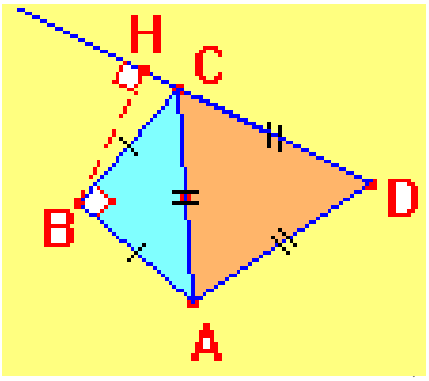
تمارين حول الجداء السلمي و التحاكي

التمرين الأول

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع .علما أن $AC=6$



1) احسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

2) احسب DH حيث H هو المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$ و استنتج قيمة $cosDCB$

حل التمرين الأول

1) حساب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times COS\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=3\sqrt{2}\times 6\times COS\left(\frac{-\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\times 6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=18$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-CA\times CD\times\cos\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)=-CA\times CD\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-6\times 6\times\frac{1}{2}=-18$$

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=DC\times DB\times\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right)=3\times\left(3+3\sqrt{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\times\left(3+3\sqrt{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}+27}{2}$$

حيث $BC=3\sqrt{2}$ و $BD=3\sqrt{3}+3$

2) حساب DH حيث H هو المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

لدينا $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=\frac{9\sqrt{3}+27}{2}$ و من جهة $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}=DC\times DH=6\times DH$ أي $6\times DH=\frac{9\sqrt{3}+27}{2}$ و منه $DH=\frac{9\sqrt{3}+27}{12}$

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$ و استنتج قيمة $cosDCB$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH}=-CD\times CH=-6\times\left(\frac{9\sqrt{3}+27}{12}-6\right)=-\frac{9\sqrt{3}+27}{2}+36$$

ومن جهة $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=CD\times CB\times cosDCB$ و منه $cosDCB=\frac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}}{CD\times CB}=\frac{-\frac{9\sqrt{3}+27}{2}+36}{6\times 3\sqrt{2}}=\frac{-\frac{9\sqrt{3}+27}{2}+36}{18\sqrt{2}}$

التمرين الثاني

الجزء الأول: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;i,j)$ ، ABC مثلث ، G مركز ثقله حيث $A(1;-2)$ ، $B(4;-1)$ ، $C(4;4)$ ، $G\left(3;\frac{1}{3}\right)$

1. عين احداثيات النقط I ، J و k منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب.
2. عين معادلة المحور (D_1) المتعلق بالضلع $[AB]$ ،(محور القطعة المستقيمة $[AB]$). ثم معادلة المحور (D_2) المتعلق بالضلع $[BC]$.
3. عين معادلة الإرتفاع (D_3) المتعلق بالضلع $[BC]$.
4. عين معادلة المستقيم (D_4) العمودي على المستقيم (D_1) ويشمل النقطة $C(4;4)$
5. عين معادلة المستقيم (D_5) الموازي للمستقيم (D_1) ويشمل النقطة $B(4;-1)$
6. عين احداثيي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) ، ماذا يمكن القول عن هذه النقطة بالنسبة للمثلث ABC ؟
7. (C)

✓ عين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC وتأكد أنها الدائرة (C).

✓ عين معادلة المستقيم (D_6) مماس الدائرة (C) في النقطة $A(1;-2)$.

8. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$.

9. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2=4MB^2$.

✓ تحقق أن مجموعة النقط (E) تكافئ $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$ ، ثم عين طبيعة المجموعة (E).

الجزء الثاني: ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه G و يحول النقطة C إلى النقطة I

1. عين نسبة التحاكي h_1

2. استنتج نسبة التحاكي h_2 الذي يحول النقطة I إلى النقطة C

3. عين معادلة المستقيم (D_1') صورة المستقيم (D_1) بالتحاكي h_2

4. عين (Γ') مجموعة النقط M من المستوي صورة المجموعة (Γ) بالتحاكي h_2

حل التمرين الثاني

الجزء الأول: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;i,j)$ ، ABC مثلث ، G مركز ثقله حيث $A(1;-2)$ ، $B(4;-1)$ ، $C(4;4)$ ، $G\left(3;\frac{1}{3}\right)$

1. تعين احداثيات النقط I ، J و k منتصفات القطع $[AB]$ ، $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب.

I منتصف $[AB]$ أي $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ومنه $I\left(\frac{5}{2};\frac{-3}{2}\right)$ و J منتصف $[BC]$ أي $J\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ ومنه $J\left(4;\frac{3}{2}\right)$

K منتصف $[AC]$ أي $K\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ ومنه $K\left(\frac{5}{2};1\right)$

2. تعين معادلة المحور (D_1) المتعلق بالضلع $[AB]$،(محور القطعة المستقيمة $[AB]$).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (D_1) أي $(D_1):3x+y+c=0$ و $I\left(\frac{5}{2};\frac{-3}{2}\right)\in(D_1)$ أي إحداثيات النقطة I تحقق معادلة (D_1) ومنه $3\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}+c=0$ ومنه $c=-6$ أي $(D_1):3x+y-6=0$

3. تعين معادلة المحور (D_2) المتعلق بالضلع $[BC]$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (D_2) أي $(D_2):0x+5y+c=0$ أي $(D_2):5y+c=0$ و $J\left(4;\frac{3}{2}\right)\in(D_2)$ أي إحداثيات النقطة J تحقق معادلة (D_2) ومنه $5\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$ ومنه $c=-\frac{15}{2}$ أي $(D_2):5y-\frac{15}{2}=0$ ومنه $(D_2):2y-3=0$

4. تعين معادلة الإرتفاع (D_3) المتعلق بالضلع $[BC]$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (D_3) أي $(D_3):0x+5y+c=0$ أي $(D_3):5y+c=0$ و $A(1;-2)\in(D_3)$ أي إحداثيات النقطة A تحقق معادلة (D_3) ومنه $5(-2)+c=0$ ومنه $c=10$ أي $(D_3):5y+10=0$ ومنه $(D_3):y+2=0$

5. عين معادلة المستقيم (D_4) العمودي على المستقيم (D_1) ويشمل النقطة $C(4;4)$

الشعاع $\overrightarrow{u_D}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D_1) هو شعاع ناظمي للمستقيم (D_4) أي $(D_4):-x+3y+c=0$ و $C(4;4)\in(D_4)$ أي إحداثيات النقطة C تحقق معادلة (D_4) ومنه $-4+3(4)+c=0$ ومنه $c=-8$ أي $(D_4):-x+3y-8=0$

6. عين معادلة المستقيم (D_5) الموازي للمستقيم (D_1) ويشمل النقطة $B(4;-1)$

الشعاع $\overrightarrow{n_D}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستقيم (D_1) هو كذلك شعاع ناظمي للمستقيم (D_5) أي $(D_5):3x+y+c=0$ و $B(4;-1)\in(D_5)$ أي إحداثيات النقطة B تحقق معا

نحل جملة معادلتين $\begin{cases}(D_1): 3x+y-6=0 \ldots\ldots(1)\\(D_2): 2y-3=0 \ldots\ldots(2)\end{cases}$ من (2) نجد $y=\frac{3}{2}$ بالتعويض في (1) نجد $x=\frac{3}{2}$ ومنه $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ هي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) .

يمكن القول عن هذه النقطة بالنسبة للمثلث ABC هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

8. لتكن (C) الدائرة ذات المعادلة $x^2+y^2-3x-3y-8=0$

✓ عين إحداثي المركز ونصف قطر الدائرة (C)، ماذا تلاحظ ؟

$x^2+y^2-3x-3y-8=0$ معناه $x^2-3x+y^2-3y-8=0$ معناه $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-8=0$ معناه $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ ومنه

(C) دائرة مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{5}{\sqrt{2}}$ ومنه

نلاحظ أن مركز الدائرة (C) هو نفسه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

✓ تعين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC وتأكد أنها الدائرة (C).

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$ ومنه معادلة الدائرة المحيطة

بالمثلث ABC هي $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ وهي نفسها معادلة لدائرة (C).

✓ عين معادلة المستقيم (D_6) مماس الدائرة (C) في النقطة $A(1;-2)$.

$\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستقيم (D_6)، كذلك $2\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستقيم (D_6) أي $(D_6): x+7y+c=0$ و $A(1;-2)\in(D_6)$ أي إحداثيات

النقطة A تحقق معادلة (D_6) ومنه $1+7(-2)+c=0$ ومنه $c=13$ أي $(D_6): x+7y+13=0$

9. تعين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$.

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوي لدينا $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\-2-y\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}4-x\\-1-y\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$ يكافئ $(4-x)(1-x)+(-1-y)(-2-y)=2$ يكافئ

$x^2-5x+4+y^2+3y+2=2$ يكافئ $x^2-5x+4+y^2+3y=0$ يكافئ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=0$ يكافئ

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{18}{4}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها $I\left(\frac{5}{2};\frac{-3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2=4MB^2$.

✓ التحقق أن مجموعة النقط (E) تكافئ $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$.

$MA^2=4MB^2$ يكافئ $\overrightarrow{MA}^2=4\overrightarrow{MB}^2$ يكافئ $\overrightarrow{MA}^2-4\overrightarrow{MB}^2=0$ يكافئ $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$

- تعين طبيعة المجموعة (E):

$\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$ تكافئ $\left(-\overrightarrow{MG_1}\right)\left(3\overrightarrow{MG_2}\right)=0$ يكافئ $\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0$ ومنه المجموعة (E) هي دائرة قطرها $[G_1G_2]$

حيث G_1 مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-2)\}$ و G_2 مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2)\}$

<u>الجزء الثاني:</u> ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه G و يحول النقطة C إلى النقطة I

1. تعين نسبة التحاكي h_1 :

h_1 التحاكي الذي مركزه G و يحول النقطة C إلى النقطة I أي $h_1(C)=I$ معناه $\overrightarrow{GI}=k\overrightarrow{GC}$ أي $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{-11}{6}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}1\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$ ومنه $\begin{cases}-\frac{1}{2}=k\\\frac{-11}{6}=k\frac{11}{3}\end{cases}$

$k=-\frac{1}{2}$ أي نسبة التحاكي h_1 هي $k=-\frac{1}{2}$.

لدينا $\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ أي $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GI}$ أي نسبة التحاكي h_2 الذي مركزه G يحول النقطة I إلى النقطة C هي $k=-2$.

3. تعين معادلة المستقيم (D_1') صورة المستقيم (D_1) بالتحاكي h_2:

صورة المستقيم (D_1) بالتحاكي h_2 هو مستقيم (D_1') حيث (D_1') يوازي (D_1) أي $(D_1'):3x+y+c'=0$

و بما أن $I\in(D_1)$ و $h_2(I)=C$ فإن $C\in(D_1')$ أي إحداثيات النقطة C تحقق معادلة المستقيم (D_1') أي $3(4)+4+c'=0$ أي $c'=-16$ ومنه

$(D_1'):3x+y-16=0$

4. تعين (Γ') مجموعة النقط M من المستوي صورة المجموعة (Γ) بالتحاكي h_2

صورة الدائرة (Γ) مركزها $I\left(\frac{5}{2};\frac{-3}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ هي (Γ') هي دائرة نصف قطرها r' حيث $r'=r\times k=r\times\frac{3\sqrt{2}}{2}$ و مركزها C لأن $h_2(I)=C$

التمرين الثالث

IAB مثلث ، C و D نقطتين بحيث $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ نعتبر التحاكي h الذي مركزه I و يحول C إلى A

1. حدد نسبة التحاكي h ثم حدد صورة النقطة D بالتحاكي h
2. حدد نسبة التحاكي h' الذي مركزه A يحول C إلى I
3. المستقيم المار من النقطة D و الموازي للمستقيم (BC) يقطع (IA) في النقطة E ، بين أن $h(E)=C$
4. حدد صورة المستقيم (ED) و المثلث ECD بالتحاكي h

حل التمرين الثالث

IAB مثلث ، C و D نقطتين بحيث $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ نعتبر التحاكي h الذي مركزه I و يحول C إلى A

1. تحدد نسبة التحاكي h:

لدينا $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ يكافئ $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IC}$ ومنه يوجد تحاكي h مركزه I و يحول C إلى A نسبته $k=3$

2. تحدد صورة النقطة D بالتحاكي h

لدينا $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ يكافئ $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{ID}$ إذن صورة النقطة D بالتحاكي h هي النقطة B

3. تحدد نسبة التحاكي h' الذي مركزه A يحول C إلى I :

لدينا $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ يكافئ $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IC}$ باستعمال علاقة شال نجد $\overrightarrow{IA}=3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\right)$ يكافئ $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $2\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AC}$

و منه نسبة التحاكي h' الذي مركزه A يحول C إلى I هي $\frac{3}{2}$ و $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

4. المستقيم المار من النقطة D و الموازي للمستقيم (BC) يقطع (IA) في النقطة E ، تبين أن $h(E)=C$

لدينا المستقيم المار من النقطة D و الموازي للمستقيم (BC) يقطع (IA) في النقطة E إذن حسب مبرهنة طاليس $\frac{IB}{ID}=\frac{IC}{IE}=3$ ومنه $IC=3IE$ وبما أن

$(IC)//(IE)$ و الشعاعان $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{IE}$ في نفس الإتجاه أي $\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IE}$ ومنه $h(E)=C$

5. حدد صورة المستقيم (ED) و المثلث ECD بالتحاكي h:

صورة المستقيم (ED) بالتحاكي h هو مستقيم يوازي (ED) ويشمل النقطة C لأن $h(E)=C$ ومنه $h((ED))=(CB)$

لدينا $\begin{cases}h(E)=C\\h(C)=A\\h(D)=B\end{cases}$ ومنه صورة المثلث ECD بالتحاكي h هو المثلث CAB