أرسم (T_1) و(T_2) و(c_f).

لتحديد نقطة الانعطاف ندرس إشارة $f''(x)$ حيث f' قابلة للاشتقاق على $[-2;0[\cup]0;2]$:

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(3x^2) - (6x)(2x^3 - x^2 - 1)}{9x^4}$$

$$f''(x) = \frac{18x^4 - 6x^3 - 12x^4 + 6x^3 + 6x}{9x^4}$$

إعداد الأستاذ
ريمي

$$f''(x) = \frac{6x^4 + 6x}{9x^4}$$

بما أن $9x^4 > 0$ فإن إشارة $f''(x)$ من إشارة $6x^4 + 6x$:

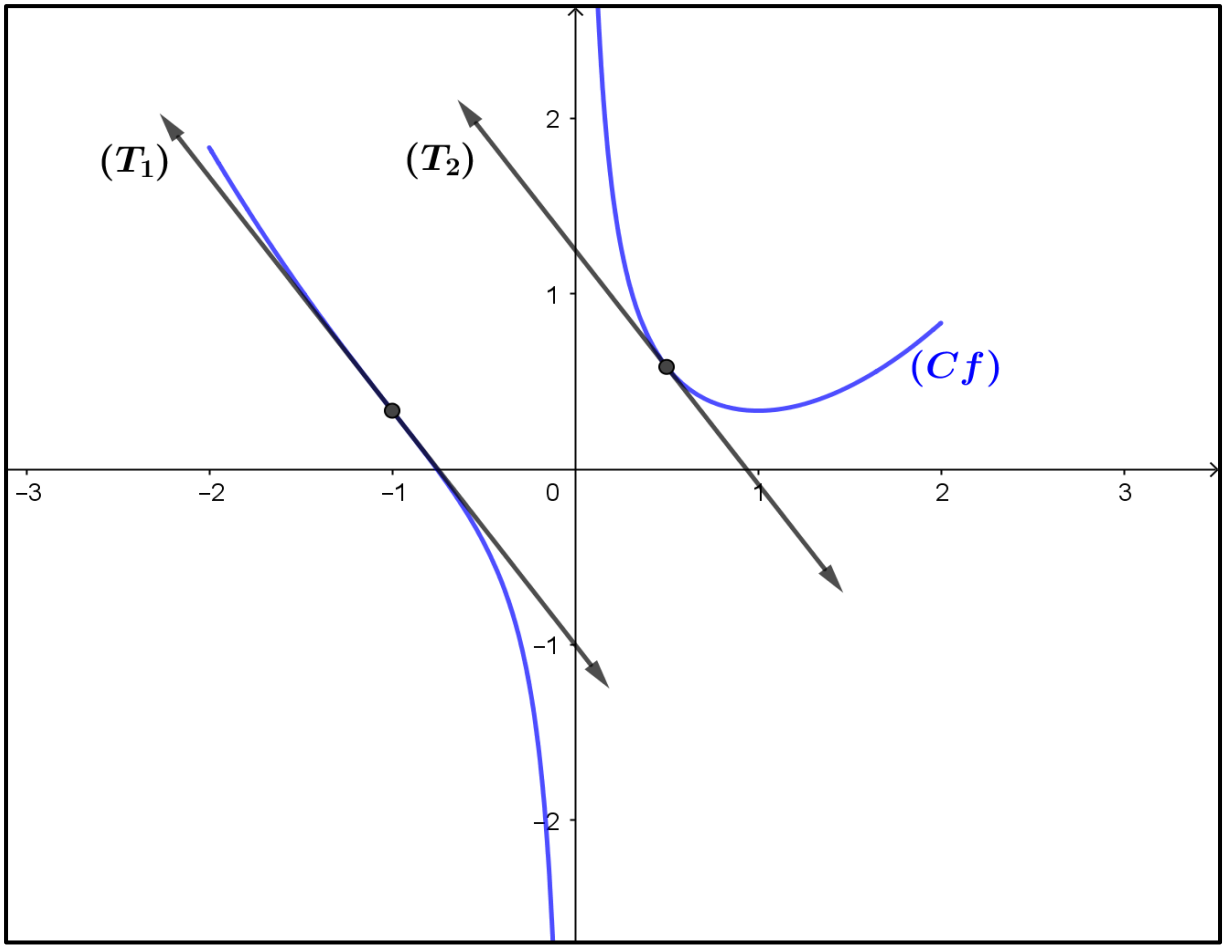
$$6x^4 + 6x = 0 \longleftarrow 6x(x^3 + 1) = 0$$

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ x^3 + 1 = 0 \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} x = 0 \ (\text{مرفوض}) \\ x = -1 \ (\text{مقبول}) \end{cases}$$

x	-2		-1		0		2
$6x$	$-$		$-$		$+$		
$x^3 + 1$	$-$		$+$		$+$		
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$		

نلاحظ أن الفاصلة -1 إنعدمت عندها عبارة المشتق f'' وتغيرت إشارتها من الموجب إلى السالب إذن النقطة $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ تسمى نقطة إنعطاف وهي النقطة التي **يخترق** فيها المماس (T_1) المنحنى (c_f).

رسم (T_1) و(T_2) و(c_f):



إعداد الأستاذ

ريمي

التمرين السادس

➢ نعتبر الدالة f معرفة على $[-4;4]$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. لنبين أنه من أجل كل x من $[-4;4]$: $f'(x)=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

f دالة قابلة للإشتقاق على $[-4;4]$:

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(x^2+1)-(2x)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2x+4x^2+4-2x^3-8x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

2 2

2. **تعيين إشارة $f'(x)$ ثم ندرس إتجاه تغير الدالة f، و نشكل جدول تغيراتها:**

إعداد الأستاذ
ريمي

بما أن $(x^2+1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-4(x^2-1)$:

$$-4(x^2-1)=0 \longleftarrow (x^2-1)=0$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ \text{أو} \\ x=1 \end{cases}$$

x	-4		-1		1		4
-4	$-$		$-$		$-$		
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[-4;-1]$ و $[1;4]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;1]$.

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	$\frac{1}{17}$	↘	-1	↗	3	↘	$\frac{33}{17}$

3. **لنبين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4:**

(c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4 معناه مماسا في نقطة وحيدة فاصلتها a .

$$f'(a)=4$$

$$\frac{-4(a^2-1)}{(a^2+1)^2}=4 \longleftarrow -4(a^2-1)=4(a^2+1)^2$$

$$-(a^2-1)=(a^2+1)^2 \longleftarrow -a^2+1=a^4+2a^2+1$$

$$-a^2+1-a^4-2a^2-1=0 \longleftarrow -a^4-3a^2=0$$

$$a^4+3a^2=0 \longleftarrow a^2(a^2+3)=0$$

إذن لحل المعادلة نجعل: $a^2=0$ أو $a^2+3=0$ أي $a=0$ أو $a^2=-3$ (مرفوض)

إذن نقول (c_f) يقبل مماسا وحيدا معامل توجيهه 4 معناه مماسا في نقطة وحيدة فاصلتها $a=0$.

4. **لنبين أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f):**

النقطة A مركز تناظر للمنحنى (c_f) إذا تحقق x و$-x$ من $[-4;4]$:

$$\frac{(-x)^2+4(-x)+1}{(-x)^2+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}=2$$

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}=2$$

$\frac{2x^2+2}{x^2+1}=2$ أي $\frac{2(x^2+1)}{x^2+1}$ بالإختزال نجد $2=2$. إذن النقطة A مركز تناظر للمنحنى (c_f).

إعداد الأستاذ

ريمي

5. كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة A.

$$(T)\ : y=f'(0)(x+0)+f(0)$$
$$(T)\ : y=4x+1$$

6. تعيين نقط تقاطع (c_f) مع المحورين .

$(xx')\cap(c_f)$ في النقطة $(x;0)$ أي $f(x)=0$ ومنه $\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}=0$ إذن $x^2+4x+1=0$

نستخدم المميز $\Delta=b^2-4ac$ لنجد: $\Delta=(4)^2-4(1)(1)$

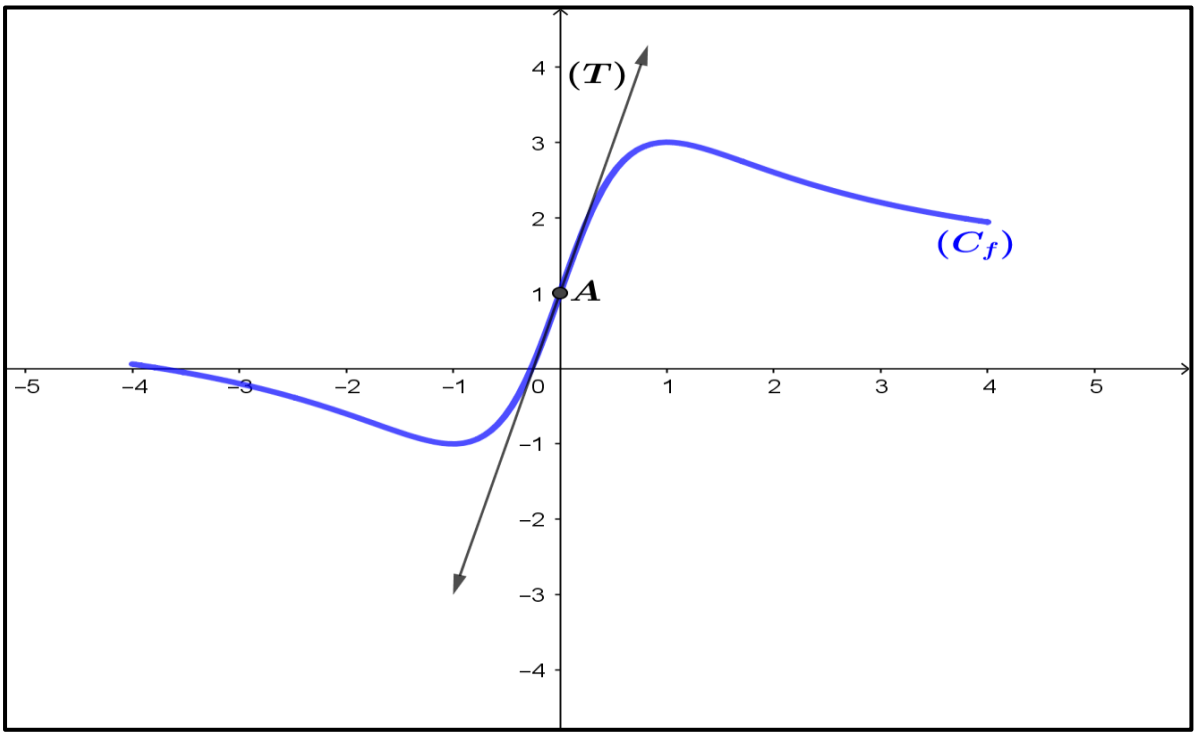
إذن: $\Delta=12$ للمعادلة حلان متمايزان هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}$$

إذن $(xx')\cap(c_f)$ في النقط $(-2-\sqrt{3};0)$ و$(-2+\sqrt{3};0)$.

$(yy')\cap(c_f)$ في النقطة $(0;y)$ أي $f(0)=1$ إذن $(yy')\cap(c_f)$ في النقطة $(0;1)$

7. رسم (T) و(c_f):



➢ نعتبر الدالة g معرفة على $[-4;4]$ كمايلي: $g(x)=f(|x|)$

1. ندرس شفعية الدالة g ، وكتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

لدينا من أجل كل x و $-x$ من $[-4;4]$: $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$

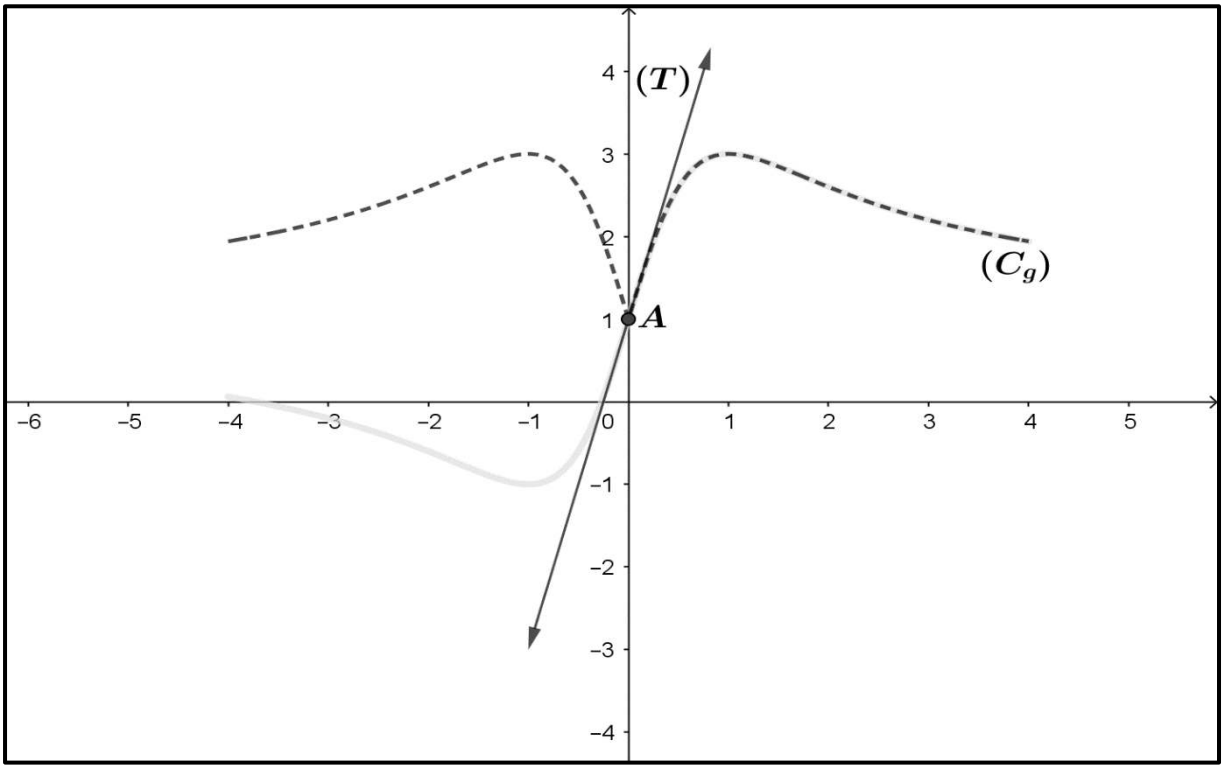
إذن الدالة g دالة زوجية.

يمكن كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة على الشكل الآتي:

$$g(x)=\begin{cases} f(-x); x\in[-4;0[\\ f(x)\ ;\ x\in[0;4[\end{cases}$$

2. نرسم (c_g) إعتمادا على شرح كيفية رسمه:

(c_g) ينطبق على (c_f) في المجال $[0;4]$. بما أن الدالة g دالة زوجية المنحنى (c_g) سيكون متناظر بالنسبة (yy') على المجال $[-4;4]$.



➢ نعتبر الدالة h معرفة على $[-2;2]$ كمايلي: $h(x)=f(x^2)$

الدالة h هي عبارة على الدالة مربع u متبوعة بالدالة f حيث: $h(x)=f(u(x))$

1. لنبين أن من أجل كل x من $[-2;2]$: $h'(x)=2xf'(x^2)$

h دالة قابلة للإشتقاق على $[-2;2]$: $h'(x)=f'(u(x))\times u'(x)$

$h'(x)=f'(x^2)\times 2x=\ 2xf'(x^2)$

إعداد الأستاذ

ريمي

2. ندرس إشارة $h'(x)$ على $[-2;2]$، ونشكل جدول تغيرات الدالة h.

إعداد الأستاذ
ريمي

لدراسة إشارة $h'(x)$ ندرس إشارة $2x$ و$f'(x^2)$ على $[-2;2]$:

$2x \geq 0$ على المجال $[0;2]$ و $2x \leq 0$ على المجال $[-2;0]$.

لتحديد إشارة $f'(x^2)$ نعتمد على إشارة $f'(x)$:

لدينا $f'(x)=0$ لما $x=-1$ أو $x=1$ إذن $f'(x^2)=0$ لما $x^2=-1$ (مرفوض) أو $x^2=1$

ومنه $f'(x^2)=0$ لما $x=-1$ أو $x=1$

لدينا $f'(x)\leq 0$ لما $x\leq -1$ أو$x\geq 1$ إذن $f'(x^2)\leq 0$ لما $x^2\leq -1$ (مرفوض) أو $x^2\geq 1$.

حل في المجال$[-2;2]$ المتراجحة $x^2\geq 1$ أي $x^2-1\geq 0$:

x	-2		-1		1		2
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

حل المتراجحة أ $x^2-1\geq 0$ هي $[1;2]$ و$[-2;-1]$ إذن نستنتج حل المتراجحة $f'(x^2)\leq 0$ هو $[1;2]$ و$[-2;-1]$ وكذلك $f'(x^2)\geq 0$ على المجال $[-1;1]$.

جدول إشارة $h'(x)$:

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x^2)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه نستنتج أن الدالة h متزايدة تماما على المجالين $[0;1]$ و$[-2;-1]$ و متناقصة تماما على المجالين $[1;2]$ و$[-1;0]$.