الرياضيات
السهلة

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

في البكالوريا

شعبة : علوم تجريبية

إنجاز : خالد بخاشة

01 التمارين

التمرين رقم 01

[باك 2009][م1]

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} h(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيّراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)$ ، ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

بـ ـ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ ـ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند النقطة التي فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4) أرسم (C_f) .

التمرين رقم 02

[باك 2010][م1]

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to\frac{1}{2}}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ ـ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ ـ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ أحسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2<\alpha<3$.

بـ ـ أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق .

إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

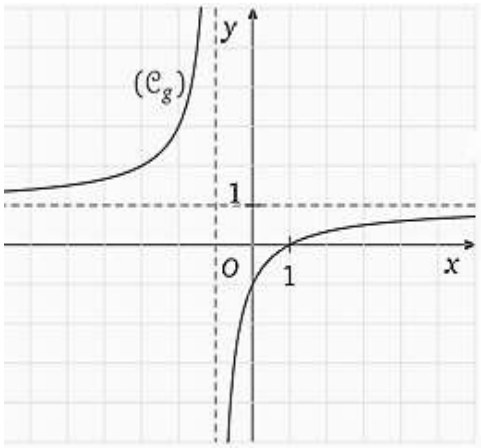
4) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

التمرين رقم 03

[باك 2011][م1]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ،



بقراءة بيانية :

أ ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة g .

بـ ـ حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ ـ عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

بـ ـ أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين رقم 04

[باك 2012][م1]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

بـ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أنّ المعـ

6) أ ـ نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

بـ ـ بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها .

7) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أنه من كل $x\in]-\infty;0[$: $g'(x)=f(x)$.

التمرين رقم 05

[باك 2013][م2]

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

بـ ـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ ـ أحسب x_0 .

بـ ـ أرسم المستقيمين المقاربين و المماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).

جـ ـ عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

التمرين رقم 06

[باك 2014][م1]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ ـ أدرس و

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

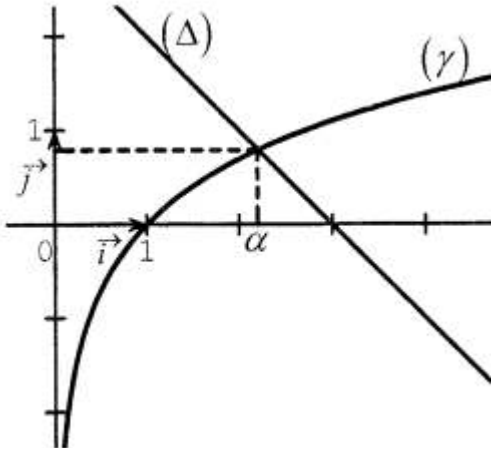
أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

بـ ـ أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ ـ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

التمرين رقم 07

[باك 2015][م1]



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن : $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

التمرين رقم 08

[باك 2016][د1][م1]

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g.

2) أحسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له .

أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

بـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m$.

التمرين رقم 09

[باك 2016][د2][م1]

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ ـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

د ـ أرسم المنحنى (C_f) .(نقبل أن : $f(\alpha)=3,16$)

2) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ ـ بيّن أن الدالة k زوجية .

بـ ـ بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيّرات الدالة k)

جـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$.

التمرين رقم 10

[باك 2017]م1]

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

إستنتج ا

5) بيّن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

التمرين رقم 11

[باك 2017][د إ][م1]

نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين بيانيا .

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ (C_f) .

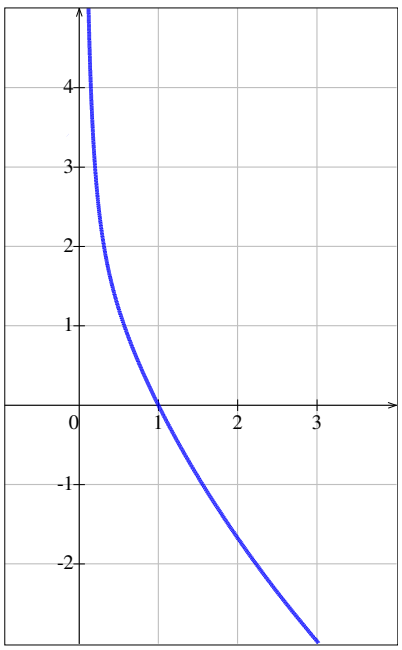
التمرين رقم 12

[باك 2018][م1]

I) g الدالة العددية ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل :

ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.



II) f الدالة العددية ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ و بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

التمرين رقم 13

[باك 2019][م1]

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .

أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

بـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) g الدالة المعرّفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$. دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد إتجاه تغيّر الدالة g .

التمرين رقم 14

[باك 2020][م1]

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$. الوحدة $2cm$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا ثم بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

بـ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

2) الدالة العدية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

أ ـ بيّن أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

3) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

بـ ـ استنتج إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له .

5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) الدالة العددية h معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=-|x|+1+\dfrac{\ln|x|}{x^2}$.

أ ـ بيّن أن h دالة زوجية .

بـ ـ إشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة إنطلاقا من (C_f) . (لا يُطلب إنشاء (C_h))

02 حلول التمارين

01 حل مقترح للتمرين

I) h الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+2x+\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left[x^2+2x+\ln(x+1)\right]=-\infty$

2) الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغيّر الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ ومنه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة h :

x	-1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0)=0^2+2\times0+\ln(0+1)=0$$

- إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$ لأن :

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ ومنه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)}=0$.

جـ- إستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim\left(\frac{\ln(x+1)}{}\right)=\lim\frac{\ln u}{}=0 \qquad \lim(\ )=\lim\left(-1-\frac{\ln(x+1)}{}\right)=+\infty$$

د ـ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$.

$f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$.		(C_f) تحت (Δ)

2) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

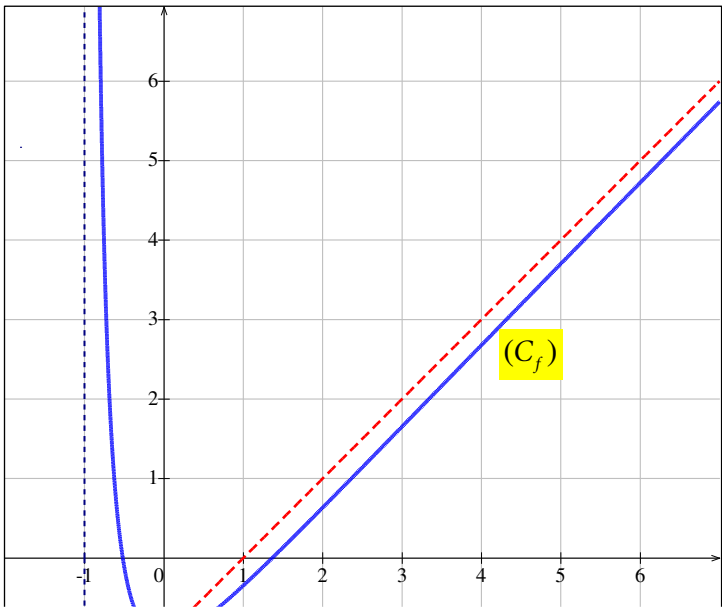
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ و $]0;+\infty[\supset[3.3;3.4]$ ولدينا $\begin{cases}f(3.3)\approx1.96\\f(3.4)\approx2.06\end{cases}$ أي $f(3.3)<2<f(3.4)$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا في المجال $[3.3;3.4]$.

4) الرسم :



I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$.

1) النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\ln(2x-1)\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left[1+\ln(2x-1)\right]=-\infty$.

2) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على I ، و من أجل كل x من I ، $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$	$\nearrow$	$+\infty$
	$\|$	$-\infty$	

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x)=1$ في I .

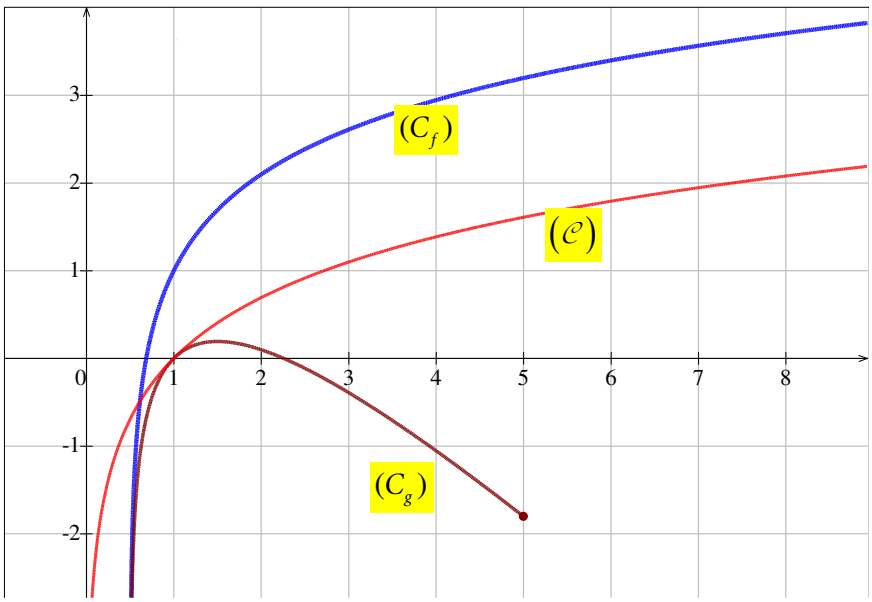
$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1}=1$ تكافئ $2=2x-1$ أي $x=\frac{3}{2}$.

4) أ- من أجل كل x من I : $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، ومنه : $a=-\frac{1}{2}$

و $b=1+\ln 2$.

بـ- لدينا : $f(x)=h(x+a)+b$ حيث : $h(x)=\ln x$ ومنه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$.

الرسم :



II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left[1-x+\ln(2x-1)\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\dfrac{1-x}{2x-1}+\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$)

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على I :

الدالة g قابلة للإشتقاق على I ، و $g'(x)=-1+\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	↘	$-\infty$

3) أ- لدينا : $g(1)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0,19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2<\alpha<3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0,09 \\ g(3)\approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ و منه $2<\alpha<3$.

بـ- رسم المنحنى $\left(C_g\right)$: أنظر الشكل السابق .

4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup]\alpha;+\infty[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x\in]1;\alpha[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$.

5) الدالة f مت

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

أ ـ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		‖	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

ب ـ حل المتراجحة $g(x)>0$ بيانيا :

$g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

جـ ـ تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

$0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\end{cases}$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

2) أ ـ الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	1

3) باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

لدينا حسب الجزء I) السؤال جـ : من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ ، فإن $0<\frac{x-1}{x+1}<1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$.

04 حل مقترح للتمرين

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ <}}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ <}}(x+5)=5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ <}}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

بـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0\end{cases}$

2) الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=1+6\left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right)=1-\frac{6}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1-\frac{6}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $\frac{x}{x-1}>0$ ومنه $x(x-1)>0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ ومنه :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6\ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

3) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة : $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

من أجل

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

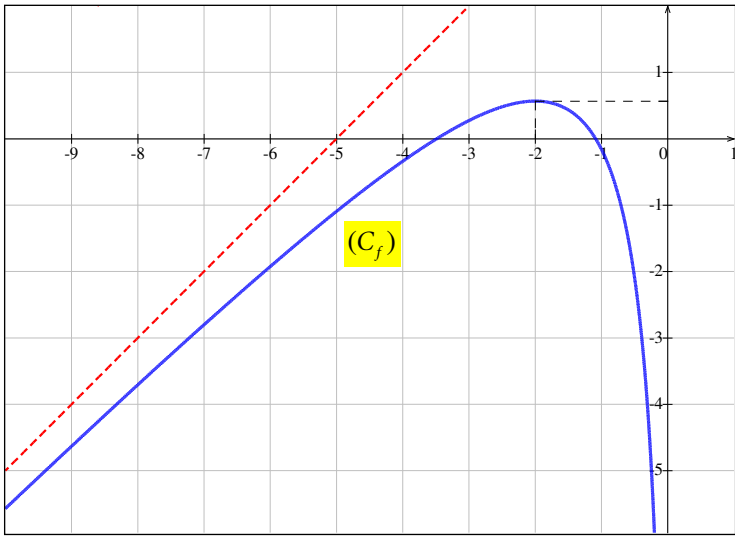
• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$ و $\begin{cases} f(-3.4)\approx 0,05 \\ f(-3.5)\approx -0,01 \end{cases}$

أي $f(-3,4)\times f(-3,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;0]$ و $]-1,1;-1[\subset]-2;0]$ و $\begin{cases} f(-1.1)\approx 0,02 \\ f(-1)\approx -0,16 \end{cases}$

أي $f(-1,1)\times f(-1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$.

5) الرسم :



6) أ- لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة .

$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4}$ ، $y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) و الحصول على المعادلة المعطاة)

ب- تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$.

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل و هو $x_0=-3$.

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$.

7) g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}-2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن: $x+1>0$ و $x+2>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2) من جدول التغيّرات: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$.

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1\times\left(1-2\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب- دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
	‖	↗	$+\infty$

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا α.

التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

لدينا : $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(0)=-1 \\ f(0.5)\approx 0.37\end{cases}$ أي $f(0)\times f(0.5)<0$ ومنه $0<\alpha<0,5$.

3) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$.

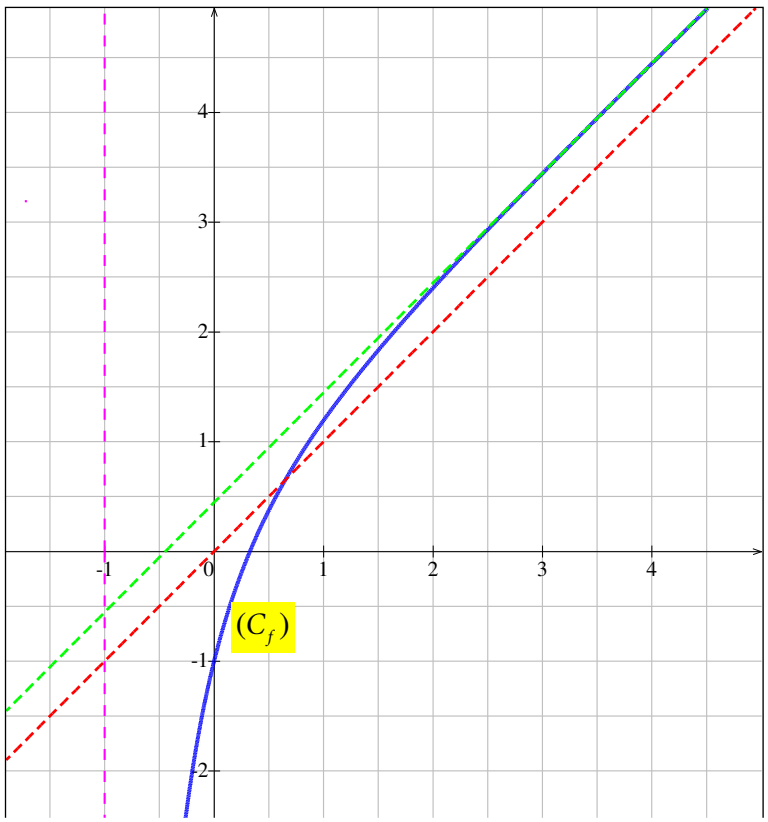
x	-1		$-1+\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (Δ) تحت (C_f)		(Δ) يقطع (C_f) في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$		(Δ) فوق (C_f)

4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ ـ حساب x_0 :

لدينا : $f'(x_0)=1$ تكافئ $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln(x_0+1)=3$ تكافئ $x_0=-1+\sqrt{e^3}$.

بـ ـ الرسم :



جـ ـ بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

حل مقترح للتمرين 06

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$.

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، و من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+2e^{-1}$	↘	$+\infty$

2) أ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

لدينا : $f(x)-y=1+\frac{2\ln x}{x}-1=\frac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$		(C_f) فوق (Δ)

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T):y=2x-1$.

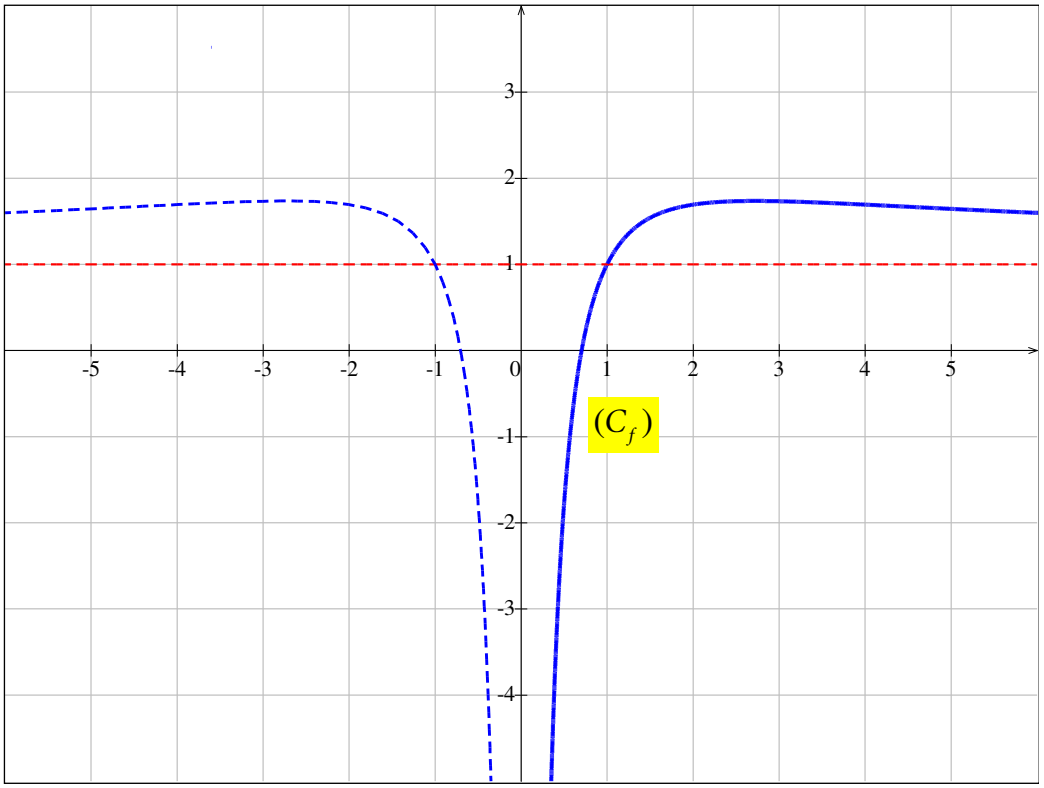
جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

$-0,4$

الدالة

وحيدا α بحيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) الرسم :



4) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ ـ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية و تمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

بـ ـ كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x \in]0;+\infty[$ ، يكون $h(x)=f(x)$ و بالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x \in]-\infty;0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

$$h(x)=m \text{ أي } 1+\frac{2\ln|x|}{|x|}=m \text{ تكافئ } 2\ln|x|=(m-1)|x| \text{ تكافئ } \ln x^2=(m-1)|x|$$

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

لما $m \in]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m \in \left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m \in \left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول .

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x \in]0;\alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

2) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $2,2 < \alpha < 2,3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2,2) \approx -0,011 \\ g(2,3) \approx 0,13 \end{cases}$ ومنه $g(2,2) \times g(2,3) < 0$ أي $2,2 < \alpha < 2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}(\ln x-2)=-\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2)=+\infty \end{cases}$

2) الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ وبالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2,2 < \alpha < 2,3$ يكافئ : $\begin{cases} \frac{1}{2,3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,3} \\ 1,2 < \alpha-1 < 1,3 \end{cases}$ ومنه $\frac{(1,2)^2}{2,3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{(1,3)^2}{2,2}$

ومنه : $-\frac{(1,3)^2}{2,2} < f(\alpha) < -\frac{(1,2)^2}{2,3}$ أي : $-0,76 < f(\alpha) < -0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

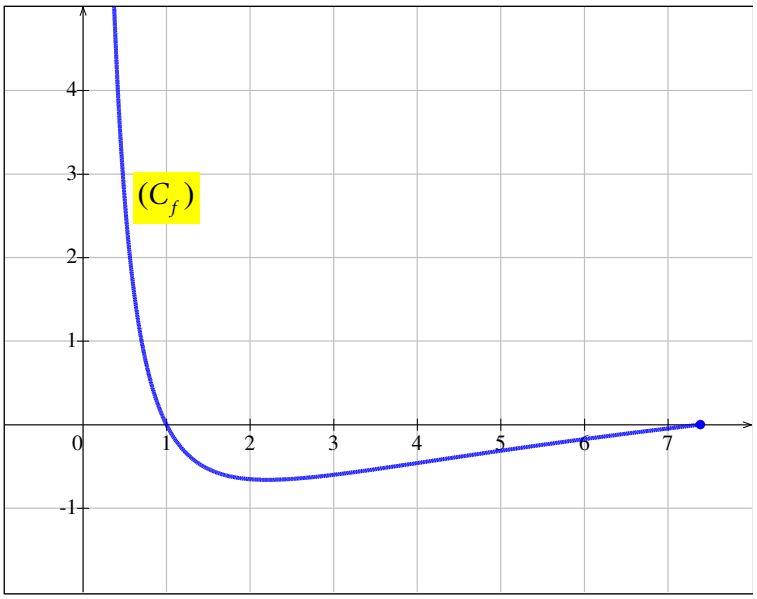
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ وتحته على المجال $]1;e^2[$ ، ويتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



حل مقترح للتمرين 08

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - 1$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

2) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+1=\dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

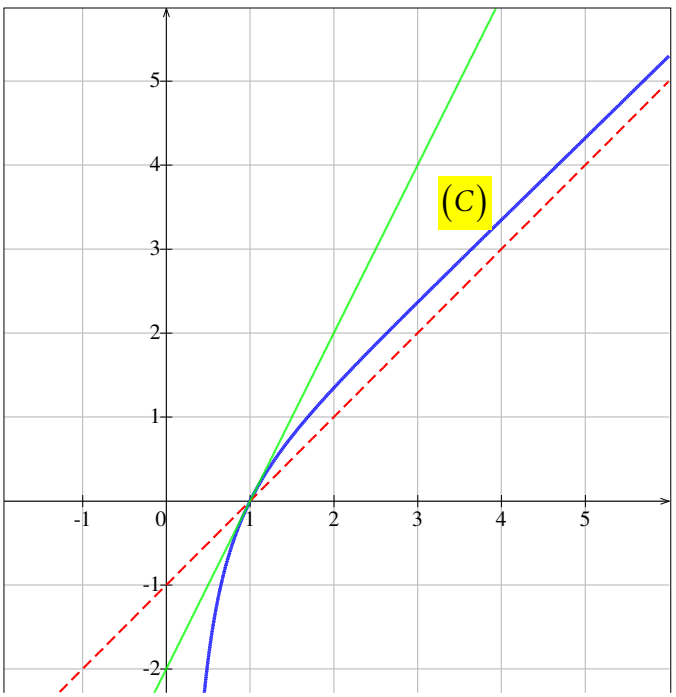
لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-2$.

4) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و منه للمنحنى (C) مستقيم مقارب (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) : لدينا $f(x)-y=\dfrac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (Δ) تحت (C)		(C) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(Δ) فوق (C)	

5) الرسم :



6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m، $A \in (\Delta_m)$

بـ ـ المناقشة البيانية:

لدينا: (Δ_m) معامل توجيهه m و يشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m \in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m \in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

حل مقترح للتمرين 09

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g:

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)\right] = +\infty$، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)\right] = -\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $g'(x) = e + \dfrac{2}{x+1}$

من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$، $g'(x) > 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g:

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ و منه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أ ـ تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right] = -\infty$، لأن:

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\dfrac{e}{x+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\dfrac{1}{(x+1)^2} \times \ln(x+1)\right] = -\infty \end{cases}$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\dfrac{1)}{} = 0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

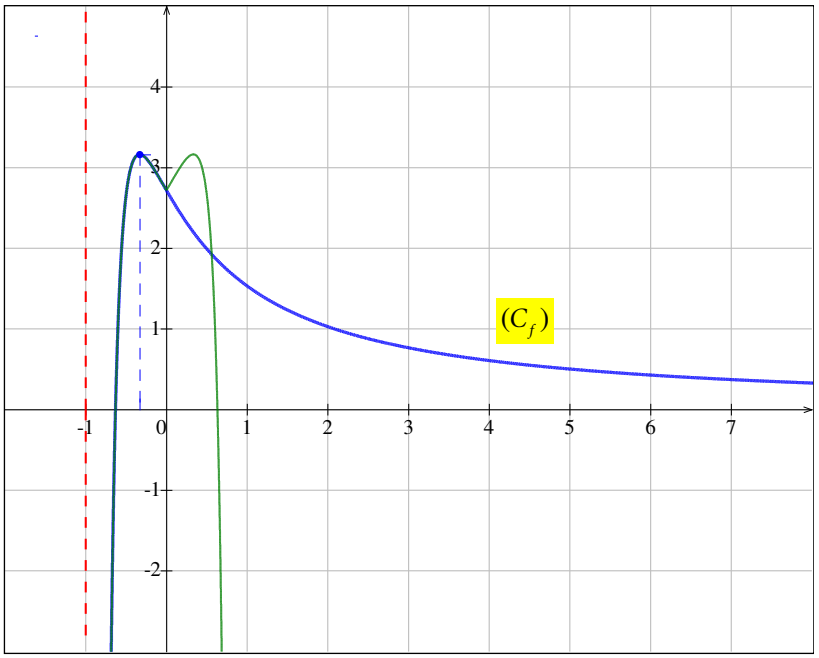
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

د ـ الرسم :



2) k الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$

أ ـ تبيان أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x\in]-1;1[$: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$.

و بالتالي الدالة k زوجية .

بـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) :

لدينا : $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases}f(x);x\in]-1;0]\\f(-x);x\in[0;1[\end{cases}$

إذن : من أجل $x\in]-1;0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور التراتيب لكون k زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ المناقش

حلول المع

إذا كان $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .
إذا كان $e < m < f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .
إذا كان $m = e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم .
إذا كان $m < e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

حل مقترح للتمرين 10

f الدالة المعرفة على D حيث $]1;+\infty[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $D = $ $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة f فردية :
المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x \in D$ ، $x \in D$)
و من أجل كل $x \in D$ ، $f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$
التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

2) حساب النهايات :
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = -\infty$
التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x = 1$ و $x = -1$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

3) الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغيّر الدالة f :
لدينا : من أجل كل $x \in D$ ، $x^2 - 1 > 0$ و منه $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .
جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

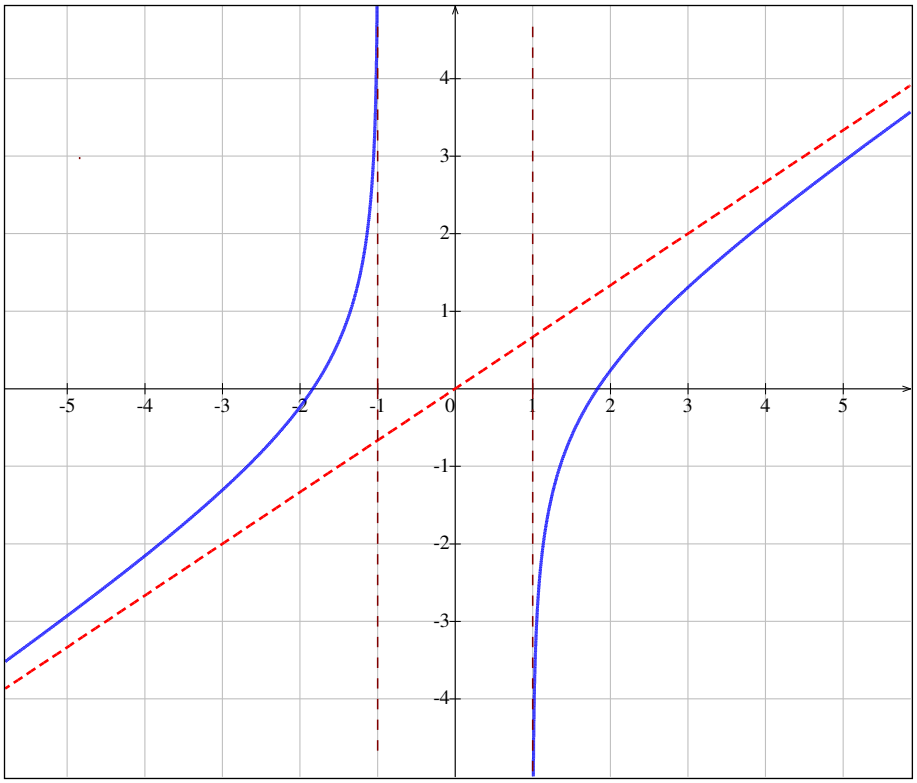
4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:
الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1;+\infty[\supset]1{,}8;1{,}9[$ و $\begin{cases} f(1{,}9) \approx 0{,}10 \\ f(1{,}8) \approx -0{,}05 \end{cases}$
أي $f(1.8) \times f(1.9) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

5) لدينا : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x\right] = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$
و منه المس Δ $= \frac{2}{}$ ( )

لدينا : $f(x)-y=f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	‖	‖	(C_f) تحت (Δ)

6) الرسم :



7) المناقشة البيانية :

$\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

أي $f(x)=|m|x$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ أي $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

حل مقترح للتمرين 11

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)[1+2\ln(2x+1)]\right]=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$: لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{(2x+1)^2}+2\dfrac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل x من $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\dfrac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3) حل في المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\dfrac{1}{2}$ تكافئ $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $x=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}-\dfrac{1}{2}$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4) تبيان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\dfrac{1}{3}$ تكافئ $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$ أي : $x=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

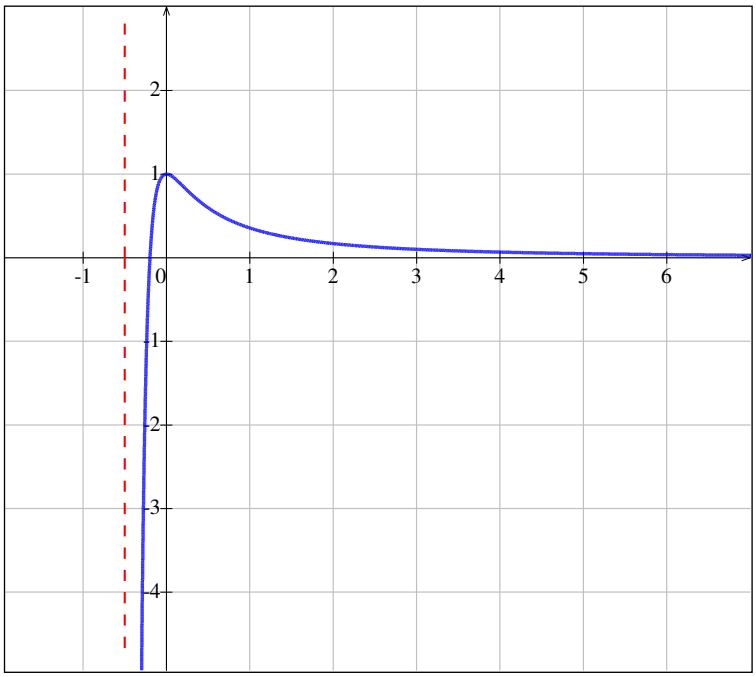
إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$\left(\frac{1}{3}\right.$ $\left._{-\frac{2}{}}\right)$

إذن المنحنى

الرسم :



حل مقترح للتمرين 12

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

- حساب $g(1)$: $g(1)=1-(\ln 1)^2-\ln 1-1=0$
- إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{>}}\left(\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^{>}}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^{>}}(1+x\ln x)=1\end{cases}$ (تذكّر أن : $\lim\limits_{x\to 0^{>}} x\ln x=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

- تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$$

(تذكّر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) ،

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(1+\ln x)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$$

بـ- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

أولا : تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

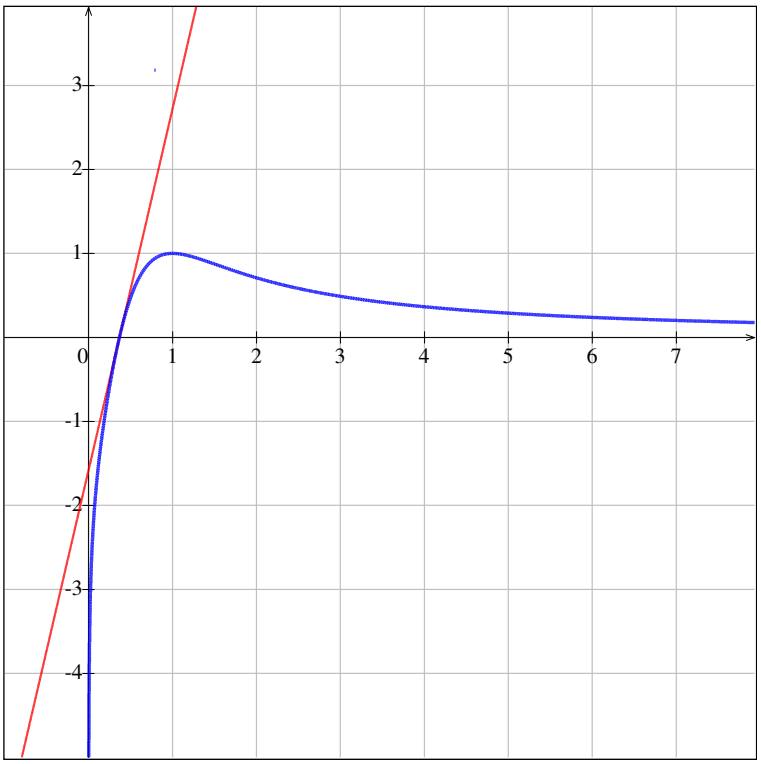
نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$.

معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

لدينا : $(T):y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

الرسم :



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$.

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-5x+4 لكون $x(x-2)^2>0$ من أجل كل x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$.

- إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

و منه : الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]4;+\infty[$ و $]0;1]$ و متناقصة على كل من المجالين $[2;4[$ و $[1;2[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$.

التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

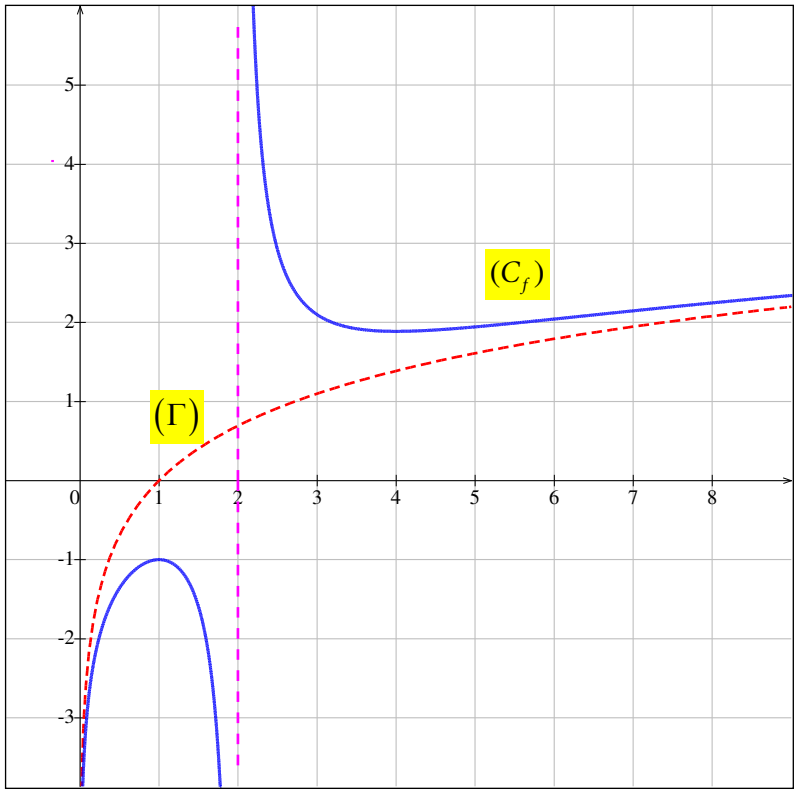
بـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-2$.

على المجال $]0;2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) .

على المجال $]2;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .

4) الرسم :



5) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]-\infty;-1[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$.

إتجاه تغيّر الدالة g :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\ 2<-2x<4\end{cases}$ أو تكافئ : $\begin{cases}-1<x<\dfrac{1}{2}\\ -2<x<-1\end{cases}$ أو .

و منه الدالة g متزايدة على كل من المجالين $]-1;-2[$ و $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$ و متناقصة على كل من المجالين $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ و $]-\infty;-2[$.

حل مقترح للتمرين 14

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C_f) .

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}\right]=+\infty$. لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$.

بـ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\ln x}{x^2}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-\ln x$.

- المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال $]0;1[$.
-

2) الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}$.

و لدينا : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

بـ $g(1)=0$ ،

إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$.

بـ- إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4) تبيان أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) :

نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f'(x)=1$.

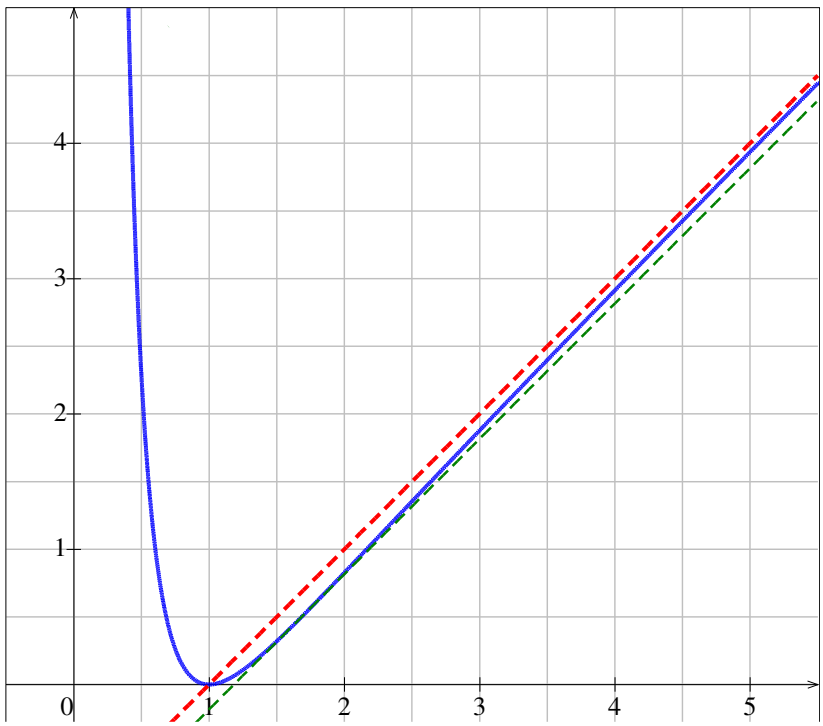
$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=1$ تكافئ $-1+2\ln x=0$ تكافئ $\ln x=\frac{1}{2}$ تكافئ $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

و بالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$ يوازي المستقيم (Δ) .

كتابة معادلة لـ (T) :

لدينا $(T):y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ و منه $(T):y=x-1-\frac{1}{2e}$.

5) الرسم :



6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=-|x|+1+\dfrac{\ln|x|}{x^2}=-f(|x|)$.

أ- تبيان أن h دالة زوجية :

المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر ، و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(-x)=-f(|-x|)=-f(|x|)=h(x)$.

و بالتالي الدالة h زوجية .

بـ- شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة إنطلاقا من (C_f) :

لدينا : $h(x)=\begin{cases}-f(x) & ; x>0\\ -f(-x) & ; x<0\end{cases}$ و منه : على المجال $]0;+\infty[$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

و نحصل على (C_h) على المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .