العبقري في الرياضيات

الدوال العددية

الثالثة ثانوي

الشعب:
- علوم تجريبية؛
- تقني رياضي؛
- رياضيات.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)
الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 المستقيمات المقاربة:

المستقيم المقارب	النهاية	التفسير الهندسي
① العمودي	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = a}$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مقارب لـ(C_f).
② الأفقي	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = b}$ **(المُوازي لمحور الفواصل)** مقارب لـ(C_f) عند ∞.
③ المائل	$\lim\limits_{x\to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

ملاحظة: إذا كان: $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 0 \end{cases}$،

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = ax + b}$ مقارب **مائل** لـ(C_f) عند ∞.

2 الدّالة الزوجية، والدّالة الفردية:

الدّالة f	معناه	ويكون
① الزوجية	1) D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (**أي:** من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $\boxed{f(-x) = f(x)}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **محور التراتيب**.
② الفردية	1) D_f **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر** (**أي:** من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ **أو** $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$.	منحناها **متناظر** بالنسبة إلى **مبدأ المعلم**.

3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

① محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = \alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha - x) = f(x)}$ **أو** $\boxed{f(\alpha - x) = f(\alpha + x)}$.
② مركز التناظر	النقطة ⬚ **مركز تناظر** للمنحنى ، **معناه:** $\boxed{f($.

4 تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

☞	الطريقة	ونكتب
①تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب $(C_f) \cap (yy')$	▪ نحسب $\boxed{f(0)}$.	$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; \dots)\}$
②تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f) \cap (xx')$	▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x) = 0}$ في D_f.	$(C_f) \cap (xx') = \{A(\dots; 0); B(\dots; 0)\}$

5 المماس:

هناك سِتُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

الصيغة ☞	الطـــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	نكتب الدستور: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0) = y_0}$، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي α.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha \times f'(x_0) = -1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي (-1).
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يشمل** النقطة ذات الإحداثيي $(x_M; y_M)$.	نحلّ المعادلة $\boxed{y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

6 وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax + b$:

الطريقة ☞	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $(ax + b)$	▪ $f(x) - (ax + b) > 0$	▪ (C_f) يقع **فوق** (Δ).

7 النهايات:

أ) حالات <<عدم التعيين>> (د ع ت):

توجد ؟	الجمع	الجداء	حاصل القسمة	
أربع (04) أشكال	$(+\infty)+(-\infty)$ والعكس	$0\times\infty$ والعكس	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

ب) نهاية #دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة كثير حدود هي **نهاية حدها الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.

$f(x)=x^3+x-2$	$g(x)=x^2-2x^3+1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3)$

ج) نهاية #دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

- **النهاية** عند $+\infty$ وَعند $-\infty$ لدّالة ناطقة هي **نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة** عند $+\infty$ $(-\infty)$.
- **لحساب نهايات #دالة ناطقة** عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ **نتذكّر أنّ:** $\boxed{\frac{l}{0}=\infty}$ **ويُحدّد بدراسة إشارة المقام** على اليمين واليسار **وحسب** مجموعة التعريف.

المقام من الشكل/ حيث	n فردي	n زوجي
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	**إشارة** x^n **من إشارة** x **النهاية عند 0** $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to0}}\frac{}{x^n}\left(\frac{l}{0^-}\right)$ وَ $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}}\frac{}{x^n}\left(\frac{l}{0^+}\right)$	**إشارة** x^n **موجب** $(x^n\geq0)$ **النهاية عند 0** $\lim\limits_{x\to0}\frac{}{x^n}\left(\frac{l}{0^+}\right)$
$(ax+b)^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	**إشارة** $(ax+b)^n$ **من إشارة** $(ax+b)$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$**:** $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-\frac{b}{a}}}\frac{}{(ax+b)^n}\left(\frac{l}{0^{a\text{ عكس إشارة}}}\right)$ وَ $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-\frac{b}{a}}}\frac{}{(ax+b)^n}\left(\frac{l}{0^{a\text{ عكس إشارة}}}\right)$	**إشارة** $(ax+b)^n$ **موجب** $(ax+b)^n\geq0$ **النهاية عند** $-\frac{b}{a}$**:** $\lim\limits_{x\to-\frac{b}{a}}\frac{}{(ax+b)^n}\left(\frac{l}{0^+}\right)$
ax^2+bx+c	**ندرس إشارة** ax^2+bx+c **باستعمال المميز** $\Delta=b^2-4ac$	

ج) إشارة $ax+b$ $(a\neq0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	**عكس** إشارة a	0	**مثل** إشارة a

ج) إشارة $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$:

المـــــــــــميز $\Delta= b^2-4ac$	حلول المعادلة $P(x)=0$ في $\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تحليل $P(x)$
$\Delta<0$	$S=\emptyset$	x | $-\infty$ $+\infty$ $P(x)$ | إشارة a **مثل**	لا يُمكن تحليل $P(x)$
$\Delta=0$	$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	x | $-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$ $P(x)$ | **مثل** إشارة a ○ **مثل** إشارة a	$P(x)=a(x-x_0)^2$ $\left(x_0=-\frac{b}{2a}\right)$
$\Delta>0$	$S=\{x_1;x_2\}$ **حيث:** $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x | $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $P(x)$ | **مثل** إشارة a ○ **عكس** إشارة a ○ **مثل** إشارة a **(نفرض أنّ $x_1<x_2$)**	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

8 الإشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x)=$	$f(x)=$
$\mathbb{R}$	0	$(k\in\mathbb{R})\ k$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ x^n$
$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$
$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-sinx$	$cosx$
$\mathbb{R}$	$cosx$	$sinx$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال:

u و v دّالتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدّالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدّالة v **لا تنعدم** على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$\frac{-v'}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج:

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **النّاطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها**.

ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

صحيح.

أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$: $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$

$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ $(n$ **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 2)$

$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ $(n$ **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 1)$

$f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$	$f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

9 الإستمرارية:

f دّالة **معرّفة** على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كانت f **مستمرة على** I فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على** I **دون رفع القلم (اليد)**.

نتائـــــج:

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "cos" و"sin" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي** دّوال **مستمرة**.

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تُقبل دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
▪ **الحالة الخاصة** $(k = 0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل	
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّ	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة **لتها** α في

▪ **الحالة الخاصة** $(k=0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$ فـإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** α في المجال $[a;b]$.

طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال $[a;b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

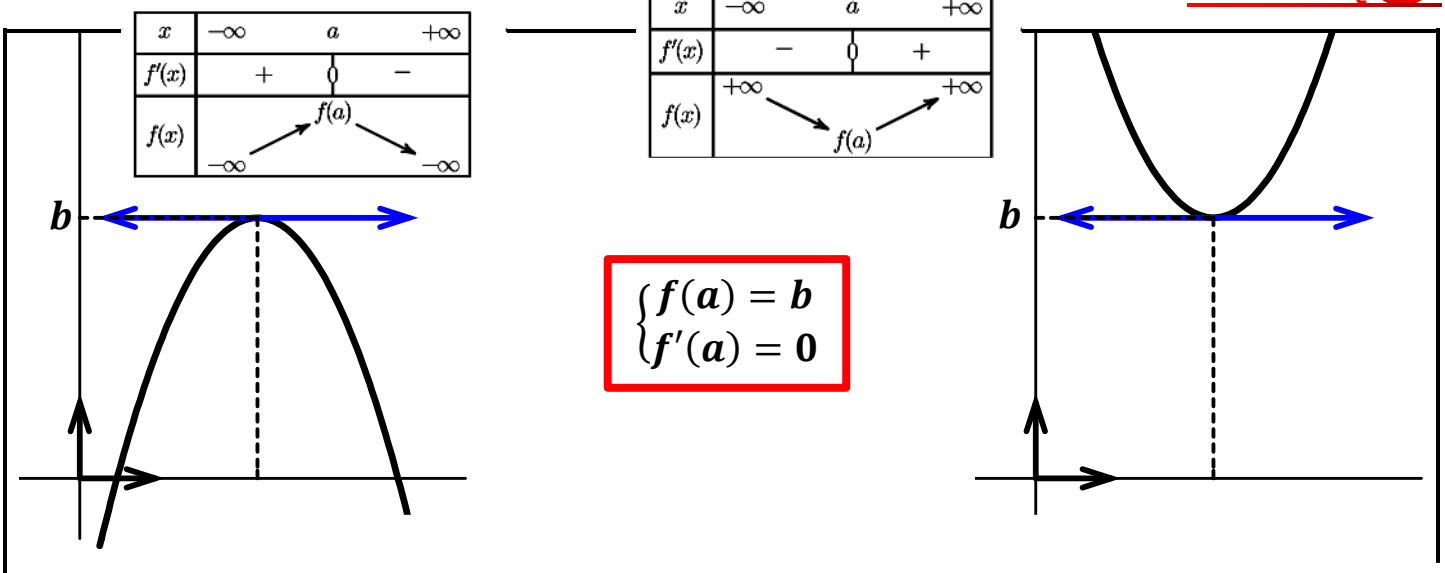
الحالة العامة $(k\in\mathbb{R})$	**الحالة الخاصة** $(k=0)$
1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=k$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ k **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، **وذلك بعد حسابهما**.	**1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=0$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$، **وذلك بعد حسابهما**.

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة f **مستمرة ورتيبة تماماً** على مجال **مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

10 المناقشة البيانية:

- المعادلة من الشكل $f(x)=m$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.
- المعادلة من الشكل $f(x)=ax+\boxed{m}$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة مائلة** مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax+\boxed{b}$.
- المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة دورانية** حول النقطة $A(0;b)$.
- المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$، m وسيط حقيقي. ← **المناقشة أفقية** مُوازية لمحور الفواصل.

11 إضافات:



$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$

12 استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء (C_f)، قد يُطلب منّا **أنْ نستنتج منحنياً آخر** (C_h) **-مثلا- لدّالة** h؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

الصيغة	الطـــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x)=\lvert f(x)\rvert}$.	▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x)\geq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x)=f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x)\leq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x)=-f(x)$؛ ومنه يكون (C_h) **نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل**.
الصيغة الثانية	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x)=f(\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية**.	▪ إذا كان $x\geq 0$ و $x\in D_f$ أي $\boxed{x\in D_f\cap[0;+\infty[}$ (x ينتمي إلى الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x)=f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ h **زوجية**.
الصيغة الثالثة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x)=f(-\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية**.	▪ إذا كان $x\leq 0$ و $x\in D_f$ أي $\boxed{x\in D_f\cap]-\infty;0]}$ (x ينتمي إلى الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x)=f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). ▪ نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ h **زوجية**.
الصيغة الرابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x)=-f(x)}$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الخامسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x)=f(-x)}$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور التراتيب.**
الصيغة السادسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $h(x)=-f(-x)$.	▪ (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى مبدأ المعلم.**
الصيغة السابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x)=f(x+b)+k}$.	▪ نستنتج (C_h) **من** (C_f) **بالانسحاب ذي الشعاع** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$. ($\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$ **أي** (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه)
الصيغة الثامنة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x)=f(x)+k}$.	▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{b=0}$. ▪ (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.
الصيغة	استنتج منحنى الدّالة التي تـ	▪ هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{\quad}$.

الصيغة العاشرة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $h(x)=kf(x)$؛ $k\in\mathbb{R}^*$.	▪ نحصل على نقطة من (C_h) **ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد k؛ حيث M نقطة من (C_f) فاصلتها x.**

13 قابلية إشتقاق دّالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

تكون f **قابلة للاشتقاق** عند x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=l$ أو $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=l$،

حيث $f'(x_0)=l\in\mathbb{R}$ يسمى **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**. **وتفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: المنحنى (C_f) يقبل **مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **معامل توجيهه** $f'(x_0)$، ومعادلته من الشكل:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)

f قابلة للاشتقاق عند x_0

معنـــــــاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=l$$

أو

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=l$$

نكتب:

l يسمى العدد المشتق للدّالة f عند x_0، ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

التفسير الهندسي للعدد المشتق:

يُمثل بيانيا (أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(x_0;y_0)$، حيث $y_0=f(x_0)$.

بصيغة أخرى: يُمثل بيانيا (أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

القراءة البيانية للعدد المشتق:

يُمكن إيجاده بيانيا بأخذ نقطتين A وB من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $f'(x_0)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$.

إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **مُوازيا لمحور الفواصل** فإنّ **معامل توجيهه معدوم** أي $f'(x_0)=0$ وتكون معادلته من الشكل $y=f(x_0)$.

14 نقطة زاوية:

إذا كان: $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2}$، حيث l_1 و l_2 **عددان حقيقيان**.

فإنّ f **قابلة للاشتقاق عند** x_0 **من اليسار** وعددّها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$.

و f **قابلة للاشتقاق عند** x_0 **من اليمين** وعددّها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$.

في حالة $(l_1 \neq l_2)$، نقول أنّ f **غير قابلة للاشتقاق عند** x_0.

ويكون **التفسير الهندسي** هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0: **نقطة زاوية** للمنحنى (C_f).

ملاحظة 01: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2}$

ملاحظة 02: المنحنى (C_f) يقبل **نصفي مماسين** عند **نقطة الزاوية** معادلاتهما:

$\boxed{\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}}$ وَ $\boxed{\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}}$.

تنبيه: تبقى **النقطة الزاوية موجودة** حتى لو كانت **إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً** والأخرى ∞.

15 نقطة الإنعطاف:

بصفة عامة، لتعيين **نقطة الانعطاف**؛ نقوم بما يلي:

- **نحسب المشتق الثاني** $f''(x)$، **وندرس إشارته**، فإذا وجدنا $f''(x)$ **انعدم** عند قيمة x_0 من D_f، **مُغيّراً إشارته**، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **حالة خاصة:**

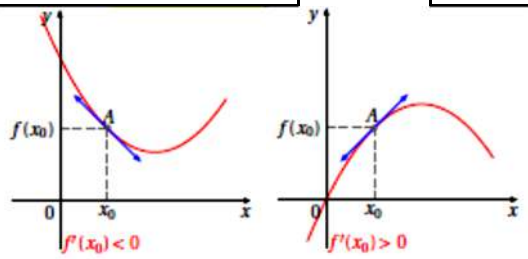
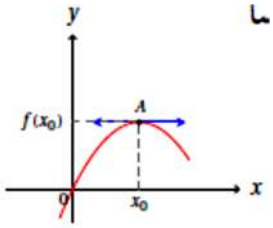
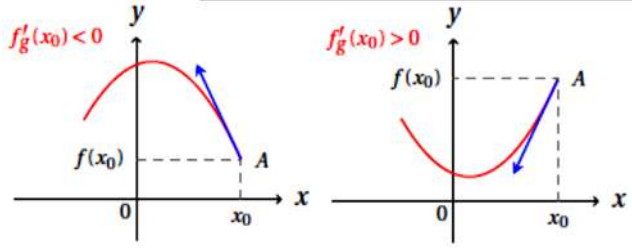
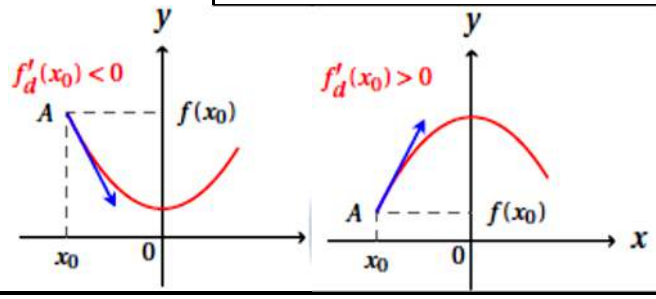
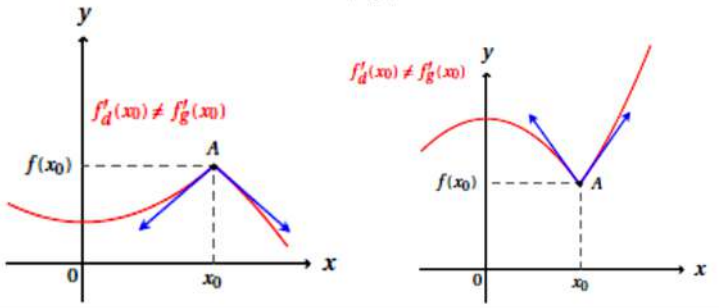
في بعض الحالات، يُمكن تعيين **نقطة الانعطاف** دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا **انعدم المشتق الأوّل** $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f، **ولم يُغيّر إشارته**، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

- **ملاحظة:**

في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعيين **نقطة الانعطاف** بالكيفية التالية:

يُطلب منّا أن **ندرس وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة إلى المماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، فإذا وجدنا أنّ (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التماس)** نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0; f(x_0))}$.

16 بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

النهاية	الاستنتاج	التفسير البياني (أو الهندسي)
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ **أو** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $f'(x_0)=l$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $f'(x_0)=l$، و**معادلته:** $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. 
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ **أو** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $f'(x_0)=0$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس (مُوازي لمحور الفواصل)** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $f'(x_0)=0$ و**معادلته:** $y=f(x_0)$. 
$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$ **أو** $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليسار وعددها المشتق هو $f_g'(x_0)=l_1$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. 
$\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$ **أو** $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليمين وعددها المشتق هو $f_d'(x_0)=l_2$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. 
$l_1\neq l_2$	الدّالة f **غير قابلة للاشتقاق** عند x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، تسمى هذه النقطة: **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f). 

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

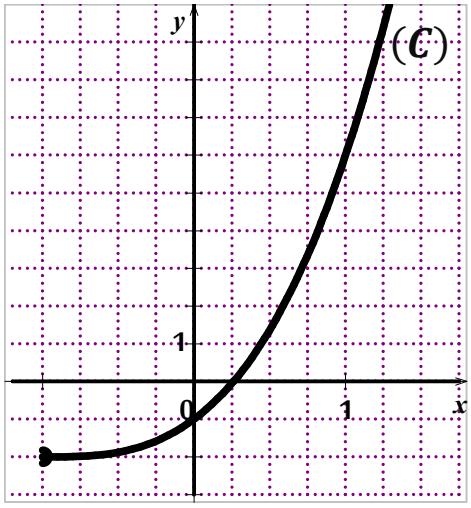
التمارين// الشعبة: علوم تجريبية.

التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدّالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1.$$

1-أ) بقراءة بيانية شكّل جدول تغيّرات الدّالة g وحدّد $g(0)$ وَإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.



ب) علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق: $g(\alpha)=0$.

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2-f هي الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

أ) تحقّق أنّه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

حيث f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ وَ$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

3-نأخذ $\alpha\simeq 0{,}26$

أ) عين مُدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

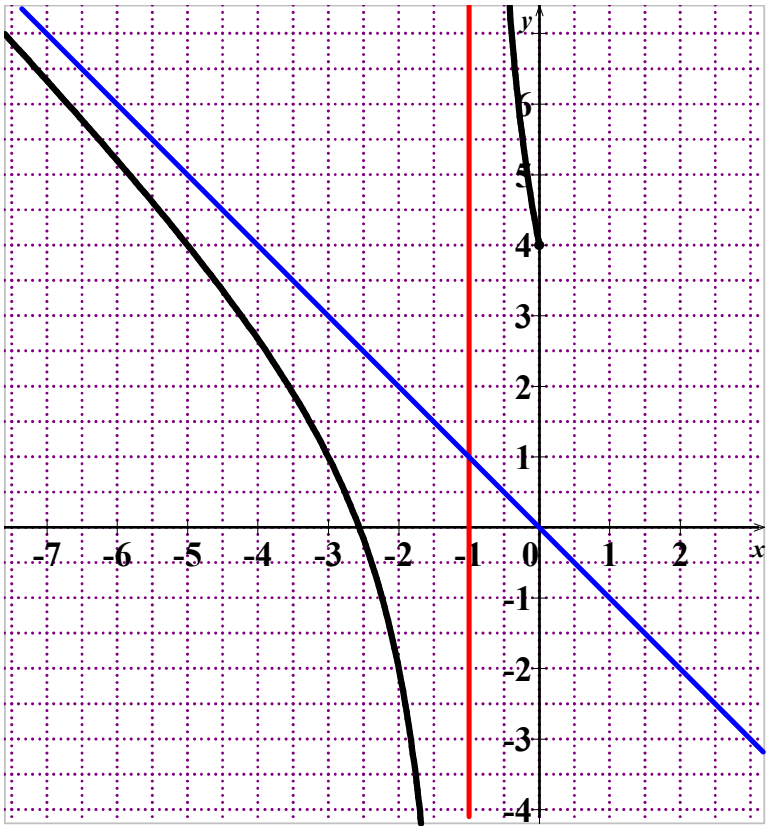
ب) أرسم المنحنى (Γ).

4-أ) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$، حيث a وb عددان حقيقيان.

ب) عيّن F الدّالة الأصلية للدّالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تُحقق: $F(1)=2$.

التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية.

I) f دّالة معرّفة على $I =]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$



(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مُبين في الشكل.

1)أ) أُحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2) g دّالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}.$$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ) أُحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقّق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) أُدرس تغيرات g.

II) k دّالة معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

1)أ) أُحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$، $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

2)أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و(Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

3)أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و(C_k).

4)أحسب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = \frac{1}{2}$ وَ $x = -\frac{1}{2}$.

التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

I)-لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II)-نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)احسب

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و(Δ).

3)أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدّالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f. (نأخذ $f(\alpha)\simeq -0,1$)

4)احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5)أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6)لتكن h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول// الشعبة: علوم تجريبية.

حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

لدينا: المنحنى (C) هو التمثيل البياني للدّالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي،

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1.$$

1-أ) بقراءة بيانية:

تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g؛ وتحديد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$:

x	-1	0 α $\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	‖	-2 ↗	$+\infty$

$\boxed{g(0)=-1}$ وَ $\boxed{g\left(\frac{1}{2}\right)>0}$.

ب) تعليل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق، $g(\alpha)=0$:

- g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $]-1;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases}g(0)=-1\\ g\left(\frac{1}{2}\right)>0\end{cases}$، أي: $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة**، يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يُحقق، $g(\alpha)=0$.

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$:

نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ في الجدول التالي:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	$+$

2-لدينا: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$؛ وَ $D_f=]-1;+\infty[$؛ (Γ) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) التحقق أنّه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

f **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(1)(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{[(x+1)^2]^2}$$

$$=\frac{(x+1)[(3x^2+6x+3)(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{3}=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{3}=\frac{g(x)}{3}$$

ب) تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وتفسير النتيجة بيانيا:

لدينا: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=\frac{0}{(\alpha+1)^3}=0$،

التفسير البياني: المنحنى (Γ) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α؛ **مماساً معامل توجهيه معدوم أي: يوازي حامل محور الفواصل.**

ج) حساب، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ وَ$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وتفسير النتيجتين بيانيا:

- بمأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}(x^3+3x^2+3x+2)=1$ وَ$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}(x+1)^2=0^+$ ، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty}$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=-1}$ (المُوازي لمحور التراتيب) **مقارب** لـ(Γ).

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2+3x+2)-(x+1)(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x+1}$ **مقارب مائل** لـ(Γ) عند $+\infty$.

د) تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ ومنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، فإنّ: $(x+1)^3>0$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$؛ **ويكون:**

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

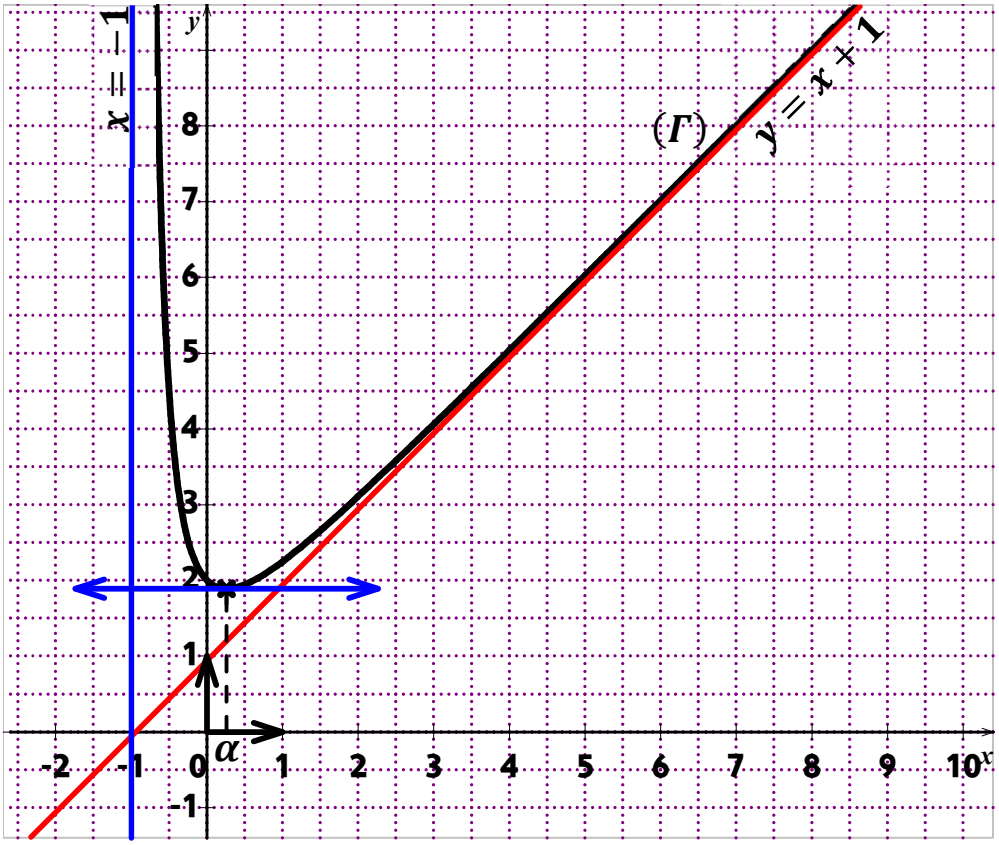
حيث: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

3-بأخذ $\alpha\simeq0{,}26$

أ) تعيين مُدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}:

نلاحظ أنّ: $f(x)=\frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$، إذن: $\boxed{f(\alpha)=\frac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}\simeq1{,}89}$.

ب) رسم المنحنى (Γ):



4-أ) كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$، حيث a وb عددان حقيقيان:

لدينا: $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{(x+a)(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2}=\frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$، بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+2=3\\2a+1=3\\a+b=2\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

إذن: $\boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}}$.

ب) تعيين F الدّالة الأصلية للدّالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تُحقق $F(1)=2$:

- لدينا: $f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه: $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت؛
- $F(1)=2$ معناه: $\frac{1}{2}(1)^2+1-\frac{1}{1+1}+c=2$؛ وبالتالي: $c=1$

إذن: $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1}$.

حل التمرين 02: (07,5 نقطة) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية.

f دالّة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$؛

1)أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(-x)=1$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{4}{x+1}=+\infty$.
- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}(-x)=1$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{4}{\quad}=-\infty$.

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f، تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 4

2) g دّالة معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$.

أ) حساب نهاية g عند $+\infty$:

- **بمأنّ:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ **وَ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ ، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$.

ب) التحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له:

- **بمأنّ:** $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ **وَ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ ، أي: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=0}$

فإنّ: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $\boxed{y=x}$ (المنصف الأوّل) مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

جـ) دراسة تغيرات g:

g **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$g'(x)=1-\frac{4(1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$؛ **لأنّ:** $\frac{(x+3)}{(x+1)^2}>0$ على $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+

إذن: g **متناقصة تماما** على المجال $[0;1]$، و**متزايدة تماما** على المجال $]1;+\infty[$؛

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$	4 ↘	3	↗ $+\infty$

II) k دّالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$:

- $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\frac{\frac{(h-4)(h+1)+4}{h+1}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\frac{h^2+h-4h-4+4}{h(h+1)}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\frac{h-3}{h+1}=-3$

ومنه: الدّالة k **قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين** وَعددها المشتق من اليمين عند 0 هو $\boxed{k'_d(0)=-3}$.

- $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ $\quad\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$ $\quad\frac{-(h+4)(h+1)+4}{h+1}$ $\quad\frac{-h^2-h-4h-4+4}{h}$ $\quad\frac{-h-5}{1}=-5$

.

الاستنتاج:

بمأنّ: $\boxed{k'_g(0) \neq k'_d(0)}$، فإنّ: الدّالة k **غير قابلة للاشتقاق عند 0**.

ب) التفسير الهندسي:

النقطة ذات الفاصلة 0 هي **نقطة زاوية**؛ والمنحنى (C_k) يقبل **نصفي مماسين**.

2)كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و(Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

- معادلة (Δ_1) من الشكل $y = k'_g(0)(x-0)+k(0)$ ومنه: $\boxed{(\Delta_1): y = -5x+4}$.
- معادلة (Δ_2) من الشكل $y = k'_d(0)(x-0)+k(0)$ ومنه: $\boxed{(\Delta_2): y = -3x+4}$.

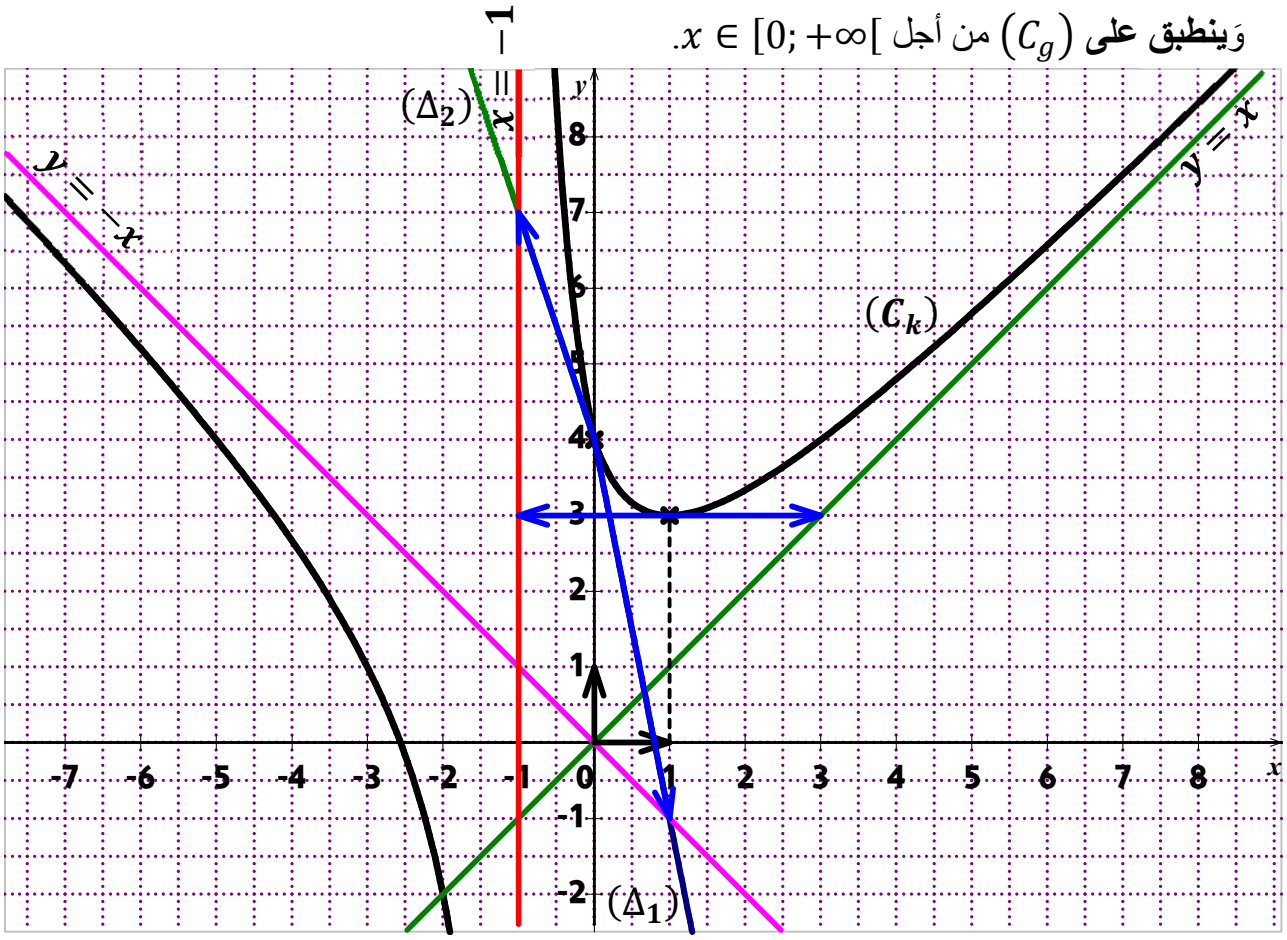
3)رسم (Δ_1)، (Δ_2) و(C_k):

لدينا: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1}; x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1}; x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$

أي: $k(x) = \begin{cases} g(x); x \in [0;+\infty[\\ f(x); x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$

إذن: (C_k) **ينطبق على** (C_f) من أجل $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0]$؛

وَ**ينطبق على** (C_g) من أجل $x \in [0;+\infty[$.



4)حساب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$، $x = \frac{1}{2}$ وَ$x = -\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

لدينا: $(x)dx$

ومنه: $A=\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}+4\ln 3\right)ua$.

حل التمرين 03: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: علوم تجريبية.

I)-لدينا: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$ و $D_g=]-\infty;+\infty[$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $\boxed{g'(x)=6x^2-8x+7}$

ولدينا: $6x^2-8x+7>0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta=(-8)^2-4(6)(7)=-104<0$)

وبالتالي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\boxed{g'(x)>0}$.

إذن: الدّالة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2)أ) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7<\alpha<0,8$:

- لدينا: g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $[0,7;0,8]$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $\mathbb{R}$)
- ولدينا: $\begin{cases}g(0,7)=-0,374\\g(0,8)=+0,064\end{cases}$ أي: $g(0,7)\times g(0,8)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0,7;0,8]$.

ب) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيّرات وحسب السؤال 2)أ) **نجد:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)-لدينا: $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$، $D_f=]-\infty,+\infty[$.

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)=-\infty$ ؛
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)=+\infty$.

2)أ) تبيان أنّه

$\frac{1}{2}(x+1)$

ومنه:

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

إذن: $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}}$.

ب) استنتاج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا: $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{4x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{4x}=0 \end{cases}$، إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ **مُقارب مائل لـ** (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

جـ) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و(Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$)

لدينا: $f(x)-y=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ولدينا: $2x^2-2x+1>0$ (لأنّ مميزه سالب تماما $\Delta=(-2)^2-4(2)(1)=-4<0$)

وبالتالي: إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $(1-3x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$1-3x$		+	0	-	
$f(x)-y$		+	0	-	
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)		(Δ) يقطع (C_f)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

3)أ) تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$:

لدينا: $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

ومنه:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$
$$=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}}$.

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f: $(f(\alpha)\simeq -0,1)$

إشارة

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		-	0		+		
$g(x)$			-		0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4)حساب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

- لدينا: $f(1)=\frac{(1)^3-2(1)+1}{2(1)^2-2(1)+1}=\frac{0}{1}=0$؛
- $f(x)=0$ معناه: $\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1}=0$

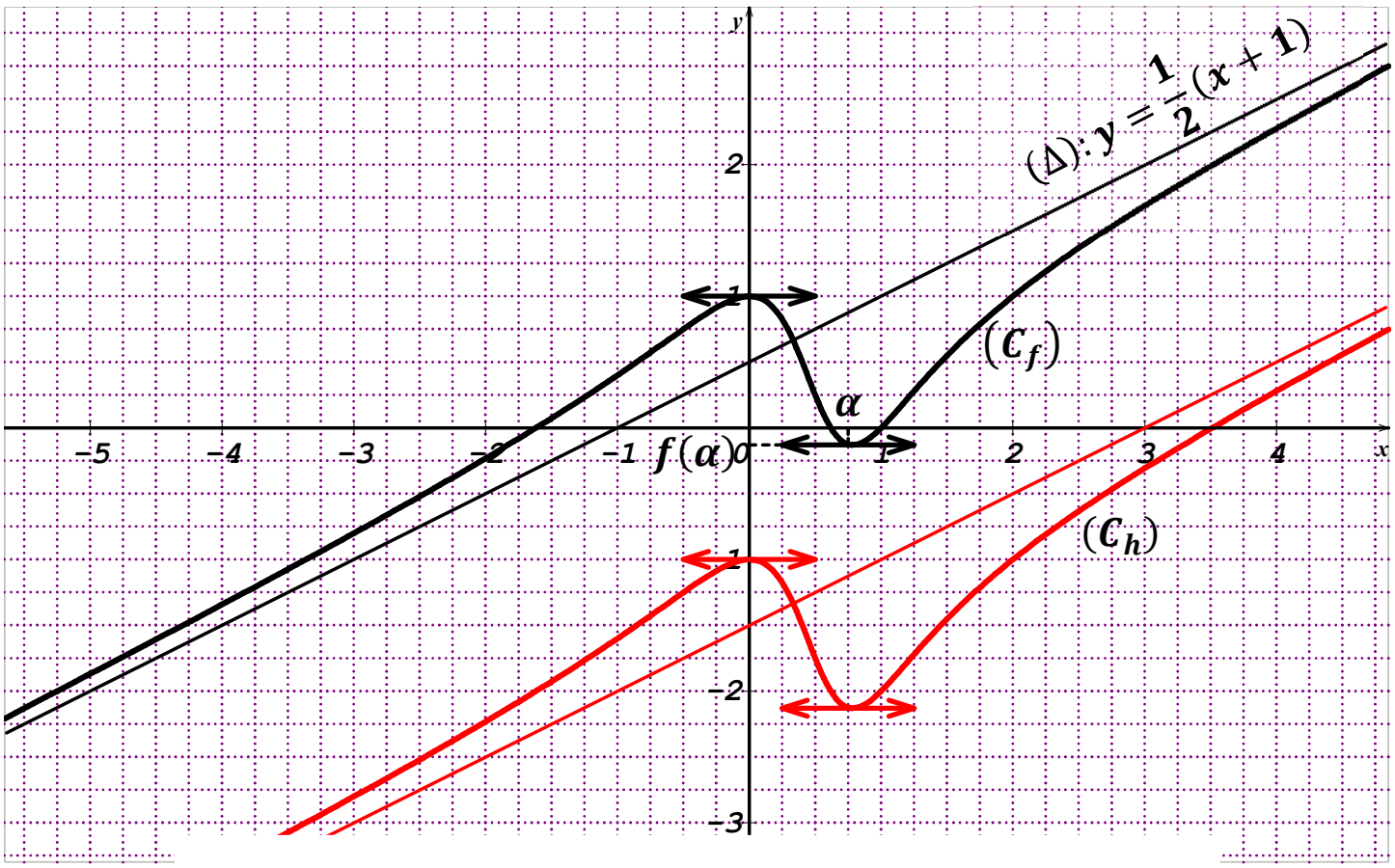
ومنه: $(x-1)(x^2+x-1)=0$

وعليه: $x-1=0$ أو $x^2+x-1=0$

وبالتالي: $x=1$ أو $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ أو $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

إذن: حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي: $x=1$؛ $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$؛ $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5)إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) والمنحنى (C_h):



أ) التحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x) = f(x) - 2$:

لدينا:

$$f(x) - 2 = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} - 2$$

$$= \frac{x^3-2x+1-2(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1} = \frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1} = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1} = h(x)$$

إذن: $\boxed{h(x) = f(x) - 2}$.

ب) استنتاج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه، ثم إنشاء (C_h):

بمأنّ $h(x) = f(x) - 2$ فـإنّ (C_h) هو **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تقني رياضي.

التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ-أثبت أنّ الدّالة f فردية.

ب-أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

جـ-ادرس تغيّرات الدّالة f.

2)أ-أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ب-أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

جـ-بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$، ثمّ استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

د-أرسم (d)؛ (d') و(C_f) في المعلم السابق.

3)g الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

أ-بيّن أنّ الدّالة g زوجية.

ب-انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدّالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

I)نعتبر الدّالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

2)بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha\in\,]-1{,}48;-1;47[$، ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II)نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.

ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس

4)ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

5)نرمز بـS إلى مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$، $x = 0$ وَ$y = 0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثمّ بيّن أنّ: $-3\alpha \leq S \leq \frac{3}{2}\alpha^2$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول// الشعبة: تقني رياضي.

حل التمرين 01: (06 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ وَ $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

و(C_f) التمثيل البياني لـf في المستوي المنسوب إلى المعلم **المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ-اثبات أنّ الدّالة f فردية:

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**،

ولدينا: $f(-x)=(-x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)=-x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=-f(x)$، إذن: f دّالة **فردية**.

ب-اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$:

لدينا: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ومنه:

$$f(x)=1+\frac{1\times\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$=1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=1+\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

جـ-دراسة تغيّرات الدّالة f :

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=+\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

وبمأنّ f دّالة **فردية** وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، فإنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

- ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل عدد حقيقي x، $\boxed{f'(x)>0}$.

إذن: الدّالة f **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2)أ-كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

معادلة (T) من الشكل $y=f'(0)(x-0)+f(0)$، وبمأنّ: $\begin{cases}f'(0)=1+\frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}}=2\\ \frac{1}{\quad}\end{cases}$،

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

(ندرس إشارة الفرق $f(x)-2x$)

لدينا: $f(x)-2x=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-2x=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2\right)=x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

- من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2\geq 0$ ومنه: $x^2+1\geq 1$

وعليه: $\sqrt{x^2+1}\geq 1$

وبالتالي: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leq 1$ إذن: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\leq 0}$.

إذن: **إشارة الفرق $f(x)-2x$ عكس إشارة x**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$f(x)-2x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع **فوق** (T)	(T) **يقطع** (C_f)	(C_f) يقع **تحت** (T)

استنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها:

نلاحظ أنّ (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى مماسه** (T) في نقطة **التمّاس** وهي النقطة O، أي (C_f) **يخترق** المماس (T) في المبدأ O، **إذن:** المبدأ O هو **نقطة انعطاف** لـ(C_f).

جـ-تبيان أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-(x+1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)=0$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$

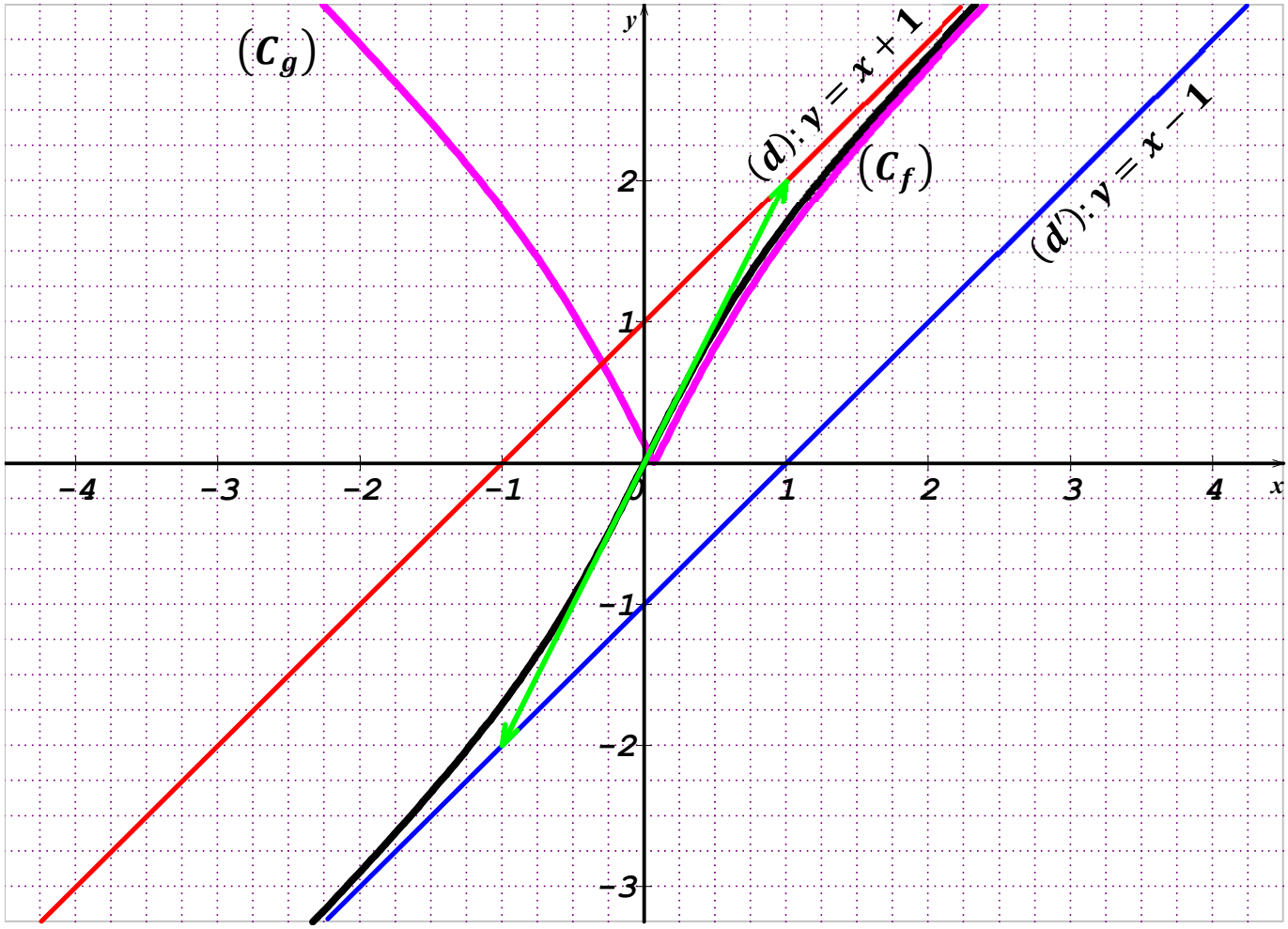
إذن: المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مُقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$.

استنتاج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر:

الدّالة f **فردية**، فالمنحنى (C_f) **متناظر بالنسبة للمبدأ** O؛ وبمأنّ (C_f) يقبل (d) كمستقيم مُقارب مائل بجوار $+\infty$ فإنّه يقبل مستقيم مُقارب مائل آخر (d') بجوار $-\infty$ وهو **نظير** (d) بالنسبة إلى المبدأ O.

لدينا: $(d):y=x+1$ وبالتالي: $(d'):-y=-x+1$ إذن: $\boxed{(d'):y=x-1}$.

د-رسم (d)؛ (d') و(C_f) في المعلم السابق:



3)لديـــنا: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

تذكير: $|x| = |-x|$ وَ $|x|^2 = x^2$ وَ $\sqrt{x^2} = |x|$

أ-تبيان أنّ الدّالة g زوجية:

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ **متناظرة** بالنسبة إلى **الصفر**،

ولدينا: $g(-x) = |-x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|-x|^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = g(x)$،

إذن: g دّالة **زوجية**.

ب-انطلاقا من (C_f) رسم (C_g) منحنى الدّالة g في نفس المعلم السابق:

نلاحظ أنّ: $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|^2+1}}\right) = f(|x|)$

ومنه: من أجل $x \in [0;+\infty[$ يكون $g(x) = f(x)$ وعليه: (C_g) **ينطبق** على (C_f)، وهو **متناظر إلى محور التراتيب** لأنّ g دّالة **زوجية**.

حل التمرين 02: (07 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني ر.

I)لدينا : $g(x) = x^3 + 6x + 12$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

1)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x) = 3x^2 > 0$ ، إذن: الدّالة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$.

2)تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيداً α حيث $-2 < \alpha < -1$:

- لدينا: $\mathbb{R}$

- ولدينا: $\begin{cases} g(-1{,}48) = -0{,}121792 \\ g(-1{,}47) = +0{,}003477 \end{cases}$ أي: $g(-1{,}48) \times g(-1{,}47) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1{,}48; -1{,}47[$.

استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) لدينا: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$ وَ $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

و(C_f) التمثيل البياني لـf في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

ب) تبيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

f **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، وَلدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-2x^4+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+6x}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^3+6x+6)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$ **وهي ملخصة في الجدول التالي:**

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		-		-	0	+	
$g(x)$		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

الدّالة f **متزايدة تماماً** على كل من المجالين $[-\infty; \alpha]$ وَ $[0; +\infty[$، و**متناقصة تماماً** على المجال $[\alpha; 0]$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗	$+\infty$

2)أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-6-x(x^2+2)}{x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0$

إذن: المستقيم $\boxed{(\Delta): y = x}$ **مُقارب مائل** لـ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$)

لدينا: $\frac{-2(x+3)}{x^2+2}$ $\frac{-2x-6}{}$ ،

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(Δ) يقطع (C_f)	(C_f) يقع تحت (Δ)

3) تبيان أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}$،

ومنه: $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-\alpha^3-6\alpha-12}{2(\alpha^2+2)}=\frac{-g(\alpha)}{2(\alpha^2+2)}=0$

لأنّ: $g(\alpha)=0$.

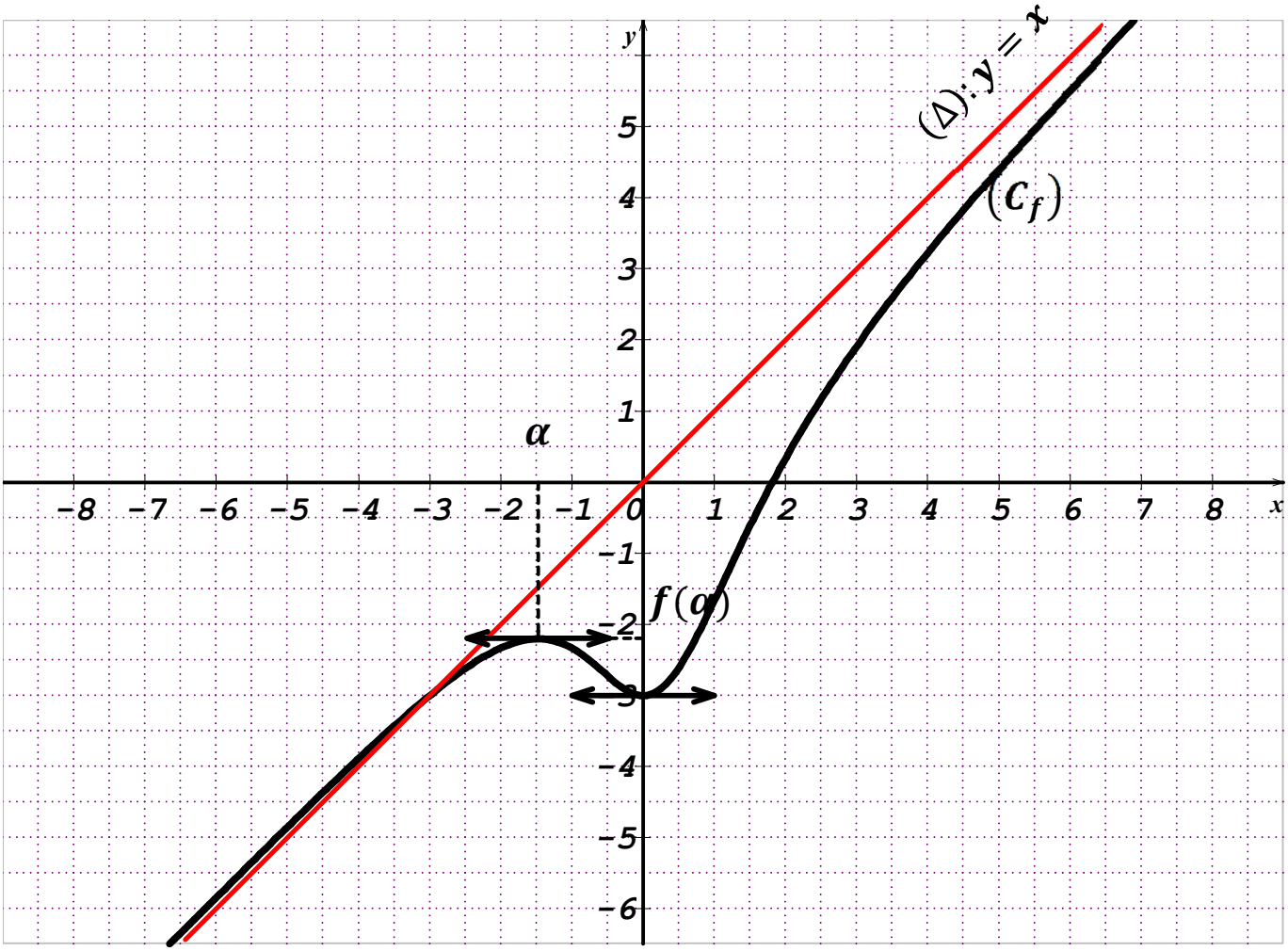
إذن: $\boxed{f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1{,}48<\alpha<-1{,}47$ وَ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$، وبالتالي: $-1{,}48\times\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\alpha<-1{,}47\times\frac{3}{2}$

إذن: $\boxed{-2{,}22<f(\alpha)<-2{,}205}$.

4)رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f):



5) مساحة الـ

اثبات أنّ: من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ثمّ تبيان أنّ: $\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha$:

من جدول تغيّرات الدّالة f، إذا كان: $\alpha \leq x \leq 0$،

فإنّ: $f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ (لأنّها **متناقصة تماماً** على المجال $[\alpha; 0]$)

وبالتالي: $\boxed{-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)}$.

ومنه: $-f(\alpha) \leq -f(x) \leq 3$ وعليه: $\int_{\alpha}^{0} -f(\alpha)dx \leq \int_{\alpha}^{0} -f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{0} 3dx$

وبالتالي: $-\left[\frac{3}{2}\alpha x\right]_{\alpha}^{0} \leq S \leq [3x]_{\alpha}^{0}$

إذن: $\boxed{\frac{3}{2}\alpha^2 \leq S \leq -3\alpha}$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: رياضيات.

التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة f.

2)أ-بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب-أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D).

3)أ-بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3<x_0<1,4$.

ب-عيّن معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

جـ-أرسم (Δ) و(C_f) في نفس المعلم.

4)أوجد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x.

5) g الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدّالة g في المعلم السابق.

-بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6)ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $g(x)=m^2$.

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول// الشعبة: رياضيات.

حل التمرين 01: (07 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

لدينا: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ وَ $D_f =]-1;+\infty[$.

(C_f) منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) دراسة تغيّرات الدّالة f:

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = +\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

وَ $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = -\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to-1} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-1} x = -1$.

- ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$،

$$f'(x) = 1 - 2\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2}\right) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$$

إذن: الدّالة f **متزايدة تماما** على $]-1;+\infty[$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

2)أ-تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته، $y = x$:

بمأنّ $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$، فإنّ المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (**المُوازي لمحور التراتيب**) مُقارب لـ(C_f).

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1}} = 0$،

إذن: المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مُقارب **مائل** لـ(C_f) عند $+\infty$.

ب-دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$)

لدينا: $f(x) - x = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0$ إذن: من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، (C_f) يقع **تحت** المستقيم (D).

3)أ-بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث، $1,3 < x_0 < 1,4$:

- لدينا: f **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]1,3;1,4[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]-1;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(1,3) = -0,01 \\ f(1,4) = +0,10 \end{cases}$ أي: $f(1,3) \times f(1,4) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة**، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$.

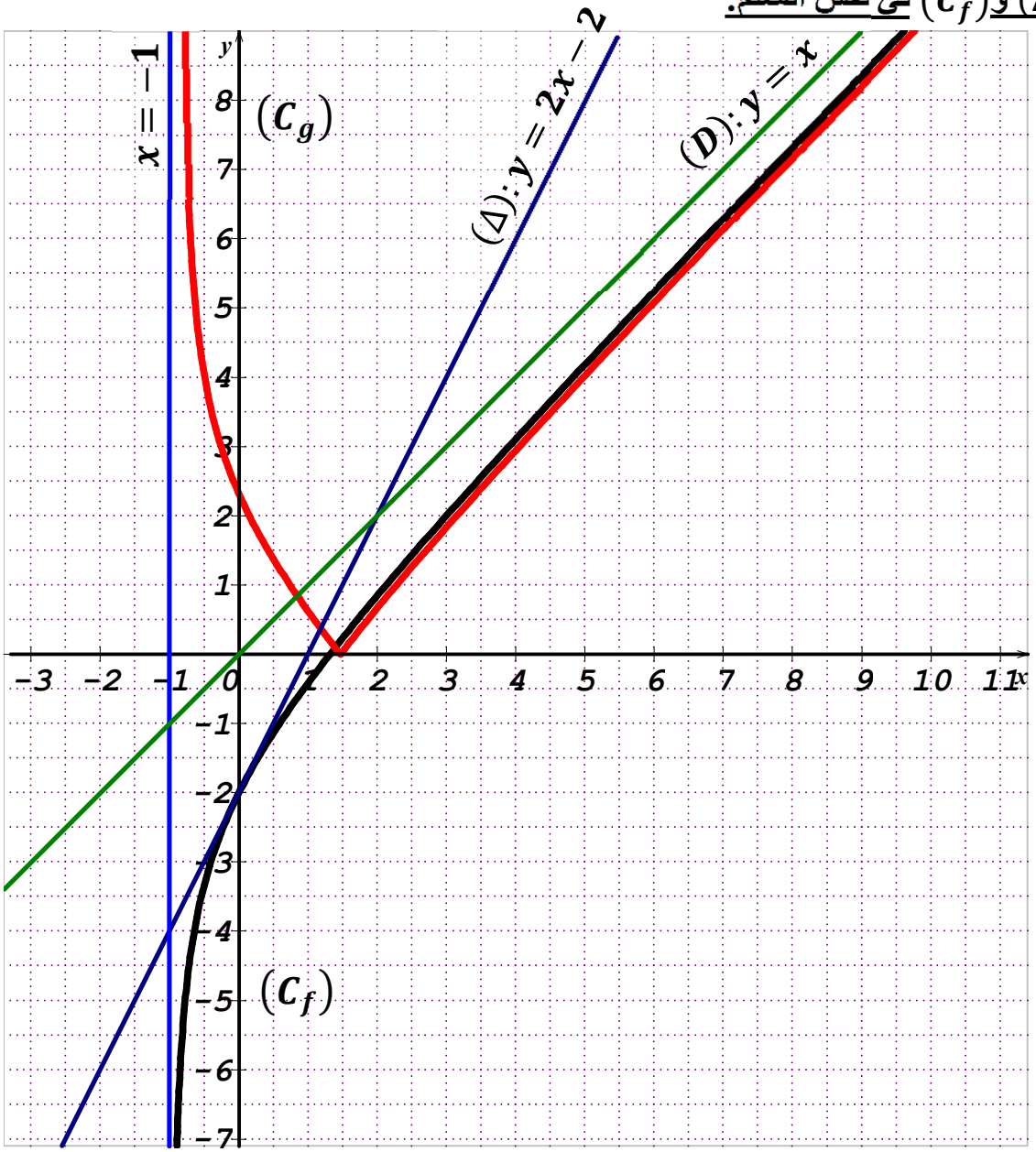
أي: f يقـ

ب-تعيّن معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب:

نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب **فاصلتها 0** إذن: (Δ) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0، معادلته من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$، وبمأنّ: $\begin{cases} f'(0) = 1 + \frac{1}{(0+1)\sqrt{0+1}} = 2 \\ f(0) = 0 - \frac{2}{\sqrt{0+1}} = -2 \end{cases}$،

فإنّ: $\boxed{(\Delta): y = 2x - 2}$.

جـ-رسم (Δ) و(C_f) في نفس المعلم:



4)ايجاد الدّالة الأصلية للدّالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x:

مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة f على المجال $]-1; +\infty[$ هي الدّوال:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + c$، حيث c ثابت حقيقي، ونعلم أنّ $F(0) = 0$ ومنه: $c = 4$

إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4}$.

5)لدينا: $|(x)$ و ، منحنى الدّالة في المعلم السابق.

-تبيان كيف يُمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ثمّ رسمه في نفس المعلم السّابق:

لدينا: $g(x)=|f(x)|=\begin{cases}f(x) & ;f(x)\geq 0\\ -f(x) & ;f(x)\leq 0\end{cases}$ أي: $g(x)=\begin{cases}f(x) & ;x\in[x_0;+\infty[\\ -f(x) & ;x\in]-1;x_0]\end{cases}$

إذن: من أجل $x\in[x_0;+\infty[$، فإنّ $g(x)=f(x)$ وبالتالي: (C_g) **ينطبق** على (C_f)،

ومن أجل $x\in]-1;x_0]$، فإنّ $g(x)=-f(x)$ وبالتالي: (C_g) **نظير** (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

6)مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x، $g(x)=m^2$:

إذا كان $m^2=0$ أي: $\boxed{m=0}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلا واحدا موجبا.**

إذا كان $0<m^2<2$ أي: $\boxed{m\in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين موجبين.**

إذا كان $m^2=2$ أي: $\boxed{m=\sqrt{2}\ \text{أو}\ m=-\sqrt{2}}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم.**

إذا كان $m^2>2$ أي: $\boxed{m\in]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[}$ فإنّ المعادلة **تقبل حلين مختلفين في الإشارة.**

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

.