الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

I]. تعاريف

1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$

2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ أو $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ حيث $(h = x - x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$

✱ العدد المشتق: يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز له $f'(x_0)$ أي $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

✱ نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و $x_0 + h$ و نرمز له ب $g(h)$

✱قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

3) الدالة المشتقة لدالة f

- f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f
- مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها f' حيث $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

II]. التفسير الهندسي للعدد المشتق

1) معادلة المماس عند نقطة:

مماس المنحني C_f عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a, n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a + h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من 0) $f(a + h) = f'(a)h + f(a)$

✱ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

III]. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n \times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
–	–

VI]. عمليات على الدوال المشتقة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u + v)$	$u' + v'$
$(u \times v)$	$u'.v + v'.u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu' \times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{\quad}$	$\frac{v'}{\quad}$
(	
$u(a$	

تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHA-LDI

1 تحديد اتجاه تغير دالة

المشتقة f'	تغيرات f
f' موجبة تماما على I	f متزايدة تماما على I
f' سالبة تماما على I	f متناقصة تماما على I
f' معدومة على I	f ثابتة على I

2 معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

3 نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I و لا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

4 حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a,b] \Leftarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a,b] \Leftarrow f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

5 الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f \Leftarrow f(x) \leq k$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
- $f \Leftarrow f(x) \geq k$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)

*ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant

f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

6 نظرية القيم المتوسطة

$f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[a,b] \Leftarrow \left\{ \begin{matrix} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a,b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{matrix} \right.$

7 المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- بيانيا
  - C_f فوق $C_g \Leftarrow f(x) > g(x)$
  - C_f تحت $C_g \Leftarrow f(x) < g(x)$
  - C_f تقطع $C_g \Leftarrow f(x) = g(x)$
- حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

x	a / b	x_0 / 0
إشارة		