التمرين 01:

1. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r .

أ- عين u_2 و r علما أن

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210 \end{cases}$$

ب- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع :

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$v_n=e^{14-3n}$$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- احسب المجمـــــــــــوع

$$T_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

و الجداء $P_n=v_0.v_1.v_2.\dots.v_n$

ج - احسب $\lim_{n\to+\infty}T_n$ و $\lim_{n\to+\infty}P_n$

التمرين 02:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$u_0=\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$$

1. أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على R ب :

$$f(x)=\frac{2}{3}x+2$$

ب- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0،u_1،u_2،u_3 و u_4

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2.أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة

ج- هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n=u_n-6$$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

التمرين 03:

(u_n) متتالية عددية معرفة ب

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. احسب الحدود : u_1 ، u_2 و u_3 و ضع تخمينا حول اتجاه التغير (u_n)

2. أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن : $u_n<1$

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بين أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

4.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$v_n=\frac{1}{1-u_n}$$

أ- احسب الحدود : v_0 ، v_1 و v_2

www.bac35.com
Mohammed aboub

ب-برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

ج- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

5.احسب المجموع

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

و الجداء : $\pi_n = u_0.u_1 \ldots . u_n$

التمرين 04:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة

كما يلي : $n \in N$ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+1}{u_n+4} \end{cases}$

1. أ- احسب u_1 و u_2

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n > 1$$

ج- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$

ثم استنتج أنها متقاربة

2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

أبرهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n

ج – استنتج أن : $u_n = \frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^{n+1}-3^{n+1}}$

ثم احسب $\lim u_n$

1. احسب بدلالة n كلا من

$$s_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

والجداء $P_n = v_0.v_1.v_2.\ldots.v_n$

التمرين 05:

1. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_1 + \ln u_5 = -12$$

$$\ln u_2 - \ln u_4 = 4$$

- عين أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 أحسب u_n بدلالة n

- احسب المجموع

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

ثم $\lim_{n\to+\infty} s_n$

2. $(v_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي

$$v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$$

- بين أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

- نسمي T_n المجموع :

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n^2 = 2^{30}$

التمرين 06:

I) المتتالية (v_n) معرفة على N ب :

$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

1.بين أن(v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول

2. احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1. برهن بالتراجع من اجل كل عدد

www.Mohammedabdou.com

2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. أ. برهن من اجل كل عدد طبيعي n :

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

ب. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq 6 - u_n \leq v_n$$

استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 07:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1,2]$ بالعبارة

$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$$

أ-بين أن الدالة f متزايدة تماما على I

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n ينتمي إلى I

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

3. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 08:

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1. أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2. أحسب w_n بدلالة n ما هي نهاية (w_n) ؟

3. أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

4. أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

5. استنتج نهاية u_n و نهاية v_n

التمرين 09:

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1. بين أن (u_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

2. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$. وماذا تستنتج ؟

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n)$.

1. عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2. أ- احسب بدلالة n العدد p_n حيث :

$$p_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p_n + 4n > 0$.

التمرين 10:

(u_n) متتالية معرفة على N بـ

$$u_0 = e^3 \text{ و } u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$$

(v_n) متتالية معرفة على N بـ

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

2. استنتج v_n ثم $\ln(u_n)$ بدلالة n .

3. أ- ما هي نهاية المتتالية (v_n)

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو e^2

التمرين 11:

/) لتكن (v_n) متتالية معرفة كما يلي

$$\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

-عين α حتى تكون (v_n) ثابتة

//) نضع $\alpha = 4$

1. احسب v_1 ، v_2 و v_3

2. نعرف (u_n) كمايلي : $u_n = v_n - 3$

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- اكتب u_n و v_n بدلالة n

ج- احسب المجمـــــــــــــــوع

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

د- احسب المجمـــــــــــــــوع

$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ بدلالة n

ه- احسب المجمـــــــــــــــوع

$$Q_n = u_0 + 4u_1 + 4^2u_2 + 4^3u_3 + .. + 4^n u_n$$

بـــــــدلالة n

و- احسب الجـــــــــــــــداء

$P_n = u_0 . u_1 . u_2 \dots . u_n$ بدلالة n

التمرين 12:

لتكن (u_n)متتالية معرفة كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 2$$

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كمايلي :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

-برهن أن(v_n) متتالية هندسية عين أساسها و حدها الأول

2. استنتج v_n بدلالة n

3. برهن أنه من أجل كل n

$$u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})$$

4. استنتج u_n بدلالة n

www.bac35.com
Mohammed aboub

تمرين 01 ص

(u_n) حسابية متناقصة

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \quad (1) \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210 \quad (2) \end{cases}$$

1) حساب u_2 و r

لدينا الوسط الحسابي:

$u_1+u_3=2u_2$

نعوض في (1)

$u_1+u_3+u_2=24$

$2u_2+u_2=24$

$3u_2=24$

$\boxed{u_2=8}$

الأساس r:

لدينا:

$u_3=u_2+(3-2)r=8+r$

$u_1=u_2+(1-2)r=8-r$

نعوض في المعادلة (2)

$u_1^2+u_2^2+u_3^2=210$

$(8-r)^2+8^2+(8+r)^2=210$

$64+r^2-16r+64+64+r^2+16r=210$

$2r^2+192=210$

$2r^2=18$

$r^2=9$

أي $\begin{cases} r=3 & \text{مرفوض} \\ r=-3 & \text{مقبول} \end{cases}$

لأنها متناقصة

لدينا:

$u_0=u_2+(0-2)r$

$=8-2(-3)=14$

ب) u_n بدلالة n

$u_n=u_0+nr=14-3n$

المجموع:

$S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

$=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$

$=\frac{n+1}{2}(14+14-3n)$

$S_n=\frac{n+1}{2}(28-3n)$

2) نعتبر:

$v_n=e^{14-3n}$

أ) بين (v_n) هندسية

هاوليك القانون

لدينا :

$$v_n = e^{14-3n}$$

$$v_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{14-3n-3}$$

$$= e^{-3} \cdot e^{14-3n}$$

$$v_{n+1} = e^{-3} \cdot v_n$$

اذاً هندسية اساسها e^{-3}

$$v_0 = e^{14-3(0)} = e^{14}$$

ب) حساب المجموع :

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = e^{14} \frac{(e^{-3})^{n+1}-1}{e^{-3}-1}$$

$$= e^{14} \frac{e^{-3n-3}-1}{e^{-3}-1}$$

الجداء :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots v_n$$

$$= e^{14} \times e^{11} \times e^{8} \times \dots e^{14-3n}$$

$$= e^{14+11+8+\dots(14-3n)}$$

عبارة على مجموع متتالية حسابية اساسها -3

وحدها الاول 14

$$P_n = e^{\frac{n+1}{2}(14+14-3n)}$$

$$P_n = e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)}$$

ج) حساب :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}\left[e^{14}\frac{\overset{0}{\cancel{e^{-3n-3}}}-1}{e^{-3}-1}\right]$$

$$= \frac{-e^{14}}{e^{-3}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\overset{+\infty}{\frac{n+1}{2}}\overset{-\infty}{(28-3n)}} = 0$$

ب) 02 :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \\ u_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

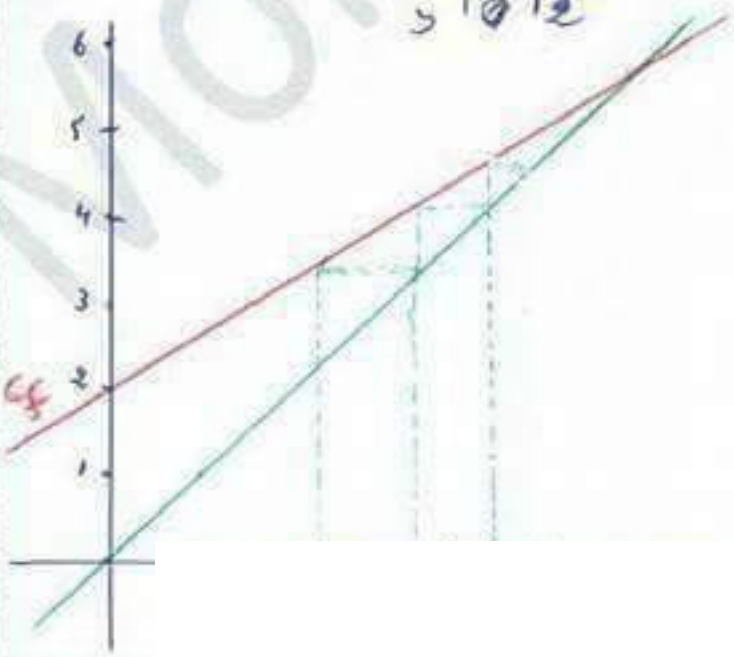
1) أ) ارسم (u_n) وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2

$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

x	0	6
f	2	6

$y = x$

x	0	2
y	0	2



www.bac35.com
Mohammed aboub

8) تخمين:

بما أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

فإن (u_n) متزايدة

وبما أنها تؤول إلى نهاية محدودة فهي متقاربة نحو 6.

2) أ) برهن بالتراجع:

$u_n \leq 6$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$u_0 = \frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2} \leq 6$

محقق

نفرض $u_n \leq 6$ صحيحة

ونبرهن صحة u_{n+1}

لدينا:

$u_n \leq 6$

$\frac{2}{3}u_n \leq 6 \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}u_n \leq 4$

$\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$

$u_{n+1} \leq 6$

صحيحة ومنه $u_n \leq 6$ صحيحة

ب) تحقيق متزايدة:

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$

$\frac{1}{3}u_n + 2$

لدينا:

$u_n \leq 6$

$-\frac{1}{3}u_n \geq -\frac{1}{3}(6)$

$-\frac{1}{3}u_n + 2 \geq -2 + 2$

أي:

$u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه (u_n) متزايدة

2) هل متقاربة:

نعم متقاربة.

بما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو 6

3) نضع:

$v_n = u_n - 6$

أ) إثبات (v_n) م هندسية

فإن: $v_{n+1} = q v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$= \frac{2}{3}u_n + 2 - 6$

$= \frac{2}{3}u_n - 4$

$= \frac{2}{3}\left[u_n - \frac{4}{\frac{2}{3}}\right]$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}[u_n - 6] = \frac{2}{3}v_n$

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

www.bac35.com
Mohammed aboub

الحد الأول :

$$v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$$

ب) u_n بدلالة n

أول شيء نكتب v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \, q^n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

إذا

$$u_n = v_n + 6$$

$$u_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$$

استنتاج النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right]$$

($\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$)

$$= 6$$

ومنه متقاربة نحو 6

التمرين 03

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1) حساب الحدود :

$$u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

تخمين : نلاحظ $u_0 < u_1 < u_2$

فإن (u_n) متزايدة

2) البرهان :

$u_n < 1$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$u_0 = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} < 1$

محقق

نفرض $u_n < 1$ صحيحة

ونبرهن صحة u_{n+1}

لدينا :

$u_n < 1$

$-u_n > -1$

$2 - u_n > 2 - 1$

$2 - u_n > 1$

نقلب :

$\frac{1}{2-u_n} < 1$

إذا

$u_{n+1} < 1$

محققة ومنه $u_n < 1$ صحيحة

3) اتجاه التغير :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$$

لدينا:

البسط $u_n < 1$

$u_n - 1 < 0$

موجب $(u_n - 1)^2 < 0$

والمقام: بما أن $u_n < 1$

فإن $-u_n > -1$

موجب $2 - u_n > 1$

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$

متزايدة

- بما أن (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو 1

- النهاية ℓ.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

يكافئ

$$\ell = \frac{1}{2 - \ell}$$

يكافئ

$$-\ell^2 + 2\ell = 1$$

$$\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$

$$(\ell - 1)^2 = 0$$

يكافئ $\ell - 1 = 0$ إذن $\boxed{\ell = 1}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

4) نعتبر:

$$v_n = \frac{1}{1 - u_n}$$

أ) الحدود:

$$v_0 = \frac{1}{1 - u_0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$v_1 = \frac{1}{1 - u_1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

$$v_2 = \frac{1}{1 - u_2} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4$$

ب) برهن أن (v_n) حسابية

هذا القانون $\boxed{v_{n+1} - v_n = r}$

لدينا $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - u_n}} - \frac{1}{1 - u_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{1 - u_n}{2 - u_n}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - u_n}{1 - u_n} - \frac{1}{1 - u_n}$$

$$= \frac{2 - u_n - 1}{1 - u_n} = \frac{1 - u_n}{1 - u_n} = 1$$

1 l

تمرين 4

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 1}{u_n + 4} \end{cases}$$

1) أ) حساب الحدود:

$$u_1 = \frac{4u_0+1}{u_0+4} = \frac{4\times 4+1}{4+4} = \frac{17}{8}$$

$$u_2 = \frac{4.u_1+1}{u_1+4} = \frac{4.\frac{17}{8}+1}{\frac{17}{8}+4} = \frac{\frac{17}{2}+1}{\frac{49}{8}}$$

$$= \frac{19}{2}\times\frac{8}{49} = \frac{76}{49}$$

ب) برهن بالتراجع:

$u_n > 1$

نغيّر شكل المتتالية:

$$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+4} = \frac{au_n+4a+b}{u_n+4}$$

بالمطابقة

$a = 4$

$4a+b = 1$ ومنه $b = 1-16 = -15$

$$u_{n+1} = 4 - \frac{15}{u_n+1}$$

- نثبت صحة الشرط الابتدائي

$u_0 = 4$ و $4 > 1$ محقق

- نفرض $u_n > 1$ صحيحة

ج) حساب v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 + nr = 2 + n(1)$$

$$\boxed{v_n = 2 + n}$$

u_n بدلالة n

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{1-u_n}$$

$$1 - u_n = \frac{1}{v_n}$$

$$-u_n = \frac{1}{v_n} - 1$$

$$u_n = 1 - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - 1}{v_n}$$

$$u_n = \frac{2+n-1}{2+n} = \frac{n+1}{n+2}$$

النهاية من جديد:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$$

5) المجموع والجداء:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(2+2+n) = \frac{n+1}{2}(4+n)$$

$$\pi_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots u_n$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\frac{n+1}{2+n}$$

لدينا: $U_n > 1$

$U_n + 4 > 5$

تقابليا:

$\frac{1}{U_n+4} < \frac{1}{5}$

نضرب في -15

$\frac{-15}{U_n+4} > \frac{-15}{5}$

نضيف 4

$4 - \frac{15}{U_n+4} > -3+4$

$U_{n+1} > 1$

صحيحة ومنه $U_n > 1$ صحيحة

ج) الرتابة:

$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+1}{U_n+4} - U_n$

$= \frac{4U_n+1-U_n^2-4U_n}{U_n+4} = \frac{-U_n^2+1}{U_n+4}$

$= \frac{(1-U_n)(1+U_n)}{U_n+4}$

لدراسة الإشارة:

$U_n > 1$

لدينا: موجب $1+U_n > 2$

موجب $U_n+4 > 5$

و: $-U_n < -1$

سالب $1-U_n < 0$

إذا

استنتاج التقارب:

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1

نعتبر:

$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

أ) برهن (V_n) هندسية:

$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1} = \frac{\frac{4U_n+1}{U_n+4} - 1}{\frac{4U_n+1}{U_n+4} + 1}$

$= \frac{\frac{3U_n-3}{U_n+4}}{\frac{5U_n+5}{U_n+4}} = \frac{3U_n-3}{5U_n+5}$

$= \frac{3}{5}\frac{U_n-1}{U_n+1} = \frac{3}{5}V_n$

هندسية أساسها $\frac{3}{5}$

$V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$

ب) V_n بدلالة n

$V_n = V_0 \cdot q^n = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

ج) استنتاج U_n:

لدينا:

$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

بكافئ

$V_n \cdot U_n + V_n = U_n - 1$

$V_n U_n$

$U_n(V_n - 1) = -V_n - 1$

$U_n = \frac{-V_n - 1}{V_n - 1} = -\frac{V_n + 1}{V_n - 1}$

$= -\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1} = -\frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} + 1}{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - 1}$

$= -\frac{\frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1} - 5^{n+1}}{5^{n+1}}} = -\frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^{n+1} - 5^{n+1}}$

$U_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ وهو المطلوب.

حساب النهاية:

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{V_n + 1}{V_n - 1}\right]$

لدينا:

$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$

إذن

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{V_n + 1}{V_n - 1}\right] = 1$

ب) حساب بدلالة n

$S_n = V_0^2 + V_1^2 + \cdots V_n^2$

لدينا:

متتالية هندسية (V_n)

$V_0 = \frac{3}{5}$ يعني $V_0^2 = \frac{9}{25}$

$q = \frac{3}{5}$ يعني $q^2 = \frac{9}{25}$

إذن

$S_n = V_0^2 \frac{(q^2)^{n+1} - 1}{q^2 - 1}$

$= \frac{9}{25} \frac{\left(\frac{9}{25}\right)^{n+1} - 1}{\frac{9}{25} - 1} = \frac{9}{25} \frac{\left(\frac{9}{25}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{16}{25}}$

$= -\frac{9}{16}\left[\left(\frac{9}{25}\right)^{n+1} - 1\right]$

$= \frac{9}{16}\left[1 - \left(\frac{9}{25}\right)^{n+1}\right]$

الجداء

$P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \cdots V_n$

$P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \cdots \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^{1+2+3+\cdots(n+1)}$

مجموع متتالية حسابية حدها الأول 1، وأخير $n+1$

$P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{2}(1+1+n)}$

$P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{2}(2+n)}$

تمرين 05 :

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة

$$\begin{cases} \ln U_2 - \ln U_4 = 4 & \text{---} (1) \\ \ln U_1 + \ln U_5 = -12 & \text{---} (2) \end{cases}$$

- تعيين الأساس q :

من المعادلة (1) نجد

$$\ln U_2 - \ln U_4 = 4$$

لدينا :

$$U_4 = U_2 q^2$$

نعوض :

$$\ln U_2 - \ln(U_2 \cdot q^2) = 4$$

$$\ln U_2 - (\ln U_2 + \ln q^2) = 4$$

$$-2\ln q = 4$$

$$\ln q = -2$$

$$\boxed{q = e^{-2}}$$

- تعيين U_0 :

$$U_5 = U_0 q^5 = U_0 (e^{-2})^5 = U_0 e^{-10}$$

$$U_1 = U_0 q^1 = U_0 e^{-2}$$

نعوض في (2) :

$$\ln U_1 + \ln U_5 = -12$$

$$\ln U_0 e^{-2} + \ln U_0 e^{-10} = -12$$

$$\ln U_0 - 2 + \ln U_0 - 10 = -12$$

$$2\ln U_0 - 2\ln e - 10\ln e = -12$$

$$2\ln U_0 - 2 - 10 = -12$$

$$2\ln U_0 = 0$$

$$\ln U_0 = 0$$

$$U_0 = e^0 = 1$$

$$\boxed{U_0 = 1}$$

- عبارة U_n بدلالة n :

$$U_n = U_0 q^n = 1(e^{-2})^n$$

$$\boxed{U_n = e^{-2n}}$$

- حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

$$= U_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 \frac{(e^{-2})^{n+1} - 1}{e^{-2} - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{e^{-2n-2} - 1}{e^{-2} - 1} \right]$$

$$= -\frac{1}{e^{-2} - 1}$$

- لتكن (V_n) :

$$V_n = \ln U_n + \ln U_{n+1}$$

- تبيين أن (V_n) حسابية

$$v_{n+1} - v_n = [\ln u_{n+1} + \ln u_{n+2}] - [\ln u_n + \ln u_{n+1}]$$

$$= \ln u_{n+2} - \ln u_n$$

$$= \ln e^{-2(n+2)} - \ln e^{-2n}$$

$$= -2(n+2) + 2n = -4$$

حسابية اساسها -4

المجموع T_n:

$$v_0 = \ln u_0 + \ln u_1$$

$$= \ln e^0 + \ln e^{-2}$$

$$= 0 - 2 = -2$$

أ)

$$v_n = v_0 + nr = -2 - 4n$$

المجموع:

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(-2 - 2 - 4n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(-4 - 4n)$$

$$= -2(n+1)(n+1)$$

$$T = -2(n+1)^2$$

عين n بحيث:

$$T_n^2 = 2^{30}$$

$$[-2(n+1)]^2 = 2^{30}$$

$$4(n+1)^4 = 2^{30}$$

$$2^2(n+1)^4 = 2^{30}$$

$$(n+1)^4 = \frac{2^{30}}{2^2} = 2^{28}$$

$$n+1 = 2^7$$

$$n = 2^7 - 1$$

$$n = 128 - 1 = 127$$

التمرين 06:

1) برهن أن (v_n) هندسية:

$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

$$v_{n+1} = \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}} = \frac{5 \times 5^{n+1}}{6 \times 5^n} = \frac{5}{6} v_n$$

هندسية اساسها $\frac{5}{6}$

الحد الأول:

$$v_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0} = \frac{5}{1} = 5$$

2) النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

II)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6} \end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع:

$1 \leq u_n \leq 6$

نتحقق صحة الشرط الابتدائي:

$u_0 = 1$ و $1 \leq 1 \leq 6$

نفرض أن $1 \leq u_n \leq 6$ صحيحة

ونبرهن صحة u_{n+1}

لدينا: $1 \leq u_n \leq 6$

نضرب في 5

$5 \leq 5u_n \leq 30$

نضيف 6

$11 \leq 5u_n + 6 \leq 36$

$\sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n+6} \leq 6$

$\sqrt{11} \leq u_{n+1} \leq 6$

صحيحة لأن $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

ومنه $1 \leq u_n \leq 6$ صحيحة

2) اتجاه التغير:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n+6} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{5u_n+6} - u_n)(\sqrt{5u_n+6} + u_n)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{5u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n^2 - 5u_n - 6)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n+1)(u_n-6)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

لدينا: $1 \leq u_n \leq 6$

ساب $0 \leq u_n - 6 \leq -5$

و $2 \leq u_n + 1 \leq 7$

ساب $-7 \leq -(u_n+1) \leq -2$

و المقام موجب تماما

$u_{n+1} - u_n > 0$ متتالية متزايدة

3) أ) البرهان: نستعمل البرهان بالتراجع

$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

نتحقق صحة الشرط الابتدائي

$6 - u_1 \leq \frac{5}{6}(6 - u_0)$

$6 - \sqrt{11} \leq \frac{5}{6}(6-1)$

$6 - \sqrt{11} \leq \frac{25}{6}$

صحيحة.

نفرض أن $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$ صحيحة

اي يبرهن صحة

$$6-U_{n+2} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n+1})$$

لدينا :

$$6-U_{n+2} = 6-\sqrt{5U_{n+1}+6}$$

$$= \frac{(6-\sqrt{5U_{n+1}+6})(6+\sqrt{5U_{n+1}+6})}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

$$= \frac{36-(5U_{n+1}+6)}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} = \frac{30-5U_{n+1}}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

$$= \frac{5(6-U_{n+1})}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

شوف معايا واش نكملوا ،

لدينا ،

$$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 6$$

$$5 \leqslant 5U_{n+1} \leqslant 30$$

$$11 \leqslant 5U_{n+1}+6 \leqslant 36$$

$$\sqrt{11} \leqslant \sqrt{5U_{n+1}+6} \leqslant 6$$

$$6+\sqrt{11} \leqslant 6+\sqrt{5U_{n+1}+6} \leqslant 12$$

تقلب :

$$\frac{1}{12} \leqslant \frac{1}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} \leqslant \frac{1}{6+\sqrt{11}}$$

نهزو :

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

بضرب الطرفين في العدد الموجب

$$5(6-U_{n+1})$$

فنحصل :

$$\frac{5(6-U_{n+1})}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n+1})$$

اذا

$$6-U_{n+2} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n+1})$$

صحيحة وهكذا

صحيحة $6-U_{n+1} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_n)$

ب) بين أن :

$$0 \leqslant 6-U_n \leqslant v_n$$

لدينا :

$$6-U_{n+1} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_n)$$

$$6-U_1 \leqslant \frac{5}{6}(6-U_0)$$

$$6-U_2 \leqslant \frac{5}{6}(6-U_1)$$

$$6-U_3 \leqslant \frac{5}{6}(6-U_2)$$

$$\vdots$$

$$6-U_n \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n-1})$$

بالجداء

$$6-U_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-U_0)$$

$$6-U_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-1)$$

$$6-U_n \leqslant 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$0 \leqslant 6-U_n \leqslant v_n$$

النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}(6-U_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 6$$

تمرين 07 :

$I = [1, 2]$

$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$$ (1

1) بين أن f متزايدة :

$$f'(x) = \frac{1(-x+4) - (-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$$

$$= \frac{-x+4+x+2}{(-x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$$

لدينا $6 > 0$ و $(-x+4)^2 > 0$

إذا $f'(x) > 0$ ومنه

f متزايدة على I

ب) ليبين $f(x)$ تنتمي لـ I

لدينا :

$$1 \leq x \leq 2$$

$$3 \leq x+2 \leq 4$$ ①

ولدينا،

$$-2 \leq -x \leq -1$$

$$2 \leq -x+4 \leq 3$$

فقلب،

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{-x+4} \leq \frac{1}{2}$$ ②

نضرب ① × ②

$$3 \times \frac{x+2}{4} \leq \frac{4}{2}$$

$$1 \leq f(x) \leq 2$$

ومنه f تنتمي لـ I

2) (U_n) متتالية،

$$U_{n+1} = f(U_n) \qquad U_0 = \frac{3}{2}$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{-U_n + 4}$$

1) برهن بالتراجع :

$$1 \leq U_n \leq 2$$

نثبت صحة الخاصية الابتدائية

$$U_0 = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad 1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

محققة

نفرض $1 \leq U_n \leq 2$ صحيحة

ونبرهن صحة U_{n+1}

$$1 \leq U_n \leq 2$$

ولما أن f متزايدة على I

فإن

$$f(1) \leq f(U_n) \leq f(2)$$

ولدينا :

$$f(U_n) = U_{n+1}$$

$$f(1) = \frac{1+2}{-1+4} = 1$$

$$f(2) = \frac{2+2}{-2+4} = 2$$

أ)

ب) اتجاه تغير (U_n)

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2}{-U_n+4}-U_n$$

$$=\frac{U_n+2+U_n^2-4U_n}{-U_n+4}$$

فان

$$=\frac{U_n^2-3U_n+2}{-U_n+4}$$

فان

$$=\frac{(U_n^2-3U_n+2)}{-U_n+4}$$

ومنه

$$=\frac{(U_n-2)(U_n-1)}{-U_n+4}$$

لدينا:

$1\leq U_n\leq 2$

موجب $0\leq U_n-1\leq 1$

سالب $-1\leq U_n-2\leq 0$

و موجب $2\leq -U_n+4\leq 3$

وعليه:

$U_{n+1}-U_n<0$

متناقصة

- استنتاج التقارب:

لأن (U_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة نحو 1

3) أ) برهن بالتراجع:

$$\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}$$

تثبت صحة الشرط الابتدائي

$$U_0=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^0+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

محقق لأن $U_0=\frac{3}{2}$

نفرض U_n صحيحة ونبرهن صحة U_{n+1} أي:

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n+1}+1} \quad (1)$$

ونبرهن من جهة أن:

$$U_{n+1}=\frac{U_n+2}{-U_n+4}=\frac{1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}+2}{-\left[1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}\right]+4}$$

$$=\frac{3+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}}{3-\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}}=\frac{\frac{3(\frac{3}{2})^n+4}{(\frac{3}{2})^n+1}}{\frac{3(\frac{3}{2})^n+2}{(\frac{3}{2})^n+1}}$$

$$=\frac{3(\frac{3}{2})^n+4}{3(\frac{3}{2})^n+2}=\frac{3(\frac{3}{2})^n+2+2}{3(\frac{3}{2})^n+2}$$

$$=1+\frac{2}{3(\frac{3}{2})^n+2}=1+\frac{2}{2\left[\frac{3}{2}(\frac{3}{2})^n+1\right]}$$

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n+1}+1}$$

وهي نفسها العلاقة (1) إذاً صحيحة ومنه

$U_n=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}$ صحيحة

ب) النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}\right]$$

$$= 1+0 = 1$$

ت 08 :

نقول ان (v_n) و (U_n) متجاورتان اذا كان احداهما متزايدة والاخرى متناقصة ولهما نفس النهاية يعني

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - v_n) = 0$$

اوك : تبع معايا التمرين.

$$v_{n+1} = \frac{U_n+3v_n}{4} \qquad v_0 = 1$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n+2v_n}{3} \qquad U_0 = 12$$

$$W_n = U_n - v_n$$

1) اثبت (W_n) م هندسية

$$W_{n+1} = U_{n+1} - v_{n+1}$$

$$= \frac{U_n+2v_n}{3} - \frac{U_n+3v_n}{4}$$

$$= \frac{4U_n+8v_n-3U_n-9v_n}{12}$$

هندسية اساسها $\frac{1}{12}$

$$W_0 = U_0 - v_0 = 12-1 = 11$$

2) W_n بدلالة n

$$W_n = W_0\, q^n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

نهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$$

لان $0 < \frac{1}{12} < 1$ فهمت!

3) اثبت (t_n) ثابتة :

يكفي نثبت ان $t_{n+1} = t_n$

لدينا : $t_n = 3U_n + 8v_n$

$$t_{n+1} = 3U_{n+1} + 8v_{n+1}$$

$$= 3\,\frac{U_n+2v_n}{3} + 8\,\frac{U_n+3v_n}{4}$$

$$= U_n + 2v_n + 2(U_n+3v_n)$$

$$= 3U_n + 8v_n = t_n$$

ومنه (t_n) ثابتة

نهاية (t_n)

$$t_0 = 3U_0 + 8v_0 = 3(12)+8(1)$$

$$= 44$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 44$$

www.bac35.com
Mohammed abdub

4) اثبات (v_n) و (u_n) متجاورتان

ندرس اتجاه التغير :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n$$

$$=\frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}=\frac{2v_n-2u_n}{3}$$

$$=\frac{-2(u_n-v_n)}{3}=-\frac{2}{3}w_n<0$$

لأن $-\frac{2}{3}<0$ و $w_n>0$

ومنه (u_n) متناقصة

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n$$

$$=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}=\frac{u_n-v_n}{4}$$

$$=\frac{1}{4}w_n>0$$

لأن $w_n>0$ و $\frac{1}{4}>0$

ومنه (v_n) متزايدة

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}w_n=0$$

ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان

5) استنتاج نهاية :

$$\begin{cases}u_n-v_n=w_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n\\3u_n+8v_n=44\end{cases}$$

نضرب ① في 8 ونجمع

$$\begin{cases}8u_n-8v_n=88\left(\frac{1}{12}\right)^n\\3u_n+8v_n=44\end{cases}$$

بالجمع

$$11u_n=44+88\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

$$u_n=4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

نعوض :

$$u_n-v_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

$$4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n-v_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

$$v_n=4-3\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

نحسب نهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\left(4-3\underbrace{\left(\frac{1}{12}\right)^n}_{0}\right)=4$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n\right)=4$$

طبعا

$$3u_n+8v_n=44$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell$$

إذا

$$3\ell+8\ell=44$$

$$11\ell=44$$ مكافئ $\boxed{\ell=4}$

$\lim_{n\to}$

تمرين 09 ص 80

I) $U_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1) بين (U_n) هندسية:

$$U_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1}$$

$$= e^{-1} e^{\frac{1}{2}-n} = e^{-1} U_n$$

هندسية أساسها e^{-1}

نشوف معايا:

$U_n = e^{an+b}$ ← الأساس $\boxed{e^a}$

الحد الأول:

$$U_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2) النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0$$

الاستنتاج: بما أن (U_n) تتقارب نحو 0

3) المجموع:

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$= U_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \sqrt{e} \frac{(e^{-1})^{n+1}-1}{e^{-1}-1}$$

$$= \sqrt{e} \frac{e^{-n-1}-1}{e^{-1}-1}$$

II) نضع $V_n = \ln(U_n)$

1) عبّر:

$$V_n = \ln(U_n) = \ln e^{\frac{1}{2}-n}$$

$$V_n = \frac{1}{2} - n$$

نوع المتتالية:

$$V_{n+1} - V_n = \left[\frac{1}{2} - (n+1)\right] - \left[\frac{1}{2} - n\right]$$

$$= \frac{1}{2} - n - 1 - \frac{1}{2} + n = -1$$

حسابية أساسها -1

2) حساب P_n:

$$P_n = \ln(U_0 * U_1 \times U_2 \times \dots U_n)$$

$$= \ln U_0 + \ln U_1 + \ln U_2 + \dots \ln U_n$$

لدينا:

$\ln U_n = V_n$

$\ln U_0 = V_0$

$\ln U_1 = V_1$

⋮ ⋮

$\ln U_n = V_n$ بالجمع

$P_n = V_0 + V_1 + \dots V_n$ حسابية

$$P_n = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right)$$

P_n

ب) تعيين n بحيث:

$P_n + 4n > 0$

$\frac{n+1}{2}(1-n) + 4n > 0$

$\frac{(n+1)(1-n)+8n}{2} > 0$

$-n^2 + 8n + 1 > 0$

حل المعادلة:

$-n^2 + 8n + 1 = 0$

$\Delta = 68$

$n_1 = \frac{-8-\sqrt{68}}{-2} = 8,12$

$n_2 = \frac{-8+\sqrt{68}}{-2} = -0,12$

$-\infty \quad -0,12 \quad + \quad 8,12 \quad - \quad +\infty$

نلاحظ العدد الطبيعي المحصور بين $-0,12$ و $8,12$

$n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

التمرين 10 ص

$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

$v_n = \ln(u_n) - 2$

1) نبرهن أن (v_n) هندسية

$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - 2 = \ln e\sqrt{u_n} - 2$

$= \ln e + \ln \sqrt{u_n} - 2$

$= \frac{1}{2}\ln u_n - 1 = \frac{1}{2}(\ln u_n - 2)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

$\frac{1}{2}$ أساس المتتالية

$v_0 = \ln u_0 - 2 = \ln e^3 - 2$

$= 3 - 2 = 1$

ب) حساب v_n بدلالة n ثم $\ln u_n$ بدلالة n

$v_n = v_0 \, q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا:

$v_n = \ln u_n - 2$

$\ln u_n = v_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

ج) حساب $\lim u_n$:

$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $0 < \frac{1}{2} < 1$

ب) تقارب (u_n) نحو e^2

لدينا:

$\ln u_n = v_n + 2$

$u_n = e^{v_n + 2}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{v_n + 2} = e^2$

ومنه (u_n) متقاربة نحو e^2

تمرين 11 ص

I) $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} \end{cases}$

- قيمة α حتى تكون (v_n) ثابتة.

نقول ثابتة:

$v_0 = v_1 = v_2 = \dots = v_n = v_{n+1}$

إذن

$v_{n+1} = v_n = v_0 = \alpha$

نعوض

$\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{9}{4}$

$\alpha - \frac{1}{4}\alpha = \frac{9}{4}$

$\frac{3}{4}\alpha = \frac{9}{4}$

$\boxed{\alpha = 3}$ $v_0 = 3$

II) نضع $\alpha = 4$ أي $v_0 = 4$

1) حساب الحدود:

$v_1 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

$v_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{13}{4} + \frac{9}{4} = \frac{49}{16}$

2) لتكن $u_n = v_n - 3$

أ) برهن هندسية:

$u_{n+1} = v_{n+1} - 3 = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} - 3$

$= \frac{1}{4}v_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(v_n - 3)$

$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

$u_0 = v_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

ب) u_n و v_n بدلالة n

$u_n = u_0 q^n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن:

$u_n = v_n - 3$

$v_n = u_n + 3 = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3$

ج)

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1}$

$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$

د)

$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$v_n = u_n + 3$ إذن:

$S'_n =$

ج)

$$P_n = u_0 + 4u_1 + 4^2 u_2 + \dots 4^n u_n$$

لدينا:

$$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$$

$$u_0 = 1 \;,\; u_1 = \frac{1}{4} \;,\; u_2 = \frac{1}{4^2}$$

نعوض

$$P_n = 1 + 4^1 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4^2} + \dots 4^n \times \frac{1}{4^n}$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots 1 = 1(n+1)$$

د) الجداء

$$P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots u_n$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \dots \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+2+\dots n}$$

حسابية حدها الأول 0
والأخير n

$$P_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}(0+n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n^2+n}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$$

التمرين 12

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \qquad \begin{matrix} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{matrix}$$

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1) بين أن (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$$

ب) v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ج) بين أن

لدينا

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$
$$v_0 = u_1 - u_0$$
$$v_1 = u_2 - u_1$$
$$v_2 = u_3 - u_2$$
$$\vdots$$
$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

بالجمع

$$v_0 + v_1 + \dots v_{n-1} = u_n - u_0$$

$$u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots v_{n-1})$$

u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 + v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$= 1 + 1\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$u_n = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$u_n = 1 - 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

$$u_n = 1 + 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$