Prof Mustapha
KHALDI

النهايات ①
(السلوك التقاربي لمنحن)

مفاهيم

❶ بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

❷ إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a حيث $a \in D_f$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

❸ إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد a تكون هذه النهاية وحيدة

❹ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثل $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

I]. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن ل f نهاية منتهية l عند a معناه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = l$

II]. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \frac{d}{g(x)}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، d و a عددان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

إذا كانت إشارة $g(x)$	وإشارة d	فإن
$-\infty \quad < a > \quad +\infty$ $- \quad 0 \quad +$	$d > 0$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
$-\infty \quad < a > \quad +\infty$ $+ \quad 0 \quad -$	$d > 0$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

✱ملاحظة:

إذا كانت	وإشارة d	فإن
$f(x) = \frac{d}{\lvert g(x) \rvert}$ أو $f(x) = \frac{d}{[g(x)]^2}$	$d > 0$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

III]. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \frac{d}{x}$ حيث d عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{d}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{d}{x} = 0$

و منه نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to \quad} \frac{d}{x}$ و $\lim\limits_{x \to \quad} \frac{d}{x}$

V

V]. المبرهنات الأولية على النهايات

① نهاية مجموع دالتين		
فإن: $lim[f(x)+g(x)]$ =	و $lim\, g(x)$ =	إذا كانت $lim\, f(x)$ =
$l+l'$	l'	l
$+\infty$	$+\infty$	l
$-\infty$	$-\infty$	l
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$

② نهاية جداء دالتين		
فإن: $lim[f(x)\times g(x)]$ =	و $lim\, g(x)$ =	إذا كانت $lim\, f(x)$ =
$l\times l'$	l'	l
$+\infty$	$+\infty$	$l>0$
$-\infty$	$+\infty$	$l<0$
$-\infty$	$-\infty$	$l>0$
$+\infty$	$-\infty$	$l<0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$+\infty$	0
ح ع ت	$-\infty$	0
0^-	0^+	$l<0$
0^+	0^-	$l<0$

③ نهاية حاصل قسمة دالتين		
فإن: $lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ =	و $lim\, g(x)$ =	إذا كانت $lim\, f(x)$ =
$\frac{l}{l'}$	l'	l
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
$+\infty$	$l>0$	$+\infty$
$-\infty$	$l<0$	$+\infty$
$-\infty$	$l>0$	$-\infty$
$+\infty$	$l<0$	$-\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$
ح ع ت	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
ح ع ت	0	0
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$-\infty$
$+\infty$	0^+	$l>0$
$-\infty$	0^+	$l<0$
$+\infty$	0^-	$l>0$
$+\infty$	0^-	$l<0$

④ حالات خاصة			
$lim\sqrt{f(x)}$ =	$lim\ \lvert f(x)\rvert$ =	فإن: $lim\,[f(x)]^2$ =	إذا كانت $lim\, f(x)$ =
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

⑤ حالات عدم التعيين			
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$

Prof Mustapha
KdHALDI

النهايات ②
(التفسير الهندسي)

❶ المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب (عمودي)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Longleftarrow x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور التراتيب

❷ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b \Longleftarrow y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

❸ المستقيم المقارب المائل

أ] البحث عن المستقيم المقارب المائل

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \Longleftarrow$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

إذا كان $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - ax] = b$ $\Longleftarrow y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f

ب] اثبات أن مستقيم هو مقارب مائل ل C_f

لإثبات أن $y = ax + b$ مقارب مائل ل C_f يكفي برهان أن: $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

ج] دراسة وضعية C_f بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - (ax + b)$

x	$-\infty$ $+\infty$	x_0	
إشارة $f(x) - y$	$-$		$+$
الوضع النسبي بين C_f و (Δ)	C_f تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f فوق (Δ)

✱ملاحظة: يسمى المنحنى الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $\frac{ax+b}{\quad}$ مع و ad قطعا

مخطط دراسة دالة

❶ مجموعة التعريف

- ✓ تحديد مجموعة تعريف الدالة إن لم تكن قد أعطيت في النص

❷ دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة)

- ✓ قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مركز أو محور تناظر المنحنى

❸ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

❹ تحديد المستقيمات المقاربة

❺ دراسة اتجاه تغير الدالة

① حساب المشتقة

② دراسة إشارة المشتقة

③ استنتاج اتجاه تغير الدالة

④ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

❻ حساب نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

❼ تشكيل جدول التغيرات

❽ التمثيل البياني للدالة

① رسم المستقيمات المقاربة

② تمثيل النقط الحدية (الكبرى و الصغرى إن وجدت) مع رسم المماسات الأفقية عندها

③ تمثيل نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

④ تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب احداثياها

⑤ رسم المماسات المائلة (إن وجدت)

⑥ رسم محور التناظر أو تمثيل مركز التناظر (إن وجدو) لاستغلال التناظر و تسهيل الرسم

⑦ استغلال و استعمال جدول التغيرات لرسم الدالة

Prof M