مجلة كثيرات الحدود

2 ثـ

ثانوي جميع الشعب العلمية

- تقني رياضي
- رياضيات
- علوم تجريبية

ملخص الدروس
تطبيقات و تمارين مع الحل المفصل

من اعداد الأستاذ : وليد لعويجي

قواعد الحساب

الجداءات (المتطابقات) الشهيرة:

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

حل معادلات من الدرجة الثانية:

✍ نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

✍ يسمى العدد $\Delta = b^2-4ac$ مميز ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

إذا كان	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
حلول المعادلة:	$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	لاتقبل حلولا في $\mathbb{R}$
التحليل:	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_1)^2$	لايمكن التحليل
الإشارة:	$-\infty$ إشارة a x_1 0 إشارة (-a) x_2 0 إشارة a $+\infty$	$-\infty$ إشارة a x_0 0 إشارة a $+\infty$	$-\infty$ إشارة a $+\infty$

خواص القيمة المطلقة:

✍ إذا كان x و y عددان حقيقيان فإن:

$\lvert x\rvert \geq 0$	$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
$\lvert x\times y\rvert = \lvert x\rvert \times \lvert y\rvert$	$\left\lvert \dfrac{x}{y}\right\rvert = \dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ مع $y\neq 0$	$\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & ;x\geq 0 \\ -x & ;x<0 \end{cases}$	$\lvert x+a\rvert = \begin{cases} x+a & ;x\geq -a \\ -x-a & ;x\leq -a \end{cases}$	$\lvert x-a\rvert = \begin{cases} x-a & ;x\geq a \\ -x+a & ;x<a \end{cases}$
إذا كان $\lvert x\rvert \leq a$ فإن: $-a\leq x\leq a$	إذا كان $\lvert x\rvert \geq a$ فإن: $x\geq a$ أو $x\leq -a$	$\lvert A(x)\rvert = \begin{cases} A(x) & ;A(x)\geq 0 \\ -A(x) & ;A(x)<0 \end{cases}$

خواص الحصر:

✍ لتكن a، b، c وd أعداد حقيقية موجبة تماما. نضع $a\leq x\leq b$ و $c\leq y\leq d$.

جمع	طرح	ضرب	قسمة
$a+c\leq x+y\leq b+d$	$a-d\leq x-y\leq b-c$	$a\times c\leq x\times y\leq b\times d$	$\dfrac{a}{d}\leq \dfrac{x}{y}\leq \dfrac{b}{c}$

ملاحظة : يجب التمييز بين الكسور الرئيسية و الكسور الفرعية $\dfrac{\frac{A(x)}{B(x)}}{C(x)} = \dfrac{A(x)}{B(x)C(x)}$ و $\dfrac{A(x)}{\frac{B(x)}{C(x)}} = \dfrac{A(x)C(x)}{B(x)}$

الدالة كثير حدود

نسمي دالة كثير حدود كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة.
✔ يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير حدود f،
وتسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته، ويسمى a_px^p الحد الذي درجته p.

✍ مثال :

- كل دالة ثابتة : $x\mapsto a_0\,(a_0\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 0
- كل دالة تآلفية : $x\mapsto ax+b\,(a\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 1
- كل دالة $x\mapsto ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية).

العمليات على كثيرات الحدود

- مجموع فرق وجداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته مجموع درجتيهما.

تساوي كثيري حدود:

✍ يكون كثير حدود معدوما إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة
✍ يكون كثيرا حدود، غير معدومين متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.
مثال: إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3+bx^2+cx+d=2x^3-x+3$ فإن $a=2$ ، $b=0$ ، $c=-1$ ، $d=3$.

جذر كثير حدود

f كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و α عدد حقيقي، α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha)=0$.

إشارة ثلاثي الحدود:

الحالة ❶: $\Delta>0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$، $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ بفرض $x_1<x_2$ نحصل على الجدول التالي:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
إشارة $x-x_1$		−	0	+		+	
إشارة $x-x_2$		−		−	0	+	
إشارة ax^2+bx+c		إشارة a	0	إشارة (-a)	0	إشارة a	

الحالة ❷: $\Delta=0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ حيث $x_1=\dfrac{-b}{2a}$، ومنه إشارة ax^2+bx+c من إشارة a ، ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		إشارة a	0	إشارة a	

الحالة ❸: $\Delta<0$

إشارة ax^2+bx+c يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$+\infty$

طرق تحليل كثيري حدود:

1- طريقة هورنر :

	x^3	$-x^2$	$-4x$	$+4$
	1	−1	−4	4
1	0	1	0	−4
×	1	0	−4	0

لدينا: $f(1)=0$

إذن حسب طريقة هورنر

$f(x)=x^3-x^2-4x+4$

$=(x-1)(x^2-4)$

2- طريقة القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4x+4 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2-4 \\ \hline -4x+4 & \\ 4x-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3- طريقة التحليل

$f(x)=x^3-x^2-4x+4$

$=x^2(x-1)-4(x-1)$

$=(x-1)(x^2-4)$

$=(x-1)(x+2)(x-2)$

4- طريقة المطابقة

نبين أن 1 جذر لـ f ثم نطابق بالمعاملات :

$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(c-a)x^2+(c-b)x-c$

بالمطابقة نجد : $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-4$.

ومنه : $f(x)=(x-1)(x^2-4)$

$=(x-1)(x+2)(x-2)$

حلول معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ، $ax^3+bx^2+cx+d\geq 0$:

لحل معادلات و متراجحات من الشكل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ، $ax^3+bx^2+cx+d\geq 0$ نقوم بتحليل العبارة بإحدى طرائق السابقة (مع جذر معلوم) ثم نحل المعادلة أو المتراجحة.

مثال : لدينا : $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$.

1 حساب $P(-2)$:

$P(-2)=2(-2)^3-(-2)^2-13(-2)-6$

$=2\times(-8)-4+26-6=-16-4-6+26=0$

ومنه $P(-2)=0$

2 أ) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $P(x)=(x+2)Q(x)$ بما أنّ $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و -2 جذر له فإنه يكتب على الشكل : $P(x)=(x+2)Q(x)$

تعيين $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-13x-6 & x+2 \\ \hline -2x^3-4x^2 & 2x^2-5x-3 \\ \hline -5x^2-13x & \\ 5x^2+10x & \\ \hline -3x-6 & \\ 3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه : $Q(x)=2x^2-5x-3$

ب) استنتاج تحليل لـ $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى:

لدينا $P(x)=(x+2)Q(x)$ نحل المعادلة $Q(x)=0$:

$Q(x)=2x^2-5x-3$

$\Delta=(-5)^2-4\times 2\times(-3)$

$=25+25=49>0$

$5-7$ 1 $5+7$

3 حل المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in [-2; \frac{-1}{2}] \cup [3; +\infty[$.

المعادلات مضاعفة التربيع

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

حل هذه المعادلة يؤول إلى حل الجملة : $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c \end{cases}$ **يسمى X مجهولا مساعدا.**

بعد حل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ نستنتج حلول المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0 \ldots (1)$

نضع $X = x^2$ ، $X > 0$ و منه المعادلة (1) تكافئ : $2X^2 + 5X + 2 = 0 \ldots (2)$

حل المعادلة (2) حساب Δ : $\Delta = 9$ ومنه $\Delta > 0$ أي المعادلة تقبل حلين : $X_1 = -\frac{1}{2} < 0$ (مرفوض) ، $X_2 = -2 < 0$ (مرفوض)

الخلاصة : إذن المعادلة (2) ليس لها حلول و بالتالي المعادلة (1) ليس لها حلول أيضا.

تطبيق :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية :

① $x^4 + x^2 - 6 = 0$ ② $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

المتراجحات مضاعفة التربيع

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل:

$ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ أو $ax^4 + bx^2 + c > 0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

يؤول إلى حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة : $ax^4 + bx^2 + c$

مثال :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$

① نضع : $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12 \ldots (1)$

نضع كذلك : $X = x^2$ ، $X \geq 0$ و منه المعادلة (1) تكافئ : $X^2 - 7X + 12 = 0 \ldots (2)$

حل المعادلة (2) حساب Δ : $\Delta = 1$ ومنه $\Delta > 0$ أي المعادلة تقبل حلين : $X_1 = \frac{7+1}{2} = 4 \geq 0$ ، $X_2 = \frac{7-1}{2} = 3 \geq 0$

ومنه 3 و 4 حلان للمعادلة (2) .

-استنتاج حلول المعادلة (1):

طريقة 1 : $x^2 = X$ يكافئ $|x| = \sqrt{X}$ ومنه:

لدينا: $X_1 = 4$ إذن $|x| = \sqrt{X_1} = 2$ وعليه $x_1 = 2$ أو $x_2 = -2$.

لدينا: $X_2 = 3$ إذن $|x| = \sqrt{X_2} = \sqrt{3}$ وعليه $x_2 = \sqrt{3}$ أو $x_2 = -\sqrt{3}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 7x^2 + 12 \\ &= X^2 - 7X + 12 \\ &= 1(X-3)(X-4) \qquad \text{نستعمل التحليل} \\ &= (x^2-3)(x^2-4) \qquad X = x^2 \end{aligned}$$

$(x^2-3)(x^2-4) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ أي $x^2 = 3$ وعليه $x_1 = \sqrt{3}$ أو $x_2 = -\sqrt{3}$. أو $x^2 - 4 = 0$ وعليه $x_3 = 2$ أو $x_4 = -2$.

② دراسة إشارة $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 7x^2 + 12 \\ &= X^2 - 7X + 12 \\ &= (X-3)(X-4) \\ &= (x^2-3)(x^2-4) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x^2-3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي : $S =]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};2[$.

حل معادلات عن طريق الإستنتاج :

لدينا مما سبق حلول المعادلة : $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$ هي : 2 ، 3 و $-\frac{1}{2}$

✍ لحول المعادلة : $2x^6 - x^4 - 13x^2 - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = x$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 2 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2} \\ X = 3 \Longrightarrow x^2 = 3 \Longrightarrow x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض} \end{cases}$$

✍ لحول المعادلة : $2x\sqrt{x} - x - 13\sqrt{x} - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = \sqrt{x}$ بحيث $x \geq 0$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 1 \Longrightarrow \sqrt{x} = 2 \Longrightarrow x = 4 \\ X = 3 \Longrightarrow \sqrt{x} = 3 \Longrightarrow x = 9 \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض} \end{cases}$$

✍ لحول المعادلة : $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{13}{x} - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = \frac{1}{x}$ بحيث $x \neq 0$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 2 \Longrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \\ X = 3 \Longrightarrow \frac{1}{x} = 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -2 \end{cases}$$

✍ بعبارة أخرى لحلول معادلة من الشكل : $3f(x)^3 - f(x)^2 - 13f(x) - 6 = 0 \cdots (1)$ نقوم بوضع : $X = f(x)$ حيث $x \in D_f$

إذن (1) تكافئ $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0 \cdots (2)$ ولدينا مماسبق

$$\begin{cases} X = 2 \Longrightarrow f(x) = 2 \Longrightarrow \cdots \\ X = 3 \Longrightarrow f(x) = 3 \Longrightarrow \cdots \\ X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \cdots \end{cases}$$

حلول معادلات و متراجحات الصماء :

المعادلات الصماء :

لحل معادلة من الشكل $\sqrt{A(x)} = B(x) \ldots\ldots (*)$ نتبع الخطوات التالية : حيث $A(x)$ و $B(x)$ كثيري حدود

❶ نعين D مجموعة تعريف المعادلة $(*)$. (مجموعة تعريف $A(x)$)

❷ من أجل كل x من D : $(*)$ تكافئ $\begin{cases} A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$

من أجل كل x من D : $(*)$ تكافئ $\begin{cases} x+2=(x+1)^2 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x+2=x^2+1+2x \\ x\geq -1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x^2+x-1=0 \\ x\geq -1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1.61, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.61 \\ x\geq -1 \end{cases}$

إذن حلول المعادلة $(*)$ هي $S=\{x_2\approx 0.61\}$ ، x_1 مرفوض لأن: $x_1<-1$.

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الصماء التالية :

1. $\sqrt{x^2-2x}=x+1$
2. $\sqrt{2x-3}=2x+1$
3. $\sqrt{x^2+1}=x^2$
4. $\sqrt{x^2-2x+3}=3x+2$

المتراجحات الصماء :

الحالة : $\sqrt{u(x)}\leq\sqrt{v(x)}\cdots(1)$

1. نضع : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ و $g(x)=\sqrt{v(x)}$ ونحدد كل من D_f و D_g بحيث : $D_f=\{x;u(x)\geq 0\}$ و $D_g=\{x;v(x)\geq 0\}$
2. تكون المتراجحة (1) معرفة على مجال D حيث : $D=D_f\cap D_g$
3. بما أن $f(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة (موجبان معا) نربع طرفي المتراجحة (1)
4. من أجل كل x من D نحدد إشارة الفرق $u(x)-v(x)$ ونستنتج حلول المتراجحة (1)

مثال :

لحل المتراجحة : $\sqrt{2x-5}\geq\sqrt{x+3}$

نضع: $f(x)=\sqrt{x+3}$ أي: $D_f=]-3;+\infty[$ و $g(x)=\sqrt{2x-5}$ أي: $D_g=\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ وعليه $D=D_f\cap D_g=\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

من أجل كل x من D نربع الطرفين نجد : $2x-5\geq x+3$ أي $x\geq 8$

ومنه حلول المتراجحة هي : $S=[8;+\infty[$

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات الصماء التالية :

1. $\sqrt{x^2-2x}>\sqrt{2x+1}$
2. $\sqrt{2x-3}<\sqrt{x^2+3x}$
3. $\sqrt{x^2+1}\geq\sqrt{4x+2}$
4. $\sqrt{x^2-2x+3}\leq\sqrt{1+x}$

بعض طرق التي يمكن حل بها المتراجحة الصماء :

1. نربع الطرفين و ندرس إشارة الفرق $u(x)^2-v(x)^2$
2. إستعمال المرافق
3. إستعمال البرهان بالخلف

مثال الضرب في المرافق :

حل المتراجحة : $\sqrt{x^2+5}\geq 2x\cdots(**)$

نضع: $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

من أجل كل

$$\sqrt{4x^2+5}-2x=\frac{(\sqrt{4x^2+5}+5)(\sqrt{4x^2+5}+2x)}{\sqrt{4x^2+5}}=\frac{(\sqrt{4x^2+5})^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+5}}=\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}}>0$$

ومنه : $S_2=[0;+\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (**) هي : $S=S_1\cup S_2=\mathbb{R}$

مثال البرهان بالخلف

✍ من أجل كل x من $[0;+\infty[$ نفرض أن : $\sqrt{4x^2+5}<2x$

✍ نربع الطرفين $(\sqrt{4x^2+5})^2<(2x)^2$ أي $4x^2+5<4x^2$ نجد $5<0$ و هذا تناقض مع الفرض ومنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن: $\sqrt{4x^2+5}\le 2x$. إذن: $S_1=[0;+\infty[$ ومن أجل x من $]-\infty,0[$ فإن: $2x<0$ فالمتراجحة محققة دوما و منه $S_2=]-\infty;0]$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (**) هي : $S=S_1\cup S_2=\mathbb{R}$

ملاحظة :

✍ في حالة المتراجحة $\sqrt{u(x)}\le v(x)$ تبقى نفس الخطوات السابقة صحيحة ماعدا في حالة $v(x)<0$ فإن المتراجحة لا تقبل حلول لأن: $\sqrt{u(x)}$ عدد موجب دوما .

مجموع وجداء حلي معادلة

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) ax^2+bx+c مع $(a\neq 0)$

نعلم أنه إذا كان $\Delta\ge 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين هما x_1 وx_2 حيث

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad و \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا وضعنا $S=x_1+x_2$ و $P=x_1\times x_2$ حيث S هو مجموع الحلين وP هو جداؤهما فإن

$$S=-\frac{b}{a} \text{ و } P=\frac{c}{a}$$

حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخروذلك باستعمال المجموع S والجداء P

تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما

يكون مجموع عددين هوS وجداؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x والتي تكتب بالشكل التالي x^2-Sx+p

تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) ax^2+bx+c مع $(a\neq 0)$

- ❖ إذا كان $\frac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
- ❖ إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
- ❖ إذا كان $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$ و $-\frac{b}{a}<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

مثال تطبيقي :

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$$

الحل

لدينا : $p=\frac{m}{m-1}$ و $S=\frac{-2(m+1)}{m+1}$

- ❖ إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى $4x+1=0$ و منه $x=-\frac{1}{4}$.
- ❖ إذا كان $m\neq 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الثانية حيث: $\Delta_m=4(3m+1)$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
m		$-$	0	$+$		$+$	
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$		$-$		$+$	

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2m-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
S		$-$		$+$		$-$	

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
Δ_m		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
S_m		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$-$	
P_m		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$+$	
النتائج	المعادلة لا تقبل حلول				0	المعادلة تقبل حلين موجبين تماما	0	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة		المعادلة تقبل حلين سالبين تماما	

الأستاذ وليد لعويجي

التمرين رقم (1): ليكن P كثير حدود حيث $P(x)=-4x^3+3x^2+4x-3$.

1 تحقق أن $\alpha=1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$.

2 عين كثير الحدود $q(x)$ حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $P(x)=(x-1)q(x)$.

3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

4 شكل جدول إشارة $P(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $-4x^2+3x+4\leq\frac{3}{x}$.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (2): نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m

$$(m^2-4)x^2-2mx+m^2-2m+1=0$$

1 عين قيم العدد الحقيقي m حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية.

2 عين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E) ثم استنتج الحل الآخر لها.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (3): نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x)=x^3-3x^2-x+3$.

1 أثبت أن (-1) هو جذر لـ $P(x)$.

2 أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $f(x)=(x+1)Q(x)$.

3 أُدرس حسب قيم x إشارة $P(x)$ ، ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x)>0$.

الحل موجود في الصفحة 15

التمرين رقم (4): f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-2x^2+\alpha x+\beta$ ، حيث α و β عددان حقيقيان.

1 عين العددين α و β حتى يكون (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0)=2$.

2 نعتبر فيما يلي : $\alpha=-1$ و $\beta=2$:

ا) أوجد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x)=(x+1)g(x)$.

ب) حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x)=0$ و $f(x)>0$.

ود في الصفحة 16

التمرين رقم (5): نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x)=x^2-mx+1$ حيث m وسيط حقيقي ، وليكن (C_m) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.

2 عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

3 عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.

4 عيّن قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2,-3)$.

الحل موجود في الصفحة 17

التمرين رقم (6): نعتبر المعادلة : $x^4+2x^3-x-6=0\cdots(1)$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

① $x^2+x-3=0$ ② $x^2+x+2=0$ ④ $x^2+3x-4=0$

2) أثبت أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة $(x^2+x-2)^2+3(x^2+x-2)-4=0\cdots(2)$

3) إستنتج حلول المعادلة (2)

4) حل المتراجحة $\frac{x^4+2x^3-x-6}{x}\le 0$

الحل موجود في الصفحة 18

الأستاذ وليد لعويجي

تمرين 1 :

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x: $(E)\cdots x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2=0$

1 أثبت أنّ المميز: $\Delta=(3-\sqrt{3})^2$، ثم استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين: α و β (حسابهما غير مطلوب).

2 أحسب $\alpha^2+\beta^2$ دون حساب α و β.

3 (ا) تحقق من أنّ $\alpha=2$ هو حل للمعادلة (E) ثم استنتج قيمة β الحل الآخر للمعادلة (E).

(ب) حلل ثلاثي الحدود $P(x)$ حيث : $P(x)=x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2$، ثم ادرس اشارته.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2<0$

(د) حل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهولين a و b : $\begin{cases}a+b=\sqrt{3}+1\\ab=2\sqrt{3}-2\end{cases}$

تمرين 2 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

1 احسب $f(3)$ ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$ إلى جداء عاملين.

2 حل في $\mathbb{R}$ ما يلي: $f(x)=0$; $f(x)<0$

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\dfrac{2x^4-10x^2+8}{x^2+x-2}\geq 0$.

تمرين 3 :

ليكن $f_m(x)$ كثير حدود لمتغير x حيث : $f_m(x)=(m-2)x^2-(m+1)x+m-2$

1 أحسب $f_0(0)$ و $f_2(-1)$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $f_1(x)=0$ و $f_2(x)=0$.

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: $f_1(x)\geq 0$ و $f_2(x)\leq 0$.

4 عين قيم m حتى يكون $x_1=1$ حل للمعادلة $f_m(x)=0$.

5 عين قيم m في كل حالة من الحالات التالية:

(ا) $f_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

(ب) المعادلة $f_m(x)=0$ لاتقبل حلول.

(ج) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حل مضاعف .

(د) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين متمايزين .

(ه) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حل وحيد.

(و) المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

تمرين 4 :

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x: $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0....(1)$

1 بين أن 0 ليس حلا للمعادلة (1).

2 بين أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل:

$=0....(2)$

الأستاذ وليد لعويجي

4 بين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل $6u^2-5u-50=0$....(3)

5 حل المعادلة (3) ثم استنتج حلول المعادلة (1).

تمرين 5 :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ كثير الحدود $P(x)$ المعرف بـ: $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$.

1 أحسب $P(1)$، ماذا نستنتج

2 أوجد كثير الحدود $Q(x)$ حيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $P(x)=(x-1)Q(x)$

3 حلل كثير الحدود $P(x)$ إلى جداء عوامل. ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

4 استنتج حلول المعادلة: $|x-1|^3-4(x-1)^2+5|x-1|-2=0$.

5 نضع : $g(x)=\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+x-2}$.

(أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+x-2=0$

(ب) عين قيم العدد الحقيقي x بحيث يكون للعبارة $g(x)$ معنى.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $g(x)\le 0$.

تمرين 6 :

$P(x)$ كثير حدود و α عدد حقيقي حيث : $P(x)=x^3-(6+\alpha)x^2+(13-\alpha)x-(\alpha-14)$.

I) عين العدد α حتى يكون 3 جذر لكثير الحدود $P(x)$

II) نضع $\alpha=2$ أي : $P(x)=x^3-8x^2+11x+12$.

1 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث : $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

3 استنتج حلول المعادلة : $x\sqrt{x}-8x+11\sqrt{x}+12=0$.

4 استنتج حلول المعادلة : $\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^3-8\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+11\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+12=0$.

5 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)\le 0$ ثم استنتج إشارة $P\left(\dfrac{2021}{2022}\right)$

تمرين 7 :

نعتبر كثير الحدود $P_m(x)$ حيث: $P_m(x)=(m^2-4)x^4+(m+1)x^3-(2+m)x^2-\dfrac{5}{2}mx+2$.

1 عين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة .

2 تحقق أن 2 جذر لكثير الحدود $P_2(x)$

3 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث : $P_2(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $3x^2+2x-1=0$

استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $P_2(x)=0$

5 أدرس إشارة $P_2(x)$ ثم استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة : $3x^3+2\le 4x^2+5x$

الأستاذ وليد لعويجي

تمرين 01 :

1 حلل العبارة: $(x+3)(x+2)+(x+3)(x+1)$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(x+3)(x+1)=0$

3 أُدرس إشارة العبارة: $(x+3)(x+1)$

x	$-\infty$ . . $+\infty$
$x+3$	
$x+1$	
$(x+3)(x+1)$	

تمرين 02 :

1 حلل العبارة : x^2-4.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2-4=0$

3 أُدرس إشارة العبارة: x^2-4

x	$-\infty$ . . $+\infty$
x^2-4	

تمرين 03 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $4x^2-12x+9=0$

2 حلل العبارة $4x^2-12x+9$.

3 أُدرس إشارة العبارة: $4x^2-12x+9$

x	$-\infty$ . . $+\infty$
$4x^2-12x+9$	

تمرين 04 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^2-5x-3=0$

2 حلل العبارة $2x^2-5x-3$.

3 أُدرس إشارة العبارة: $2x^2-5x-3$

x	$-\infty$ . . $+\infty$
$2x^2-5x-3$	

الأستاذ وليد لعويجي

تمرين 05 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{x-5}{(x+1)(x-1)} > 0$

2 إشارة العبارة: $\frac{x-5}{(x+1)(x-1)}$

x	$-\infty$ . . . $+\infty$
.	
.	
.	
.	

ومنه حلول المتراجحة:

تمرين 06 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{6x^2-x-2}{x+2} \geq 0$

x	$-\infty$ . . . $+\infty$
.	
.	
.	
.	

ومنه حلول المتراجحة:

تمرين 07 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(4x^2-4x-3)(x+3) < 0$

x	$-\infty$ . . . $+\infty$
.	
.	
.	

ومنه حلول المتراجحة:

تمرين 08 :

1 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $4x^4-4x^2-3 < 0$

x	$-\infty$ . . . $+\infty$
.	
.	
.	

ومنه حلول المتراجحة:

الأستاذ وليد لعرابي

حل التمرين رقم (1) الموجود في الصفحة 9:

1 التحقق أن $\alpha = 1$ جذر لكثير الحدود $P(x)$

$P(1) = -4(1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) - 3 = -4 + 3 + 4 - 3 = 0$ ومنه: $\boxed{P(1) = 0}$

2 تعيين كثير الحدود $q(x)$

لدينا $P(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = -4 \\ b - a = 3 \\ c - b = 4 \\ -c = -3 \end{cases}$

إذن : $\boxed{a = -4}$ و $\boxed{b = -1}$ و $\boxed{c = 3}$

وبالتالي $\boxed{P(x) = (x-1)(-4x^2 - x + 3)}$.

3 حل المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$P(x) = 0$ معناه $(x-1)(-4x^2 - x + 3) = 0$ يكافئ $\begin{cases} x - 1 = 0 \quad (1) \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$

يكافئ

$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$

4 حل المعادلة (2) :

لدينا : $\Delta = 49 > 0$ ومنه للمعادلة (2) حلين هما : $\boxed{x_2 = -1}$ و $\boxed{x_3 = \frac{3}{4}}$

ومنه حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي $\boxed{x_2 = 1}$ و $\boxed{x_2 = -1}$ و $\boxed{x_3 = \frac{3}{4}}$

حل التمرين رقم (2) الموجود في الصفحة 9:

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x والوسيط m : $(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$

✍ حتى تكون المعالة (E) من الدرجة الثانية، يجب أن يكون $m^2 - 4 \neq 0$

معناه $m^2 \neq 4$ يكافئ $m \neq 2$ أو $m \neq -2$ إذن $\boxed{m \in]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[}$

② تعيين قيمة m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E):

لدينا $(m^2 - 4)(0)^2 - 2m \times (0) + m^2 - 2m + 1 = 0$ يكافئ $m^2 - 2m + 1 = 0$

يكافئ $(m-1)^2 = 0$ إذن للمعادلة $m^2 - 2m + 1 = 0$ حل مضاعف هو $\boxed{m = 1}$

تعين الحل الآخر للمعادلة (E) من أجل $m = 1$ =

من أجل $m = 1$ في المعادلة (E) لدينا : $-3x^2 - 2x = 0$ معناه : $x(-3x - 2) = 0$

يكافئ : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ -3x - 2 = 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

حل التمرين

1 إثبات أن (-1) جذر لـ $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3 \\ &= -1 - 3 + 1 + 3 = 0 \end{aligned}$$

2 تعيين كثير الحدود $Q(x)$ حيث : $P(x) = (x+1)Q(x)$:
باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 - 3x^2 & -x+3 & & x+1 \\ \hline -x^3 & -x^2 & & x^2 - 4x + 3 \\ \hline & -4x^2 & -x & \\ & 4x^2 & +4x & \\ \hline & & 3x+3 & \\ & & -3x-3 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

ومنه $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

3 دراسة إشارة $P(x)$ حسب قيم x :

$P(x) = 0$ معناه $(x+1)Q(x) = 0$ أي $x+1=0$ (نعلم أن (-1) جذر لـ $P(x)$) ، و $Q(x) = 0$: $Q(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$
باستعمال المميز Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 3 \\ &= 16 - 12 = 4 > 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

ومنه :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- استنتاج مجموعة التعريف D_k للدالة k المعرفة بـ: $k(x) = \sqrt{P(x)}$:

يكافئ $P(x) \geq 0$ ومن جدول الاشارة السابق نجد : $x \in [-1;1] \cup [3;+\infty[$.

حل التمرين رقم (4) الموجود في الصفحة 9:

1 **تعيين العددين α و β حتى يكون** (-1) جذرا لكثير الحدود $f(x)$ و $f(0) = 2$:

(-1) جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + \alpha(-1) + \beta \\ &= -1 - 2 - \alpha + \beta \\ &= -3 - \alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

لدينا $f(0)=2$ معناه : $f(0)=0^3-2\times0^2+\alpha\times0+\beta=2$ ومنه (2) $\beta=2$

بتعويض (2) في (1) نجد $\alpha=\beta-3$ أي $\alpha=2-3$

ومنه $\alpha=-1$ وبالتالي : $f(x)=x^3-2x^2-x+2$.

2 نعتبر فيما يلي : $\alpha=-1$ و $\beta=2$:

ا) **ايجاد كثير حدود $g(x)$ حيث : $f(x)=(x+1)g(x)$:**

$f(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و (-1) جذر له ، إذن يقبل تفكيكًا من الشكل : $f(x)=(x+1)g(x)$.
بإجراء القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-x+2 & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2-3x+2 \\ \hline -3x^2-x & \\ 3x^2+3x & \\ \hline 2x+2 & \\ -2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه : $f(x)=(x+1)(x^2-3x+2)$

ب) **نحل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $f(x)=0$ و $f(x)>0$**

$f(x)=0$ معناه $(x+1)g(x)=0$ أي $x+1=0$ (نعلم أن (-1) جذر لـ $f(x)$) ، و $g(x)=0$:

$g(x)=x^2-3x+2=0$ باستعمال المميز Δ :

$$\Delta=(-3)^2-4\times2$$
$$=9-8=1>0$$

$$x_1=\frac{3-1}{2}=1$$
$$x_2=\frac{3+1}{2}=2$$

إذن : $S_{f(x)}=\{-1;1;2\}$

حل المتراجحة $f(x)>0$ في $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة $f(x)>0$ في $\mathbb{R}$ هي $x\in]-1;1[\cup]2;+\infty[$

حل التمرين رقم (5) الموجود في الصفحة 10 :

1 تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل.

لدينا : $f_2(x)=x^2-2x+1$ فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_2) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة $f_2(x)=0$ ومنه : $x^2-2x+1=0$ يكافئ $(x-1)^2=0$ أي $x=1$ وبالتالي: $(C_2)\cap(xx')=\{(1,0)\}$.

2 تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متمايزتين.

معناه أن

نحل المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$.
$\Delta_m = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$.

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	

المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ تقبل حلّين متمايزين لمّا $\Delta_m > 0$ أي: $m \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

3 تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) لا يقطع حامل محور الفواصل.

معناه أن المعادلة : $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ يكافئ $\Delta_m < 0$ أي $m \in]-2,2[$.

4 تعيين قيم m بحيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة $A(2,-3)$.

$A(2,-3) \in (C_m)$ يكافئ $f_m(2) = -3$ ومنه $4 - 2m + 1 = -3$ أي $m = 4$.

حل التمرين رقم (6) الموجود في الصفحة 10:

$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \cdots (1)$

1 **حل المعادلات :**

$x^2 + x - 3 = 0$

حساب Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (1)^2 - 4(1)(-3)$
$\Delta = 13$

$\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان هما

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

$x^2 + x + 2 = 0$

حساب Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (1)^2 - 4(1)(2)$
$\Delta = -7$

$\Delta < 0$ إذاالمعادلة ليس لها حل

$x^2 + 3x - 4 = 0$

حساب Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (3)^2 - 4(1)(-4)$
$\Delta = 25$

$\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان هما

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{-3 - \sqrt{25}}{2}$
$x_1 = -4$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{-1 + \sqrt{25}}{2}$
$x_2 = 1$

2 **إثبات أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1):**

$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \cdots (2)$

$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$
$((x^2 + x) - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$
$((x^2 + x)^2 + (2)^2 - 2(x^2 + x)(2) + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$
$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$

3 إستنتاج حلول المعادلة (2):

بوضع $X = x^2 + x - 2$ المعادلة (2) تكافئ المعادلة : $x^2 + 3x - 4 = 0$ و عليه :

لما $X = -4$ نجد $x^2 + x - 2 = -4$ أي $x^2 + x + 2 = 0$ و من السؤال 1 نجد أن المعادلة لا تقبل حل.

لما $X = 1$ نجد $x^2 + x - 2 = 1$ أي $x^2 + x - 3 = 0$ و من السؤال 1 نجد حلول المعادلة هما :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

ومنه : $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

4 حل المتراجحة :

بما أن $x^4 + 2x^3 - x - 6 = (x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4$ نجد أن

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - x - 6 &= (x^2 + x - 2 + 4)(x^2 + x - 2 - 1) \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$x^2 + x + 2$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2 + x - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^4 + 2x^3 - x - 6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة هي : $x \in \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]0; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$

حل التمرين رقم (01):

$(E): x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2=0$

① إثبات أنّ المميز هو: $\Delta=(3-\sqrt{3})^2$

- لدينا: $a=1$ ، $b=-(\sqrt{3}+1)$

$c=2\sqrt{3}-2$

$\Delta=(-(\sqrt{3}+1))^2-4\times1\times(2\sqrt{3}-2)$

$=3+1+2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+8$

$=12-6\sqrt{3}$

من جهة أخرى:

$(3-\sqrt{3})^2=9+3-6\sqrt{3}$

$=12-6\sqrt{3}$

إذن: مميز المعادلة (E) هو:

$\Delta=(3-\sqrt{3})^2$

- استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلّين متمايزين α و β:

لدينا $\Delta=(3-\sqrt{3})^2>0$ فإنّ المعادلة (E) تقبل حلّين متمايزين

② حساب $\alpha^2+\beta^2$:

نعلم أنّ: $x^2-Sx+P=0$

حيث $\begin{cases}S=\alpha+\beta\\P=\alpha\cdot\beta\end{cases}$ و

ومنه $\begin{cases}S^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\\2P=2\alpha\cdot\beta\end{cases}$

بالطرح: $S^2-2P=\alpha^2+\beta^2$

لدينا: $S=(\sqrt{3}+1)$

و $P=2\sqrt{3}-2$

$\alpha^2+\beta^2=(\sqrt{3}+1)^2-2(2\sqrt{3}-2)$

$\alpha^2+\beta^2=4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+4$

ومنه $\alpha^2+\beta^2=8-2\sqrt{3}$

③ أ) التحقق أنّ $\alpha=2$ هو حل للمعادلة (E):

$2^2-(\sqrt{3}+1)2+2\sqrt{3}-2$

$=4-2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}-2$

$=4-4=0$

ومنه $\alpha=2$ حل للمعادلة (E).

- استنتاج قيمة β:

لدينا: $P=\alpha\cdot\beta$

ومنه: $\beta=\dfrac{P}{\alpha}=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{2}$

إذن: $\boxed{\beta=\sqrt{3}-1}$

ب) تحليل $P(x)$:

لدينا: $P(x)=x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2$

ومنه $P(x)=1(x-\alpha)(x-\beta)$

إذن: $P(x)=(x-2)(x+1-\sqrt{3})$

- دراسة إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$x^2-(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}-2<0$

بكافئ: $P(x)<0$

ومنه: $x\in]\sqrt{3}-1\,;2[$

③ ⓒ نحل في $\mathbb{R}$ الجملة ذات المجهولين a و b:

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{3}+1 \\ a\cdot b=2\sqrt{3}-2 \end{cases}$$

تكافئ

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{3}+1=S=\alpha+\beta \\ a\cdot b=2\sqrt{3}-2=P=\alpha\cdot\beta \end{cases}$$

إذن: $a=\alpha=2$

$b=\beta=\sqrt{3}-1$

حل التمرين رقم (02):

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$

① حساب $f(3)$:

$f(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6$

$=27-18-15+6=\boxed{0}$

ومنه $\alpha=3$ حل المعادلة: $f(x)=0$

- تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:

$f(x)=(x-3)\,g(x)$

- نعيّن $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 & x^2+x-2 \\ \hline x^2-5x & \\ -x^2+3x & \\ \hline -2x+6 & \\ 2x-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه: $f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$

② نحلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ يكافئ: $(x-3)(x^2+x-2)=0$

أي: $x=3$ أو $x^2+x-2=0$

$x^2+x-2=0$ معناه: $\Delta=9>0$

للمعادلة حلّين: $\boxed{x_1=1}$, $\boxed{x_2=-2}$

ومنه $S=\{-2;1,3\}$

- حلّ المتراجحة $f(x)<0$:

- جدول إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)<0$ لمّا: $x\in]-\infty,-2[\cup]1,3[$

③ حل المتراجحة: $\dfrac{2x^4-10x^2+8}{x^2+x-2}\geq0$

مع: $x^2+x-2\neq0$.

- نحل المعادلة: $2x^4-10x^2+8=0$ ...(E)

يكافئ $x^4-5x^2+4=0$

نضع $X=x^2\geq0$ ومنه:

$X^2-5X+4=0$

نحسب المميز Δ: $\Delta=25-16=9>0$

$X_1=1$; $X_2=4$

ومنه: $X^2-5X+4=(X-4)(X-1)$

أي: $2X^4-10x^2+8=2(x^2-4)(x^2-1)$

حلول المعادلة (E):

- $x^2-4=0$

معناه: $x=2$ أو $x=-2$

- $x^2-1=0$.

معناه: $x=1$ أو $x=-1$

ومنه $S=\{-2,-1,1,2\}$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
x^2-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x^4-10x^2+8}{x^2+x-2}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

ومنه حلول المتراجحة $\frac{2x^4-10x^2+8}{x^2+x-2} \geq 0$

$x \in]-\infty,-2[\cup]-2,-1] \cup [2,+\infty[$

حل التمرين رقم (03):

$f_m(x) = (m-2)x^2-(m+1)x+m-2$

① حساب $f_0(0)$ و $f_2(-1)$

لدينا: $f_0(x) = -2x^2-x-2$

إذن: $f_0(0) = -2$

و: $f_2(x) = -3x$

إذن: $f_2(-1) = 3$

② نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f_2(x)=0$ و $f_1(x)=0$

$f_2(x)=0$ يكافئ $x=0$.

لدينا $f_1(x) = -x^2-2x-1$.

$f_1(x)=0$ يكافئ $-x^2-2x-1=0$

$-(x+1)^2=0$ ومنه

$x=-1$ إذن

③ نحلل المتراجحتين: $f_1(x)>0$ و $f_2(x)\leq 0$

لدينا: $f_1(x) = -(x+1)^2 < 0$.

ومنه المتراجحة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$.

$f_2(x)\leq 0$ تكافئ: $-3x \leq 0$

أي $x \geq 0$ ومنه $x \in [0,+\infty[$

④ نعيين قيم m حتى يكون $x_1=1$ حلاً للمعادلة: $f_m(x)=0$

تكافئ: $f_m(1)=0$

أي: $(m-2)-(m+1)+m-2=0$

$m-5=0$

ومنه $m=5$

⑤ تعيين قيم m في كل حالة:

أ) $f_m(x)$ تكون من الدرجة الثانية:

تكافئ $m-2\neq 0$ أي $m\neq 2$

ومنه $m \in \mathbb{R}-\{2\}$

ب) المعادلة $f_m(x)$ تقبل حلول:

نحسب المميز Δ_m:

$\Delta_m = (-(m+1))^2-4(m-2)(m-2)$

$= m^2+1+2m-4m^2-16+16m$

$= -3m^2+18m-15$

$\Delta_m = 0$ معناه $-m^2+6m-5=0$

نحسب المميز Δ': $\Delta' = 36-4(-1)(-5)$

$= 36-20 = 16 > 0$

$m_1 = 1$; $m_2 = 5$

ومنه قيم m هي:

جدول إشارة Δ_m :

m	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

$m \in]-\infty;1[\cup]5;+\infty[$: من أجل $\Delta_m < 0$

④ المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلاً مضاعفاً لما $\Delta_m = 0$ أي

$m=1$ أو $m=5$

$m \in \{1;5\}$

⑤ المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلين متمايزين لما $\Delta_m > 0$

أي $m \in]1,2[\cup]2,5[$

⑥ المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً لما : $m-2=0$

مع $m+1 \neq 0$

أي : $m=2$

⑦ قيم m حتى تقبل المعادلة $f_m(x)$ حلين مختلفين في الإشارة :

كافي $\Delta m > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$

لدينا $a = m-2$ و $c = m-2$

$\frac{c}{a} = 1 > 0$

وهذه لا توافق m

$m = \{\emptyset\}$

حل التمرين رقم (04) :

$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \quad ...(1)$

① نبين أن 0 ليس حلا للمعادلة (1)

$6(0)^4 - 5(0)^3 - 38(0)^2 - 5(0) + 6 = 6 \neq 0$

② لدينا :

$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

كافي : حيث $x^2 \neq 0$

$$\frac{6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6}{x^2} = 0$$

$$\frac{6(x^4+1) - 5(x^3+x) - 38x^2}{x^2} = 0$$

$$6\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right) - 5\left(\frac{x^3+x}{x^2}\right) - \frac{38x^2}{x^2} = 0$$

بالتالي :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

③ نحسب u^2 بدلالة x : $u = x + \frac{1}{x}$

$u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

④ نبين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل

$6u^2 - 5u - 50 = 0 \quad ...(3)$

لدينا : $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ و $u = x + \frac{1}{x}$

أي $u^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

نعوض كلاهما في المعادلة (2) :

$6(u^2-2) - 5u - 38 = 0$ أي

$6u^2 - 5u - 38 - 12 = 0$

وهذه :

$6u^2 - 5u - 50 = 0 \quad ...(3)$

⑤ حل المعادلة (3) أي:

$6u^2 - 5u - 50 = 0$

$\Delta = 1225 > 0$

ومنه $u_1 = \frac{10}{3}$; $u_2 = -\frac{5}{2}$

$S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right\}$

- استنتاج حلول المعادلة (1):

$u_1 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{10}{3}$ *

$x_1^2 + 1 = \frac{10}{3}x_1$ بكافئ

$x_1^2 - \frac{10}{3}x_1 + 1 = 0$ ومنه

$\Delta = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 4 = \frac{100}{9} - \frac{36}{9} = \frac{64}{9} > 0$

المعادلة تقبل حلين:

$x_1' = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

$x_1'' = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = \frac{18}{6} = 3$

$u_2 = x_2 + \frac{1}{x_2} = -\frac{5}{2}$ *

$x_2^2 + \frac{5}{2}x_2 + 1 = 0$

$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} > 0$

المعادلة تقبل حلين:

$x_2' = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2'' = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -2$

$S = \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\right\}$

حل التمرين رقم (05):

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

① أحسب $P(1)$:

$P(1) = 1^3 - 4\times1^2 + 5\times1 - 2$

$= 1 - 4 + 5 - 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$

$P(x)$ جذر كثير الحدود $\alpha = 1$.

② تعيين كثير الحدود $Q(x)$ حيث:

$P(x) = (x-1)Q(x)$

$x^3 - 4x^2 + 5x \mid x - 1$

$-x^3 + x^2 \mid x^2 - 3x + 2$

$-3x^2 + 5x$

$3x^2 - 3x$

$2x$

$-2x + 2$

2

$Q(x) = x^2 - 3x + 2$

ومنه: $P(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$

③ تحليل $P(x)$:

$Q(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1 > 0$ ومنه: $x_1 = 1$

$x_2 = 2$

إذن: $Q(x) = (x-1)(x-2)$

ومنه $P(x) = (x-1)^2(x-2)$

- نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

معناه $x - 2 = 0$ أي $x = 2$

أو $x - 1 = 0$ أي $x = 1$

ومنه $S = \{1; 2\}$

④ استنتاج حلول المعادلة:

$|x-1|^3 - 4(x-1)^2 + 5|x-1| - 2 = 0$

$P(|x-1|) = 0$ يكافئ

$x - 1 = 1$ يكافئ $|x-1| = 1$

$\boxed{x = +2}$

أو $x-1=-1$ ومنه $\boxed{x=0}$

* $|x-1|=2$ يكافئ $x-1=2$

أي $\boxed{x=3}$

أو $x-1=-2$ ومنه $\boxed{x=-1}$

ومنه

$S=\{+2,-1,0,3\}$

⑤ نضع: $g(x)=\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+x-2}$

أ) حلّ: $x^2+x-2=0$

$\Delta=9>0$ معناه $S=\{-2,1\}$

ب) يكون للعبارة $g(x)$ معنى إذا

$x^2+x-2\neq 0$ ومنه $x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$

ج) نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $g(x)\leq 0$

يكافئ $g(x)=\dfrac{P(x)}{x^2+x-2}\leq 0$

- جدول إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+		+	
$(x-1)^2$		+		+	0	+		+	
$x-2$		−		−		−	0	+	
$g(x)$		−	‖	+	‖	−	0	+	

ومنه $g(x)\leq 0$ لما

$x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]1,2]$

حل التمرين رقم (06):

$P(x)=x^3-(6+\alpha)x^2+(13-\alpha)x-(\alpha-14)$

I) تعيين α حتى يكون 3 جذراً لـ $P(x)$

معناه $P(3)=0$ أي:

$P(3)=3^3-(6+\alpha)3^2+(13-\alpha)3-(\alpha-14)=0$

$27-54-9\alpha+39-3\alpha-\alpha+14$

$-13\alpha+26=0$

إذن: $\boxed{\alpha=2}$

II) ① تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث

$P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-8x^2+11x+12 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 & x^2-5x-4 \\ \hline -5x^2+11x & \\ 5x^2-15x & \\ \hline -4x+12 & \\ 4x-12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه $a=1$، $b=-5$ و $c=-4$

أي: $P(x)=(x-3)(x^2-5x-4)$

② نحلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

معناه $x=3$ أو $x^2-5x-4=0$

$x^2-5x-4=0$ يكافئ $\Delta=41>0$

ومنه $x_1=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ ، $x_2=\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$

إذن:

$S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{41}}{2},3,\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}\right\}$

③ استنتاج حلول المعادلة:

$x\sqrt{x}-8x+11\sqrt{x}+12=0$ ...(1)

نضع: $\sqrt{x}=u$ و $x=u^2$

ومنه $x\sqrt{x}=u^3$

المعادلة (1) تكافئ

$u^3 - 8u^2 + 11u + 12 = 0$

أي: $P(u) = 0$

ومنه $u = 3 = \sqrt{x}$

أي: $\boxed{x = 9}$

$u = \frac{5+\sqrt{41}}{2} = \sqrt{x}$

أي: $x = \left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^2$

إذن: $S = \left\{ 9, \left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^2 \right\}$

④ استنتاج حلول المعادلة:

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{x-1}{2}\right) + 12 = 0$

نضع $V = \frac{x-1}{2}$ تكافئ $x = 2V + 1$

ومنه

$V^3 - 8V^2 + 11V + 12 = 0$

تكافئ: $P(V) = 0$

ومنه: $V = 3 \Leftrightarrow x = 2\times 3 + 1$

$\boxed{x = 7}$

$V = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$ يكافئ $\boxed{x = 6+\sqrt{41}}$

$V = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$ يكافئ $\boxed{x = 6-\sqrt{41}}$

ومنه: $S = \{6-\sqrt{41}, 7, 6+\sqrt{41}\}$

⑤ حل المتراجحة $P(x) \leq 0$ في $\mathbb{R}$

- جدول إشارة $P(x)$

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$		3		$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) \leq 0$ لما: $x \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{41}}{2}\right] \cup \left[3, \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right[$

- إشارة $P\left(\frac{2021}{2022}\right)$:

لدينا: $\frac{5-\sqrt{41}}{2} < \frac{2021}{2022} < 3$

ومنه: $P\left(\frac{2021}{2022}\right) > 0$

حل التمرين رقم (07):

$P_m(x) = (m^2-4)x^4 + (m+1)x^3 - (2+m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2$

① تعيين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ كثير حدود من الدرجة (3) يكافئ $m^2 - 4 = 0$ مع $m \neq -1$

ومنه $m^2 = 4$ مع $m \neq -1$

إذن $m = 2$ أو $m = -2$ مع $m \neq -1$

② التحقق أن 2 جذر لـ $P_2(x)$

$P_2(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

$P_2(2) = 26 - 26 = 0$

ومنه 2 جذر لـ $P_2(x)$.

③ $P_2(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 & x-2 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 6x^2 & 3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-1} 2x^2 - 5x & \\ -2x^2 + 4x & \\ \cline{1-1} -x + 2 & \\ x - 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

إذن: $c=-1$ ، $b=2$ ، $a=3$

وعليه: $P_2(x)=(x-2)(3x^2+2x-1)$

④ لدينا $3x^2+2x-1=0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية

$\Delta=16>0$ و منه المعادلة تقبل حلين

هما: $x_1=\frac{1}{3}$ ، $x_2=-1$

$S=\{-1, \frac{1}{3}\}$

- استنتاج حلول المعادلة $P_2(x)=0$ في $\mathbb{R}$

لدينا $P_2(x)=0$ تكافئ $x-2=0$ أو $3x^2+2x-1=0$

ومنه $S=\{-1, \frac{1}{3}, 2\}$

⑤ دراسة إشارة $P_2(x)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-5x-4		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة $3x^3+2\leq 4x^2+5x$

تكافئ $3x^3-4x^2-5x+2\leq 0$

أي: $P_2(x)\leq 0$

إذن:

$x\in]-\infty, -1]\cup[\frac{1}{3}, 2]$