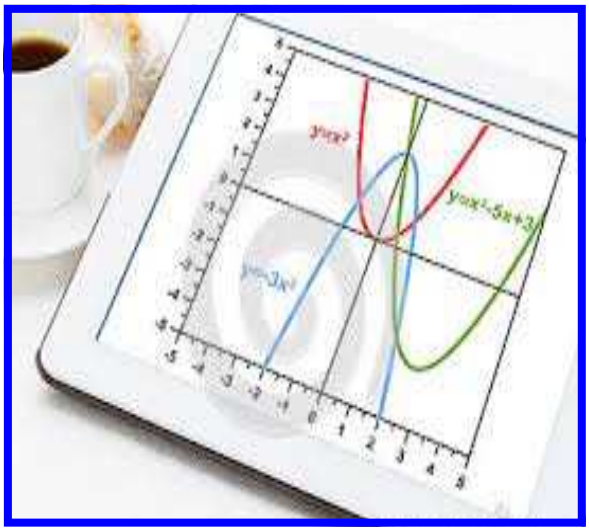
رياضيات
سلسلة 2
2022-2021
مستوى
2 ر - 2 ع ت
إعداد الأستاذ
مراد حسن

دوال كثيرات حدود

وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

1- معنى كثير حدود.
2- جذر كثير حدود . تحليل كثير حدود
3- معادلات و متراجحات من درجة ثانية
4- معادلات و متراجحات مضاعفة تربيع
5- شكل نموذجي
6- معادلات و متراجحات صماء
7- معادلات و متراجحات وسيطية
8- مسائل مختلفة





قال رسول الله
صلى الله عليه و سلم



قال الإمام أحمد



هل تعلم ؟
إذا حفظت في يوم 3 آيات من قرآن كريم فإنك ستحفظ قرآن كله في مدة 5 سنوات و 10 أشهر و 13 يوما

معنى كثير حدود

دالة كثير حدود هي كل دالة من شكل :

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

- n: عدد طبيعي يسمى درجة كثير حدود.
- $a_0, a_1, \ldots, a_n$: اعداد حقيقية ثابتة تسمى معاملات كثير حدود.

انتبه

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس درجة و كانت معاملات حدود من نفس درجة متساوية.

اعلم

1- مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.
2- مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
3- جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على ترتيب هو كثير حدود درجته n+p

جذر كثير حدود

α جذر كثير حدود f معناه $f(\alpha)=0$

تحليل كثير حدود

اذا كان α جذر كثير حدود f فإنه يوجد كثير حدود g يحقق:

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)$$

تعيين g(x) نستعمل:
*المطابقة: تساوي كثيري حدود و ذلك بعد النشر و التبسيط و الترتيب للعبارة $(x-\alpha).g(x)$
*أو: خوارزمية القسمة.

لاحظ

عبارة : ax^2+bx+c هي عبارة كثير حدود من درجة ثانية

عدد : $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز كثير حدود من درجة ثانية

عبارة : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ تسمى شكل نموذجي كثير حدود من درجة ثانية

معادلة من درجة ثانية

نسمي معادلة من درجة ثانية، ذات مجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على شكل:

$$ax^2+bx+c=0$$

حل معادلة من درجة ثانية

حل معادلة: $ax^2+bx+c=0$ نحسب مميز: $\Delta=b^2-4ac$

إذا كان	فإن
$\Delta<0$	معادلة ليس لها حل
$\Delta=0$	معادلة تقبل حل مضاعف $x_0=\frac{-b}{2a}$
	$x_1=\frac{-b+\cdot}{2a}$

مفاتيح النجاح الدراسي : 2- العطاء يساوي الأخذ



النجاح عمل وجد وتضحية وصبر، ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجداً، حصد نجاحاً وثماراً .. فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقق النجاح والطموح والهدف .. فمن جدّ وجد ومن زرع حصد.
وقل من جد في أمر يحاوله * * * وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر

المتراجحة من الدرجة الثانية

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c \succ 0$

$ax^2+bx+c \geq 0$

$ax^2+bx+c \prec 0$

$ax^2+bx+c \leq 0$

حيث a، b وc أعداد حقيقية ثابتة مع a غير معدوم.

لحلها : ندرس إشارة إشارة كثير الحدود: ax^2+bx+c

إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

إذا كان	التحليل	الإشارة
$\Delta \prec 0$	لا يحلل	x: $-\infty$ ... $+\infty$; ax^2+bx+c: إشارة a
$\Delta = 0$	$a(x-x_0)^2$	x: $-\infty$ ... x_0 ... $+\infty$; ax^2+bx+c: إشارة a ... 0 ... إشارة a
$\Delta \succ 0$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	x: $-\infty$ ... x_1 ... x_2 ... $+\infty$; ax^2+bx+c: إشارة a ... 0 ... عكس إشارة a ... 0 ... إشارة a

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

لتعيين عددين علم مجموعهما S و جداهما P نحل المعادلة :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

المعادلة تقبل حلين : $\Delta \geq 0$

$$x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مجموع الحلين $S = x'+x''$

$$S = -\frac{b}{a}$$

جداء الحلين $P = x' \times x''$

$$P = \frac{c}{a}$$

إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

$ax^2+bx+c=0$ مع $\Delta \succ 0$

فإن المعادلة تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.		$\frac{c}{a} < 0$
فإن المعادلة ت قبل حلين موجبين تماما	$-\frac{b}{a} > 0$	$\frac{c}{a} > 0$
فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما	$-\frac{b}{a} < 0$	$\frac{c}{a} > 0$

المعادلة مضاعفة التربيع

المعادلة مضاعفة التربيع، هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$ax^4+bx^2+c=0$$

حيث a.b.c، أعداد حقيقية ثابتة مع a غير معدوم .

يؤول حلها إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$$

المتراجحات مضاعفة التربيع

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c \succ 0$

$ax^2+bx+c \geq 0$

$ax^2+bx+c \prec 0$

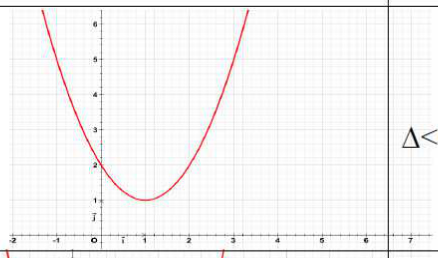
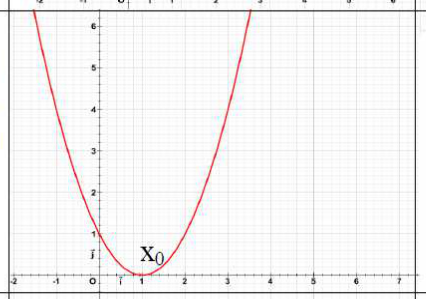
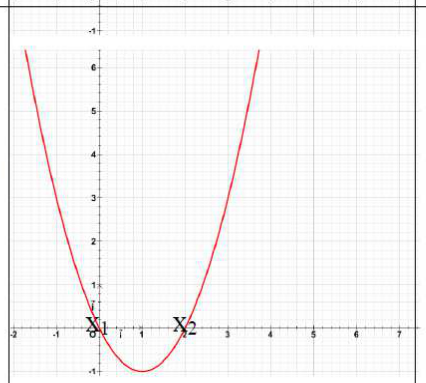
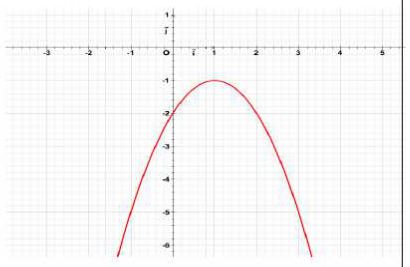
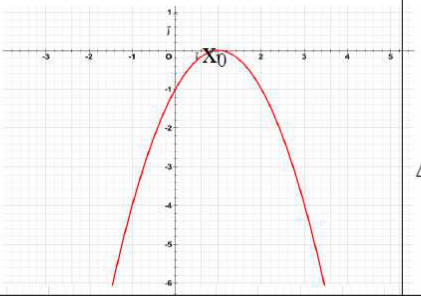
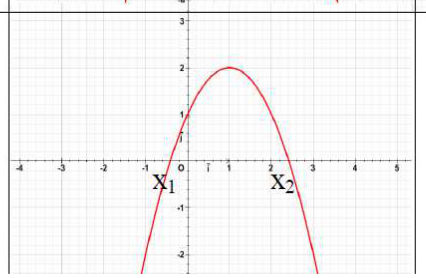
$ax^2+bx+c \leq 0$

a، b وc أعداد حقيقية مع a غير معدوم.

لحلها : ندرس إ



التفسير البياني لإشارة كثير□دود من الدرجة الثانية

		الرسم	القراءة البيانية	التعليق
a>0	$\Delta<0$		المنحني يقع كليا فوق حامل محور الفواصل	من أجل كل عدد حقيقي x يكون $ax^2+bx+c>0$
	$\Delta=0$		المنحني يقع كليا فوق حامل محور الفواصل و يمسه في النقطة ذات الفاصلة x_0	من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in \mathbb{R}-\{x_0\}$ يكون $ax^2+bx+c>0$ و من أجل $x=x_0$ يكون $ax^2+bx+c=0$
	$\Delta>0$		المنحني يقطع حامل محورا لفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 ; x_2	*من أجل أي عدد حقيقي $x \in]-\infty\ ;x_1[\cup]x_2\ ;+\infty[$ يكون $a\,x^2+bx+c>0$ *من أجل أي عدد حقيقي $x \in]x_1\ ;\ x_2[$ يكون $a\,x^2+bx+c<0$. * يكون $ax^2+bx+c=0$ **من أجل x_2 ; x_1**
a<0	$\Delta<0$		المنحني يقع كليا تحت حامل محور الواصل	من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $ax^2+bx+c<0$
	$\Delta=0$		المنحني يقع كليا تحت حامل محور الفواصل و يمسه في النقطة ذات الفاصلة x_0	من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in \mathbb{R}-\{x_0\}$ يكون $ax^2+bx+c<0$ و من أجل $x=x_0$ يكون $ax^2+bx+c=0$
	$\Delta>0$		المنحني يقطع حامل محورا لفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 ; x_2	*من أجل أي عدد حقيقي $x \in]-\infty\ ;x_1[\cup]x_2\ ;+\infty[$ يكون $a\,x^2+bx+c<0$ *من أجل أي عدد حقيقي من المجال $]x_1\ ;\ x_2[$ يكون $a\,x^2+bx+c>0$

ن أجل x_2 ; x_1

تمرين1:

من بين الدوال التالية ما هي الدوال التي تمثل كثير□دود من الدرجة الثانية؟

أ) $f(x)=-3(x-1)(x+3)$ ب) $f(t)=(t+2)^2-(t-2)^2$

جـ) $f(x)=(3x+1)(x-2)-3x^2+x-1$ د) $f(a)=\frac{1}{a}-(a-1)^2$

هـ) $f(x)=x^2-\sqrt{3}\,x+1$ و) $f(x)=(\sqrt{x}-1)^2$

تمرين2:

1. $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية حيث : $p(x)=x^2-x-2$
أحسب $p(2)$ ثم أعط تحليلا لـ $p(x)$.

2. $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة حيث : $p(x)=x^3+2x^2-5x-6$
أحسب $p(2)$ ثم أعط تحليلا لـ $p(x)$.

تمرين3:

نعتبر الدالة p المعرفة بـ : $p(x)=(x^2+1)^2-(4x+2)^2$

1. بين أن p هي دالة كثير حدود مع تعيين درجتها .
2. حل المعادلة $p(x)=0$.

تمرين4:

نعتبر الدالة p المعرفة بـ :

$p(x)=-x^3+6x^2-9x+k$ حيث k عدد حقيقي

1. عين قيمة k حتى يكون $x=4$ جذرا لـ $p(x)$
2. من أجل قيمة k المحصل عليها حلل $p(x)$.

تمرين5:

نعتبر الدالة كثير الحدود p المعرفة بـ :

$p(x)=x^3-5x^2+3x+1$

نرمز بـ α ، β و γ لجذور $p(x)$.

1. أكتب بدلالة α ، β و γ العبارة $p(x)$.
2. بين أن $\alpha+\beta+\gamma=5$; $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=3$ و $\alpha\beta\gamma=1$
3. علما أن

تمرين6: النشر و التحليل

تذكر

$(a+b)^2=$	$(a-b)^2=$	$(a+b)(a-b)=$

لل□

$x^2+5x+\frac{25}{4}=$
$x^2-7x+\frac{49}{4}=$
$4x^2-3=$
$-98x^2+72=$
$(x-1)^2-3$
$-2(3x-1)^2+10=$

أنشر

$(x+\frac{9}{2})^2=$
$(x-\frac{3}{4})^2=$
$(3x-\sqrt{7})(3x+\sqrt{7})=$
$-3(5x+2)(5x-2)=$
$[(x-7)+\sqrt{3}][(x-7)-\sqrt{3}]$
$3(2x+3-\sqrt{2})(2x+3+\sqrt{2})=$

تمرين7: الشكل النمو□جي

1- أكمل النقط للحصول على عبارة من الشكل:

$(\alpha;\beta)\in R^2$ مع $(x\pm\alpha)^2\pm\beta$

$1)x^2+2x-8=(...+...)^2-...-8$

$=(...+...)^2-...$

$2)x^2-2x+\frac{3}{4}=(...+...)^2-...+\frac{3}{4}$

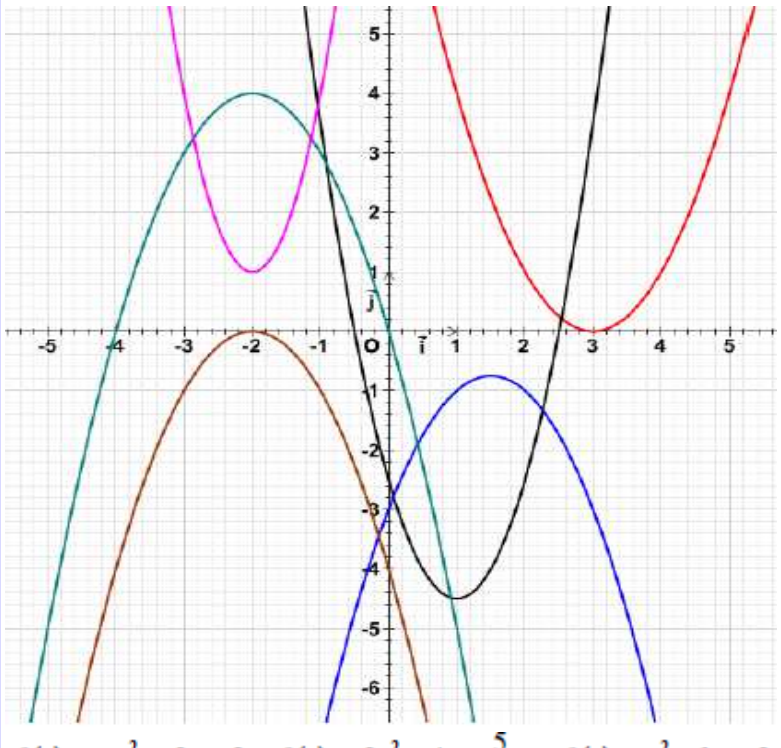
تمرين7: الشكل النموذجي (تابع)

$$3)\ x^2+6x+7=(...+...)^2-...+7$$
$$=(...+...)^2-...$$
$$4)\ x^2-6x-7=(...+...)^2-...-7$$
$$=(...+...)^2-...$$

2- للحصول على عبارة من الشكل: $a\left[(x\pm\alpha)^2\pm\beta\right]$

$$1)\ 2x^2-8x=(.....)^2=2\left[(.....)^2-....\right]$$
$$2)\ 4x^2+16x+15=4\left[(.....)^2-...+...\right]$$
$$=4\left[(.....)^2-...\right]$$
$$3)\ 2x^2-x-\frac{1}{2}=2(.....)$$
$$=2\left[(.....)^2-...-...\right]$$
$$=2\left[(.....)^2-...\right]$$
$$4)\ -4x^2+8x-1=...(.....)$$
$$=-4\left[(.....)^2-...+...\right]$$
$$=-4\left[(.....)^2-...\right]$$

تمرين8: تعطى التمثيلات البيانية لستة دوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية



$f_3(x)=-x^2+3x-3$ $f_2(x)=2x^2-4x+\frac{5}{2}$ $f_1(x)=x^2-6x+9$

1- من الشكل تعرف على منحنى كل دالة.
2- بقراءة بيانية أعط جدول إشارة كل دالة.
3- تحقق جبريا من النتائج السابقة.

تمرين9: المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$5x^2-4x+2=0$ $\quad x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$4x^2+3x-1=0$ $\quad x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$

2) حل المعادلتين $x\in\mathbb{R}$ $x^4-7x^2+12=0$

$x\in\mathbb{R}$ $2x-7\sqrt{x}-4=0$

2 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

$-2x^2+5x-3\le 0$; $3x^2-2x-8<0$

$-3x^2+\sqrt{3}x-1\ge 0$; $4x^2-2x+1>0$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$(2x-1)^2+6\le(3x-2)(x-2)$ ،

$\frac{x^2-2x+3}{2x^2-3x+1}\le 1$ ، $\frac{3x-4}{x}+\frac{8-2x}{x+2}\ge 2$

المعادلات و المتراجحات الوسيطية

تمرين 10:

1. $f(x)$ كثير حدود و α عدد حقيقي. عين في كل من الحالات التالية قيم الوسيط m حيث يكون α جذرا لـ $f(x)$:

$f(x)=x^2-3mx+2m-7$ $\quad \alpha=2$

$f(x)=(m+2)x^2-(2m+4)x+m-2$ $\quad \alpha=-3$

2. حل و ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m كل من المعادلات التالية:

- $x^2+2mx+2m^2+3=0$
- $(m+1)x^2-(m+3)x-m+3=0$

3. عين مجموعة قيم العدد الحقيقي m بحيث يكون:

$x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-2>0$

$x^2+4(m+1)x+m-5<0$

تمرين 10:

أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول كل من المعادلات التالية :

1. $x^2-2mx+3m=0$
2. $mx^2-2(m+1)x-5=0$

تمرين11: المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين :

$x^4-7x^2+1=0$ * $4x^4+12x^2+9=0$ *

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين :

$2x^4-3x^2+1<0$ * $x^4-2x^2+5\geq 0$ *

تمرين12: المعادلات و المتراجحات الصماء

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\sqrt{x+3}=2x$ * $\sqrt{3x+1}=1-x$ * $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=1$ *

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$\sqrt{x-3}>x-5$ * $\sqrt{x-2}-x+4<0$ *

تمارين و مسائل عامة

تمرين13: نعتبر كثير الحدود

$f(x)=x^3+4x^2+3x+12$:

1) احسب $f(0)$ ، $f(-4)$ ، $f(\sqrt{3})$

- بين أن العدد (-4) جذرا لكثير الحدود $f(x)$.

2) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=(x+4)(ax^2+bx+c)$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالتين: $f(x)=0$ ، $f(x)=12$



تمرين 14 :

نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية :

$(m$ وسيط حقيقي$)\ x^2-(m+1)x+\frac{5}{4}m-\frac{1}{4}=0....(1)$

عين قيم m حتى تقبل المعادلة (1)

1) جذرا مضاعفا احسبه ، 2) حلين موجبين تماما.

3) حلين سالبين تماما. ، 4) حلين مختلفين في الإشارة

5) لا تقبل المعادلة (1) حلولا

تمرين 15 :

نعتبر كثير الحدود : $p(x)=2x^3+ax^2+x+2$

1) **حدد العدد a حتى يكون 1 جذر لـ p(x) .**

2) **نضع**

أ - اوجد كثير الحدود Q(x)

حيث : $p(x)=(x-1)\cdot Q(x)$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)\prec 0$

ج- حل في المجال $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ المعادلة

$x+\left|2x^2-3x-2\right|=\left|x\right|$

16 متبر دائرة قطرها [AB] حيث: AB=4

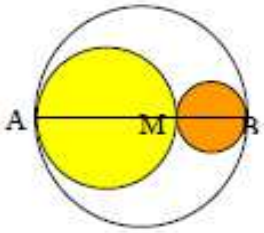
M نقطة من [AB]

ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما [AM] و [MB] نرمز بـ S إلى مساحة الحيز غير المضلل و بـ a لمساحة القرص الذي قطره [AB]. نضع AM=x

1) احسب S بدلالة x

2) هل توجد وضعية للنقطة M يكون من أجلها: $S=\frac{1}{2}a$

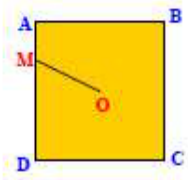
3) عين قيمة x التي يكون من أجلها: $2S\succ a$



17 ABCD مربع ضلعه 4 و مركزه O. النقطة M تتحرك على حافة المربع في الاتجاه ABCD انطلاقا من A .

نسمي x المسافة التي تقطعها النقطة M و f الدالة التي ترفق بكل x الطول OM ، نرمز له f(x).

1) بالاستعانة بالعلاقات الهندسية أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال [0 ; 4] .



ال [0 ; 16] .

f.