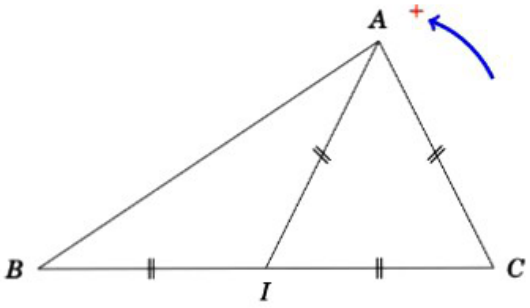
تمرين 1

أعطي القيس الرئيسي للزوايا التالية(حسب الشكل) :

$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$ $(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA})$ $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})$ $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI})$



تمرين 2

بين أن x و y هما قيسين لنفس الزاوية الموجهة :

$x=123\pi$, $y=$; $x=\frac{115\pi}{2}$, $y=\frac{729\pi}{6}$; $x=\frac{11\pi}{4}$, $y=\frac{-5\pi}{4}$

$x=\frac{-3\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$; 3π

تمرين 3

عين في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية التي قياسها α ، $\alpha=\frac{14\pi}{3}$; $\alpha=\frac{35\pi}{2}$; $\alpha=\frac{721\pi}{5}$; $\alpha=\frac{2012\pi}{3}$ ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية :

تمرين 4

في المستوي الموجه لدينا : $(\vec{U};\vec{V})=\frac{\pi}{3}$

عين قيسا لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية : $(\vec{V};\vec{U})$ $(3\vec{V};2\vec{U})$

$(2\vec{V};-3\vec{U})$ $(-3\vec{V};7\vec{U})$ $(-\vec{V};-\vec{U})$

تمرين 5

لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن A و B نقطتين من (C) حيث : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6}$

$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}$

عين قيسا للزوايا الموجهة : $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA})$ $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})$ $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

تمرين 6

DCB مثلث قائم في D و لتكن A نقطة من قطعة المستقيم $[DB]$ ،

حيث : $AC=AB=2cm$

ولدينا : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$.

1) أنشئ الشكل .

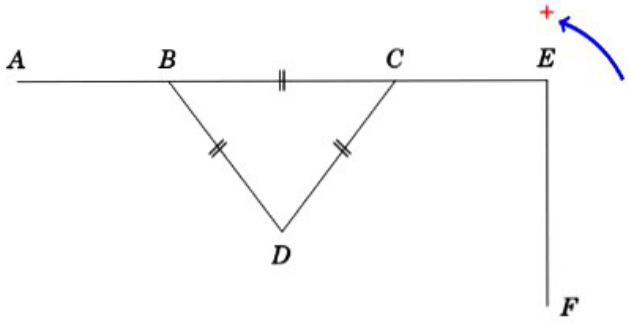
2) أحسب كل من $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$.

3) أحسب

تمرين 7

عين قيسا للزوايا الموجهة التالية التالية :

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})$; $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF})$; $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF})$



تمرين 8

لدينا : $\cos x=\frac{1}{2}$

1) أحسب $\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; $\sin(\pi-x)$

2) أحسب $\tan x$; $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; $\cos(\pi-x)$; $\tan(\pi-x)$

تمرين 9

أحسب A ، B و C حيث :

$A=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(-x)$

$B=\cos(\pi+x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin(3\pi-x)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

$C=\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

تمرين 10

حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلات التالية :

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos -2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin -2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ ، $\cos x+sinx=0$

$sin^2x-sinx-6=0$ ،

تمرين 11

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ، $\sin 3x=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ، $\sin^2x-\sin x-6=0$ ، $2\cos^2x-$

$3\cos x-2=0$ ، $4\cos^2x+2(1-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0$

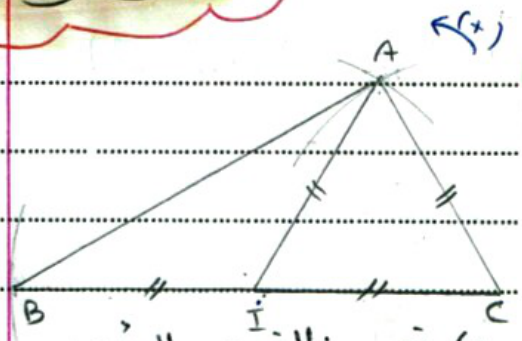
تمرين 12

حل في المجموعة $[0;2\pi[$ المتراجحات التالية :

$2\sin 5x+\sqrt{3}$;

حلول تمارين الزوايا الموجهة

التمرين 1



1) تعيين القيس الرئيسي للزوايا

من الشكل نجد:

* المثلث ACI متقايس الأضلاع معناه

$(\vec{CA},\vec{CI}) = (\vec{AI},\vec{AC}) = (\vec{IC},\vec{IA}) = \frac{\pi}{6}$

نستنتج كذلك

$(\vec{IA},\vec{IB}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

* المثلث ABI متساوي الساقين:

$(\vec{BI},\vec{BA}) = (\vec{AB},\vec{AI}) = \left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{6}$

وعليه:

• $(\vec{CA},\vec{CI}) = \frac{\pi}{6}$; $(\vec{BI},\vec{BA}) = \frac{\pi}{6}$

• $(\vec{AC},\vec{AB}) = -(\vec{AB},\vec{AC}) = -[(\vec{AB},\vec{AI}) + (\vec{AI},\vec{AC})]$

$= -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}$

• $(\vec{IB},\vec{IA}) = -(\vec{IA},\vec{IB}) = -\frac{2\pi}{3}$

التمرين 2

إثبات أن x و y قيسان لنفس الزاوية الموجهة

x و y قيسان لنفس الزاوية الموجهة معناه $x = y + 2k\pi$ أو العكس معناه أيضا $x = y - 2k\pi$

1) $x - y = \frac{\pi}{4} - \frac{-5\pi}{4}$

$x - y = \frac{19\pi}{4}$

حيث 19 ليس مضاعف لـ 2 وعليه x و y ليسا قيسان لنفس الزاوية

2) $x - y = \frac{115\pi}{2} - \frac{729\pi}{6}$

$= -\frac{384\pi}{6} = -64\pi$

$= 2(-32)\pi$

ومنه x و y قيسان لنفس الزاوية

3) $x - y = 123\pi - 3\pi = 120\pi$

$= 2(60)\pi$

ومنه x و y قيسان لنفس الزاوية

4) $x - y = -\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{2} = -2\pi$

$= -2(1)\pi$

ومنه x و y قيسان لنفس الزاوية

التمرين 3

تعيين القيس الرئيسي للزوايا

1) $\frac{2012\pi}{3} = \frac{2010\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 620\pi + \frac{2\pi}{3}$

$= 2(335)\pi + \frac{2\pi}{3}$

ومنه القيس الرئيسي لـ α هو $\frac{2\pi}{3}$

2) $\frac{721\pi}{5} = \frac{720\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = 2(72)\pi + \frac{\pi}{5}$

ومنه القيس الرئيسي لـ α هو $\frac{\pi}{5}$

3) $\frac{35\pi}{2} = \frac{34\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2(17)\pi + \frac{\pi}{2}$

وهذه القيس الرئيسي لـ $\frac{\pi}{2}$ هو

4) $\frac{14\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$

وهذه القيس الرئيسي لـ $\frac{2\pi}{3}$ هو

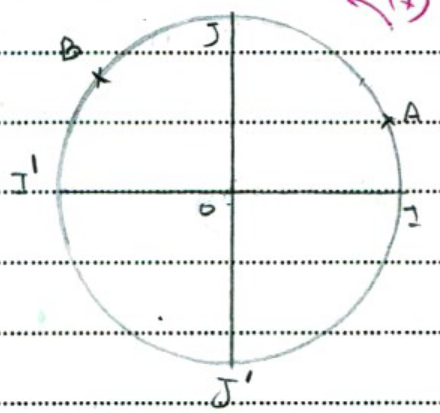
المقابل (سهل)

تمرين 4

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

- $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$
- $(3\vec{v}, 2\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{3}$
- $(2\vec{v}, -3\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$
- $(-3\vec{v}, 7\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$
- $(-\vec{v}, -\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{3}$

تمرين 5



$(\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{6}$; $(\vec{OI}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

حساب

$(\vec{OJ}, \vec{OA}) = -(\vec{OA}, \vec{OJ})$

$= -(\vec{OA}, \vec{OI}) - (\vec{OI}, \vec{OJ})$

$= (\vec{OI}, \vec{OA}) - (\vec{OI}, \vec{OJ})$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6}$

$(\vec{OJ}, \vec{OA}) = -\frac{\pi}{3}$

$(\vec{OJ}, \vec{OB}) = (\vec{OJ}, \vec{OI}) + (\vec{OI}, \vec{OB})$

$= \frac{\pi}{2} - (\vec{OB}, \vec{OI})$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$(\vec{OJ}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$

$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OJ}) + (\vec{OJ}, \vec{OB})$

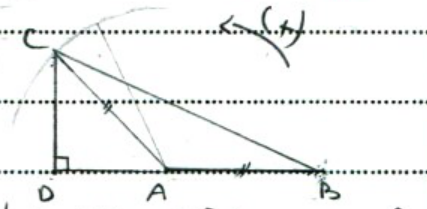
$= -(\vec{OJ}, \vec{OA}) + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{7\pi}{12}$

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{5\pi}{6}$

تمرين 6



2) حساب قياس الزوايا

- $(\vec{BC}, \vec{BA}) = (\pi - \frac{5\pi}{6}) \times \frac{1}{2}$

$(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{12}$

- $(\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{12}$

لأن المثلث ABC متساوي الساقين

- $(\vec{AC}, \vec{CB}) = (-\vec{CA}, \vec{CB})$

$= (\vec{CA}, \vec{CB}) + \pi$

$= \pi + \frac{\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

3) حساب الأطوال

• DC

لدينا المثلث ACD قائم في D و

$(\vec{AC},\vec{AD}) = \frac{\pi}{6}$

ومنه

$(\vec{AC},\vec{AD}) = \frac{DC}{AC}$

وعليه

$DC = \sin(\vec{AC},\vec{AD}) \times AC$

$= \frac{1}{2} \times 2$

أي

$DC = 1$

• DA

$\cos(\vec{AC},\vec{AD}) = \frac{DA}{AC}$

أي

$DA = \cos(\vec{AC},\vec{AD}) \times AC$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2$

$DA = \sqrt{3}$ أي

• DB

$DB = DA + AB = \sqrt{3} + 2$

• BC

حسب فيثاغورس

$BC = \sqrt{DB^2 + DC^2}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4+3+4\sqrt{3}+1}$

$BC = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$

$BC = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

استنتج $\sin\frac{\pi}{12}$

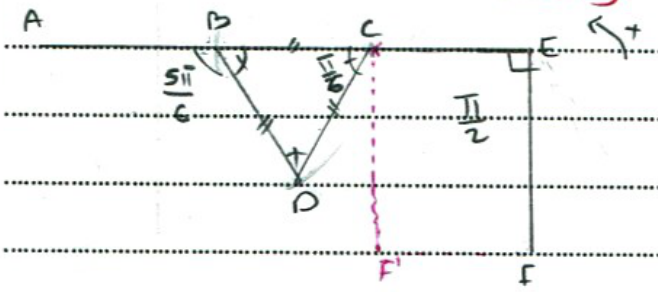
• $\sin(\vec{BD},\vec{BA}) = \sin(\vec{BC},\vec{BD})$

$= \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}$

• $\cos(\vec{BC},\vec{BA}) = \cos(\vec{BC},\vec{BD})$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

تمرين 2



• $(\vec{BD};\vec{EF}) = (\vec{BD},\vec{BC}) + (\vec{BC},\vec{EF})$

$= (\vec{BD},\vec{BC}) + (\vec{BC},\vec{CF'})$

$= (\vec{BD},\vec{BC}) + (-\vec{CB},\vec{CF'})$

$= (\vec{BD},\vec{BC}) + (\vec{CB},\vec{CF'}) + \pi$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi$

$(\vec{BD},\vec{EF}) = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

• $(\vec{CE},\vec{EF}) = (-\vec{EC},\vec{EF})$

$= (\vec{EC},\vec{EF}) + \pi$

$= \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

• $(\vec{CE},\vec{CD}) = -(\vec{CD},\vec{CE}) = -(\pi - \frac{\pi}{6})$

$= -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

$$(\vec{AB},\vec{BD}) = (\vec{BA},\vec{BD}) + \pi$$
$$= \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

تمرين 8

$\cos x = 1/2$

1) حساب $\sin x$

نعلم أن

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\frac{1}{4} + \sin^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

ومنه

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(\pi - x) = \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{1}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \pm\sqrt{3}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$
$$= \frac{1/2}{\pm\sqrt{3}/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$$

$$= \frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3}$$

تمرين 9

- $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(-x)$

$$= -\sin x + \sin x + \sin x + \sin x$$

$$A = 2\sin x$$

- $B = -\cos x + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(2\pi + \pi - x) + \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)$

$$= -\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\cancel{\cos x} + \sin x + \sin x + \cancel{\cos x}$$

- $B = 2\sin x$

- $C = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x - \cos x$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x - \cos x$$

$$= \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) - \sin x - \cos x$$

$$= \ldots$$

$C =$

تمرين 10

حل المعادلة

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وهذه المعادلة تكتب

$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

ذكاوي

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ أو

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

نعلم أن

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و

$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$

وعليه

$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

وهذه المعادلة تكتب

$\cos x = \cos\frac{5\pi}{4}$

ذكاوي

$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ أو

$\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

نعلم أن $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

وهذه المعادلة تكتب

$\cos(-2x) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

ذكاوي

$\begin{cases} -2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ -2x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ أو

$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} - k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} - k\pi \end{cases}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

نعلم أن $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وهذه

$\sin\left(\ldots + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

ذكاوي

$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ أو

$\begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

نقوم بتحويل احد الطرفين

نعلم أن $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

وهنا

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}\right)$

وعليه المعادلة تصبح

$$\sin\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

تكافئ

$$\begin{cases} -x+\frac{3\pi}{4}=3x+\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \text{أو} \\ -x+\frac{3\pi}{4}=\pi-3x-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}k\pi \\ \text{أو} \\ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

$$\sin x+\cos x=0$$

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$$

تكافئ

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}$$

تكمل بنفس الطريقة

$$\sin^2 x-\sin x-6=0$$

بوضع $X=\sin x$

المعادلة تكافئ

$$X^2-X-6=0$$

حساب Δ

$$\Delta=1+24$$

$$\Delta=25$$

ومنه المعادلة لكن متمايزان هما

$x_1=\frac{1+5}{2}$ ، $x_1=3$

$x_2=\frac{1-5}{2}$ ، $x_2=-1$

$$\sin x=X$$

لما $X=3$ نجد $\sin x=3$

وهذا مستحيل

لما $X=-1$ نجد $\sin x=-1$

حيث $\sin\frac{-\pi}{2}=-1$ ومنه

المعادلة تصبح

$$\sin x=\sin\frac{-\pi}{2}$$

تكافئ

$$\begin{cases} x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

إذا المعادلة لكن هما

$$S=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$$

تمرين 12

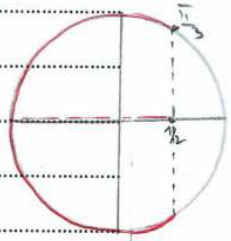
$[0, 2\pi[$

- $2\cos x \leq 1$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$

$\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

$x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$



- $\sqrt{2}\cos 3x + 1 \leq 0$

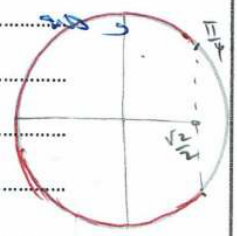
$\cos 3x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 3x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 3x \leq \cos \frac{\pi}{4}$

$3x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$

$x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$



- $2\cos 2x - \sqrt{3} > 0$

$\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 2x > \cos \frac{\pi}{6}$

$2x \in [0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$

$x \in [0, \frac{\pi}{12}[\cup]\frac{11\pi}{12}, \pi]$

